ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Zeros dos Polinômios Ortogonais do tipo Laguerre

Edmundo J. Huertas, **Francisco Marcellán**,
Departamento de Matemáticas, Escuela Politécnica Superior, Universidad Carlos III,
Leganés-Madrid, Spain
E-mail: ehuertas@math.uc3m.es, pacomarc@ing.uc3m.es,

Fernando R. Rafaeli
Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: fe_ro_rafaeli@yahoo.com.br.

Resumo: *Denotemos por* $x_{n,k}^{M}(a;\alpha)$, $k=1,\ldots,n$, *os zeros dos polinômios do tipo Laguerre,* $L_n^{(\alpha,M)}(a;x)$, *ortogonais com relação ao produto interno*

$$\langle p,q\rangle_M = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x}dx + Mp(a)q(a),$$

com $\alpha>-1$, $M>0$ *e* $a\le 0$. *Neste trabalho provamos que há pelo menos* $n-1$ *zeros de* $L_n^{(\alpha,M)}(a;x)$ *em* $(0,+\infty)$. *Além disso, são obtidos resultados de entrelaçamento, monotonicidade com relação à massa* M, *assim como a convergência deles quando* M *tende ao infinito, com velocidade da ordem* $1/M$, *aos zeros de certos polinômios ortogonais.*

Palavras-chave: *Polinômios ortogonais, polinômios de Laguerre, polinômios do tipo Laguerre, zeros, monotonicidade, assintótica.*

1 Introdução e Resultados

Consideremos a sequência de polinômios do tipo Laguerre $\{L_n^{(\alpha,M)}(a;x)\}_{n\ge 0}$ que são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p,q\rangle_M = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x}dx + Mp(a)q(a),$$

com $\alpha>-1$, $M>0$ e $a\le 0$. Recentemente, vários autores estudaram o comportamento dos zeros dessa nova família de polinômios ortogonais no caso em que $a=0$ (ver [1], [2], [5], [7], [8], [9]).

Fornecemos, abaixo, uma representação desses polinômios em termos dos polinômios clássicos de Laguerre, $L_n^{(\alpha)}(x)$, ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p,q\rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x}dx, \quad \alpha>-1, \tag{1}$$

e dos polinômios $L_n^{**(\alpha)}(a;x)$, que são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p,q\rangle_{**} = \int_0^\infty p(x)q(x)(x-a)^2x^\alpha e^{-x}dx, \quad \alpha>-1 \text{ e } a\le 0. \tag{2}$$

Teorema 1 *Os polinômios* $\{\widehat{L}_n^{(\alpha,M)}(a;x)\}_{n\geq 0}$, *com* $\widehat{L}_n^{(\alpha,M)}(a;x) = k_n L_n^{(\alpha,M)}(a;x)$, *podem ser representados por*

$$\widehat{L}_n^{(\alpha,M)}(a;x) = L_n^{(\alpha)}(x) + MB_n(x-a)L_{n-1}^{**(\alpha)}(a;x), \tag{3}$$

com

$$B_n = \frac{-L_n^{(\alpha)}(a)}{\langle x-a, L_{n-1}^{**(\alpha)}\rangle} = K_{n-1}(a,a) > 0 \tag{4}$$

e $k_n = 1 + NB_n$.

Demonstração: Para provar a ortogonalidade dos polinômios definidos por (3), recorremos à base $1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$ do espaço linear dos polinômios de grau até n. Então,

$$\begin{aligned}
\langle 1, \widehat{L}_n^{(\alpha,M)}\rangle_M &= \langle 1, L_n^{(\alpha)}\rangle + NB_n\langle 1, (x-a)L_{n-1}^{**(\alpha)}\rangle + NL_n^{(\alpha)}(a) = 0\\
\langle (x-a), \widehat{L}_n^{(\alpha,M)}\rangle_M &= \langle (x-a), L_n^{(\alpha)}\rangle + NB_n\langle 1, L_{n-1}^{**(\alpha)}\rangle_{**} = 0\\
&\vdots\\
\langle (x-a)^{n-1}, \widehat{L}_n^{(\alpha,M)}\rangle_M &= \langle (x-a)^{n-1}, L_n^{(\alpha)}\rangle + NB_n\langle (x-a)^{n-2}, L_{n-1}^{**(\alpha)}\rangle_{**} = 0,
\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle (x-a)^n, \widehat{L}_n^{(\alpha,M)}\rangle_M &= \langle (x-a)^n, L_n^{(\alpha)}\rangle + NB_n\langle (x-a)^{n-1}, L_{n-1}^{**(\alpha)}\rangle_{**} > 0\\
&= \|L_n^{(\alpha)}\|^2 + NB_n\|L_{n-1}^{**(\alpha)}\|_{**}^2 > 0,
\end{aligned}$$

com $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{**}$ representando as normas geradas pelos produtos internos (1) e (2), respectivamente.

Para provar (4), de (21) e (19), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle x-a, L_{n-1}^{**(\alpha)}\rangle &= \int (x-a)\, L_{n-1}^{**(\alpha)}(a;x)d\mu(x)\\
&= \int (x-a)\frac{1}{x-a}\left[L_n^{*(\alpha)}(a;x) - \frac{L_n^{*(\alpha)}(a;a)}{L_{n-1}^{*(\alpha)}(a;a)}L_{n-1}^{*(\alpha)}(a;x)\right]d\mu(x)\\
&= \int L_n^{*(\alpha)}(a;x)d\mu(x) - \frac{L_n^{*(\alpha)}(a;a)}{L_{n-1}^{*(\alpha)}(a;a)}\int L_{n-1}^{*(\alpha)}(a;x)d\mu(x)\\
&= \frac{\|L_n^{(\alpha)}\|^2}{L_n^{(\alpha)}(a)}\int K_n(a;x)d\mu(x)\\
&\quad - \frac{\|L_n^{(\alpha)}\|^2}{L_n^{(\alpha)}(a)}\frac{K_n(a;a)}{K_{n-1}(a;a)}\frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(a)}{\|L_{n-1}^{(\alpha)}\|^2}\frac{\|L_{n-1}^{(\alpha)}\|^2}{L_{n-1}^{(\alpha)}(a)}\int K_{n-1}(a;x)d\mu(x)\\
&= \frac{\|L_n^{(\alpha)}\|^2}{L_n^{(\alpha)}(a)} - \frac{\|L_n^{(\alpha)}\|^2}{L_n^{(\alpha)}(a)}\frac{K_n(a;a)}{K_{n-1}(a;a)}\\
&= \frac{\|L_n^{(\alpha)}\|^2}{L_n^{(\alpha)}(a)}\left(1 - \frac{K_n(a;a)}{K_{n-1}(a;a)}\right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$B_n = \frac{-L_n^{(\alpha)}(a)}{\langle x-a, L_{n-1}^{**(\alpha)}\rangle} = \frac{[L_n^{(\alpha)}(a)]^2}{\|L_n^{(\alpha)}\|^2\,[K_n(a,a)/K_{n-1}(a,a) - 1]} = K_{n-1}(a,a) > 0.$$

Denotemos agora por $x_{n,k}^M(a;\alpha)$, $x_{n,k}(\alpha)$ e $x_{n,k}^{**}(a;\alpha)$ os zeros de $L_n^{(\alpha,M)}(a;x)$, $L_n^{(\alpha)}(x)$ e $L_n^{**(\alpha)}(a;x)$, respectivamente, todos arranjados em ordem crescente. O próximo resultado mostra a monotonicidade, assintótica e velocidade de convergência dos zeros $x^M_{n,k}(a;\alpha)$ em termos da massa M, além do entrelaçamento desses zeros com os zeros $x_{n,k}(\alpha)$ e $x^{**}_{n-1,k}(a;\alpha)$.

Teorema 2 *Se $a \leq 0$ então*

$$\begin{aligned} a < x^M_{n,1}(a;\alpha) < x_{n,1}(\alpha) < x^{**}_{n-1,1}(a;\alpha) < x^M_{n,2}(a;\alpha) < x_{n,2}(\alpha) < \cdots \\ < x^{**}_{n-1,n-1}(a;\alpha) < x^M_{n,n}(a;\alpha) < x_{n,n}(\alpha). \end{aligned} \tag{5}$$

Além disso, cada $x^M_{n,k}(a;\alpha)$ é uma função decrescente de M e, para todo $k = 1,\ldots,n-1$,

$$\lim_{M\to\infty} x^M_{n,1}(a;\alpha) = a, \quad \lim_{M\to\infty} x^M_{n,k+1}(a;\alpha) = x^{**}_{n-1,k}(a;\alpha), \tag{6}$$

assim como

$$\begin{aligned} &\lim_{M\to\infty} M[x^M_{n,1}(a;\alpha) - a] = \frac{L^{(\alpha)}_n(a)}{B_n L^{**(\alpha)}_{n-1}(a;a)}, \\ &\lim_{M\to\infty} M[x^M_{n,k+1}(a;\alpha) - x^{**}_{n-1,k}(a;\alpha)] = \frac{L^{(\alpha)}_n(x^{**}_{n-1,k}(a;\alpha))}{B_n[x^{**}_{n-1,k}(a;\alpha) - a][L^{**(\alpha)}_{n-1}(a;x)]'_{x=x^{**}_{n-1,k}(a;\alpha)}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Demonstração: De (25), (3) e do Lema 1 em [3] (ver também Lema 2 em [6]), segue o resultado.

Observe que o ponto a atrai um de $L^{(\alpha,M)}_n(a;x)$, isto é, quando $M \to \infty$, ele captura o menor zero.

Quando $a < 0$, no máximo um zero de $L^{(\alpha,M)}_n(a;x)$ está localizado fora de $[0,+\infty)$. No próximo resultado, fornecemos o valor M_0 da massa tal que para $M > M_0$ esta situação ocorre, isto é, um dos zeros é negativo.

Corolário 1 *Se $a < 0$ então o menor zero $x^M_{n,1} = x^N_{n,1}(a;\alpha)$ satisfaz*

$$\begin{aligned} x^N_{n,1} &> 0, \quad \text{para} \quad M < M_0, \\ x^N_{n,1} &= 0, \quad \text{para} \quad M = M_0, \\ x^N_{n,1} &< 0, \quad \text{para} \quad M > M_0, \end{aligned}$$

onde

$$M_0 = M_0(n,a) = \frac{L^{(\alpha)}_n(0)}{aK_{n-1}(0,0)\, L^{**(\alpha)}_{n-1}(a;0)} > 0.$$

Demonstração: Para investigar a localização de $x^M_{n,1}$ com relação à origem, é suficiente observar que $L^{(\alpha,M)}_n(0) = 0$ se, e somente se, $M = M_0$.

2 Aplicação aos polinômios de Laguerre-Koornwinder

Seja $a = 0$. Então os polinômios $L^{(\alpha,M)}_n(x) := L^{(\alpha,M)}_n(a;x)$ são também chamados de polinômios ortogonais de Laguerre-Koornwinder. Eles foram obtidos primeiramente por T. H. Koornwinder [10] como um caso limite dos polinômios ortogonais de Jacobi-Koornwinder, ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Mp(1)q(1).$$

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3 PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010 XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

A fórmula (3) para $L_n^{(\alpha,M)}(x)$ é

$$L_n^{(\alpha,M)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) + MK_{n-1}(0,0)\, x\, L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x), \tag{8}$$

onde

$$K_{n-1}(0,0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}.$$

Agora, analisemos o comportamento dos zeros desses polinômios. Denotemos então por $x_{n,1}^M(\alpha) < \cdots < x_{n,n}^M(\alpha)$ os zeros do n-ésimo polinômio de Laguerre-Koornwinder e por $x_{n,1}(\alpha) < \cdots < x_{n,n}(\alpha)$ os zeros do n-ésimo polinômio clássico de Laguerre. Aplicando o Teorema 2 para este caso, obtemos

Teorema 3 *As desigualdades*

$$0 < x_{n,1}^M(\alpha) < x_{n,1}(\alpha) < x_{n-1,1}(\alpha+2) < x_{n,2}^M(\alpha) < x_{n,2}(\alpha) < \cdots$$
$$< x_{n-1,n-1}(\alpha+2) < x_{n,n}^M(\alpha) < x_{n,n}(\alpha)$$

são válidas para todo $\alpha > -1$. Além disso, cada $x_{n,k}^M(\alpha)$ é uma função decrescente de M e, para todo $k = 1, \ldots, n-1$,

$$\lim_{M\to\infty} x_{n,1}^M(\alpha) = 0, \quad \lim_{M\to\infty} x_{n,k+1}^M(\alpha) = x_{n-1,k}(\alpha+2), \tag{9}$$

e

$$\begin{aligned} &\lim_{M\to\infty} Mx_{n,1}^M(\alpha) = g_n(\alpha), \\ &\lim_{M\to\infty} M[x_{n,k+1}^M(\alpha) - x_{n-1,k}(\alpha+2)] = \frac{g_n(\alpha)}{\alpha+2}, \end{aligned} \tag{10}$$

com

$$g_n(\alpha) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(n+\alpha+2)}. \tag{11}$$

Fornecemos uma tabela (ver Tabela 1) que mostra os zeros de $L_3^{(\alpha,M)}(x)$, com $\alpha = 2$, para vários valores de M. Observe que o menor zero converge a 0 e os outros dois zeros convergem

Tabela 1: Zeros de $L_3^{(\alpha,M)}(x)$ para alguns valores de M.

M	$x_{3,1}^M(2)$	$x_{3,2}^M(2)$	$x_{3,3}^M(2)$
0	1.51739	4.31158	9.17103
1	0.321731	3.64053	8.53774
10	0.0390611	3.5604	8.45936
100	0.00399042	3.55151	8.45049
1000	0.00039990	3.55061	8.44959

aos zeros do polinômio de Laguerre $L_2^{(4)}(x)$, isto é, eles convergem para $x_{2,1}(4) = 3.55051$ e $x_{2,2}(4) = 8.44949$. Note também que todos eles decrescem quando M cresce.

3 Apêndice A

Seja $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n\geq 0}$, $\alpha > -1$, a sequência de **polinômios ortogonais de Laguerre**. Destacamos a seguir algumas de suas propriedades (ver [4] e [11]).

1. Relação de recorrência de três termos:

$$\begin{aligned} &L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0, \quad L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \\ &L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x-\beta_n)L_n^{(\alpha)}(x) - \gamma_n L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{12}$$

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

com $\beta_n = 2n + \alpha + 1$ e $\gamma_n = n(n + \alpha)$.
2. $L_n^{(\alpha)}(x)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0. \tag{13}$$

3. Representação em série:

$$L_n^{(\alpha)}(x) \quad = \quad (-1)^n(\alpha+1)_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!}, \tag{14}$$

onde $(x)_k := x(x+1)\cdots(x+k-1)$.
4. Valor na origem:

$$L_n^{(\alpha)}(0) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{15}$$

5. Valor da norma

$$\|L_n^{(\alpha)}\|^2 = n!\Gamma(n+\alpha+1). \tag{16}$$

6. Se denotarmos o n-ésimo polinômio núcleo de Laguerre por

$$K_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \frac{L_j^{(\alpha)}(y) L_j^{(\alpha)}(x)}{\|L_j^{(\alpha)}\|^2}, \tag{17}$$

então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n(x,y) = \frac{1}{\|L_n^{(\alpha)}\|^2} \frac{L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y) - L_n^{(\alpha)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(y)}{x-y}$$

e, se $x = y$, temos a chamada forma confluente

$$K_n(x,x) = \frac{[L_{n+1}^{(\alpha)}(x)]' L_n^{(\alpha)}(x) - [L_n^{(\alpha)}(x)]' L_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{\|L_n^{(\alpha)}\|^2}.$$

7. Para todo n natural

$$K_n(0,0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}. \tag{18}$$

Seja $\{L_n^{*(\alpha)}(a;x)\}_{n\geq 0}$ a sequência de polinômios ortogonais mônicos associada com o produto interno

$$\int_0^\infty p(x)q(x)(x-a)x^\alpha e^{-x}dx,$$

com $a \leq 0$. Isto significa que $L_n^{(\alpha)}(a) \neq 0$ para todo $n \geq 1$.

Temos, por [4, (7.3)], que o polinômio $L_n^{*(\alpha)}(a;x)$ é dado por

$$L_n^{*(\alpha)}(a;x) = \frac{1}{x-a}\left[L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \frac{L_{n+1}^{(\alpha)}(a)}{L_n^{(\alpha)}(a)} L_n^{(\alpha)}(x)\right] = \frac{\|L_n^{(\alpha)}\|^2}{L_n^{(\alpha)}(a)} K_n(a,x), \tag{19}$$

isto é, $L_n^{*(\alpha)}(a;x)$ é o n-ésimo polinômio núcleo de Laguerre. Além disso, observe que $L_n^{*(\alpha)}(a;a) \neq 0$. Seja $x_{n,k} := x_{n,k}(\alpha)$ e $x_{n,k}^* := x_{n,k}^*(a;\alpha)$ os zeros de $L_n^{(\alpha)}(x)$ e $L_n^{*(\alpha)}(a;x)$, respectivamente, todos arranjados em ordem crescente. De (19) e da propriedade de entrelaçamento dos zeros de $L_n^{(\alpha)}(x)$ e $L_{n+1}^{(\alpha)}(x)$, segue que

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3 PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010 XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

- Se $a \leq 0$ então $L_{n+1}^{(\alpha)}(a)/L_n^{(\alpha)}(a) < 0$, e isso implica em

$$Sign\left[L_n^{*(\alpha)}(a; x_{n+1,k})\right] = Sign\left[L_n^{(\alpha)}(x_{n+1,k})\right], \ k = 1, \ldots, n+1,$$

assim como

$$Sign\left[L_n^{*(\alpha)}(a; x_{n,k})\right] = Sign\left[L_{n+1}^{(\alpha)}(x_{n,k})\right], \ k = 1, \ldots, n.$$

Portanto

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n,1}^* < x_{n+1,2} < \cdots < x_{n,n} < x_{n,n}^* < x_{n+1,n+1}. \tag{20}$$

Seja $\{L_n^{**(\alpha)}(a;x)\}_{n\geq 0}$ a sequência de polinômios ortogonais mônicos associada com o produto interno

$$\int_0^\infty p(x)q(x)(x-a)^2 x^\alpha e^{-x} dx,$$

com $a \leq 0$. Usando (19) deduzimos que

$$\begin{aligned} L_n^{**(\alpha)}(a;x) &= \frac{1}{x-a}\left[L_{n+1}^{*(\alpha)}(a;x) - \frac{L_{n+1}^{*(\alpha)}(a;a)}{L_n^{*(\alpha)}(a;a)} L_n^{*(\alpha)}(a;x)\right] \\ &= \frac{\|L_n^{*(\alpha)}\|_*^2}{L_n^{*(\alpha)}(a;a)} K_n^*(a,x) \\ &= \frac{1}{(x-a)^2}\left[L_{n+2}^{(\alpha)}(x) - d_n L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + e_n L_n^{(\alpha)}(x)\right], \end{aligned} \tag{21}$$

onde $K_n^*(a,x)$ é o polinômio núcleo associado com $L_n^{*(\alpha)}(a;x)$, e

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{L_{n+2}^{(\alpha)}(a)}{L_{n+1}^{(\alpha)}(a)} + \frac{L_{n+1}^{*(\alpha)}(a;a)}{L_n^{*(\alpha)}(a;a)} = \frac{L_{n+2}^{(\alpha)}(a) + L_n^{(\alpha)}(a)}{L_{n+1}^{(\alpha)}(a)} e_n, \\ e_n &= \frac{L_{n+1}^{*(\alpha)}(a;a)}{L_n^{*(\alpha)}(a;a)} \frac{L_{n+1}^{(\alpha)}(a)}{L_n^{(\alpha)}(a)} = \frac{\|L_{n+1}^{(\alpha)}\|^2}{\|L_n^{(\alpha)}\|^2} \frac{K_{n+1}(a,a)}{K_n(a,a)} > 0. \end{aligned}$$

Observe que $L_n^{**(\alpha)}(a;a) \neq 0$. Agora seja $x_{n,k}^{**} := x_{n,k}^{**}(a;\alpha)$ os zeros de $L_n^{**(\alpha)}(a;x)$, arranjados em ordem crescente. Então, usando (12) em (21), obtemos

$$L_n^{**(\alpha)}(a;x) = \frac{1}{(x-a)^2}\left[(x - \beta_{n+1} - d_n)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (e_n - \gamma_{n+1})L_n^{(\alpha)}(x)\right]. \tag{22}$$

Por outro lado,

$$e_n - \gamma_{n+1} = \frac{\|L_{n+1}^{(\alpha)}\|^2}{\|L_n^{(\alpha)}\|^2}\left(\frac{K_{n+1}(a,a)}{K_n(a,a)} - 1\right) > 0. \tag{23}$$

Calculando $L_n^{**(\alpha)}(a;x)$ nos zeros $x_{n+1,k}$, de (22) e (23), obtemos

$$Sign\left[L_n^{**(\alpha)}(a; x_{n+1,k})\right] = Sign\left[L_n^{(\alpha)}(x_{n+1,k})\right], \ k = 1, \ldots, n+1. \tag{24}$$

Assim, de (24) e da propriedade de entrelaçamento dos zeros de $L_n^{(\alpha)}(x)$ e $L_{n+1}^{(\alpha)}(x)$, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4 *As desigualdades*

$$x_{n+1,1} < x_{n,1}^{**} < x_{n+1,2} < x_{n,2}^{**} < \cdots < x_{n+1,n} < x_{n,n}^{**} < x_{n+1,n+1} \tag{25}$$

são válidas para todo $n \in \mathbb{N}$.

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Referências

[1] R. Álvarez-Nodarse, F. Marcellán, and J. Petronilho, WKB Approximation and Krall-type Orthogonal Polynomials, *Acta Appl. Math.*, 54 (1998) 27–58.

[2] Álvarez-Nodarse, R., Moreno-Balcázar, J. J. Asymptotic properties of generalized Laguerre orthogonal polynomials, *Indag. Math.*, 15 (2004) 151–165.

[3] C. F. Bracciali, D. K. Dimitrov, and A. Sri Ranga, Chain sequences and symmetric generalized orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, 143 (2002) 95–106.

[4] T. S. Chihara, "An Introduction to Orthogonal Polynomials" Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.

[5] D. K. Dimitrov, F. Marcellán, and F. R. Rafaeli, Monotonicity of zeros of Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials, *J. Math. Anal. Appl.*, 368 (2010) 80–89.

[6] D. K. Dimitrov, M. V. Mello, and F. R. Rafaeli, Monotonicity of zeros of Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials, *Appl. Numer. Math.*, 60 (2010) 263–276.

[7] H. Dueñas, and F. Marcellán, Laguerre-Type orthogonal polynomials. Electrostatic interpretation, *Int. J. Pure and Appl. Math.* 38 (2007), 345–358.

[8] R. Koekoek, "Generalizations of classical Laguerre polynomials and some q-analogues", Tese de Doutorado, Techn. Univ. of Delft, The Netherlands, 1990.

[9] R. Koekoek and H. G. Meijer, A generalization of Laguerre polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, 24 (1993) 768–782.

[10] T. H. Koornwinder, Orthogonal polynomials with weight function $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}+M\delta(x+1)+N\delta(x-1)$, *Canad. Math. Bull.*, 27 (1984) 205–214.

[11] G. Szegő, "Orthogonal Polynomials", Amer. Math. Soc. Coll. Publ, Vol. 23, 4th ed., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.