ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3 PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010 XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

INTRODUÇÃO À FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE RUSSELL: *ALGUNS ASPECTOS MATEMÁTICOS*

Juliana R. Junqueira* **Inocêncio F. Balieiro Filho****
Depto de Matemática, FEIS, UNESP,
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: julianajun@aluno.feis.unesp.br, balieiro@mat.feis.unesp.br

RESUMO

Uma das filosofias da Matemática surge com a escola logicista, idealizada e organizada, no *Principia Mathematica*, por Whitehead e Russell. Em seu planejamento filosófico, Russell propôs um minucioso programa logicista que havia esboçado em seu *The Principles of Mathematics*, cuja finalidade era "demonstrar que a matemática pura trata exclusivamente de conceitos possíveis de definir com um pequeno número de conceitos lógicos fundamentais, (...) que todas as suas proposições se podem deduzir de um número muito pequeno de princípios lógicos fundamentais (...) e explicar os conceitos fundamentais que se aceitam em matemática como susceptíveis de definição". Para tal intuito, Russell fundamentou-se nas concepções de lógica matemática propostas por Peano e nas idéias sugeridas por Frege. Desse modo, os objetivos do presente trabalho são analisar, discutir e formalizar conceitos matemáticos introduzidos de modo informal por Russell, em sua obra *Introdução à Filosofia da Matemática*, com o propósito de conceituar filosoficamente número real, números cardinais e ordinais, séries infinitas, limites e continuidades de funções.

Para a elaboração deste trabalho adotou-se uma metodologia de pesquisa em História da Matemática, que possibilitou um processo investigativo coerente ao pesquisar, compreender, analisar e interpretar as fontes históricas secundárias para produzir um julgamento exequível do tema pesquisado e a apresentação desses resultados numa exposição harmônica.

Para estabelecer o conceito de indução matemática, Russell, em sua obra *Introdução à Filosofia da Matemática*, no capítulo III, primeiramente, introduz, sem definir filosoficamente, num primeiro momento, os três termos: "0", "número" e "sucessor".

Intuitivamente podemos atingir qualquer número especificado, por exemplo, o número 30.000. Primeiro definimos "1" como o sucessor de "0", depois definimos "2" como o sucessor de "1" e assim por diante. Assim, conforme Russell:

No caso de um número especificado, tal como 30.000, a prova de que poderemos atingi-lo, procedendo passo a passo dessa maneira, pode ser feita, se tivermos a paciência necessária, pela experiência real: podemos continuar até atingirmos realmente 30.000. Mas, conquanto o método experimental seja disponível para cada número natural, dele não nos podemos valer para provar a proposição geral de que todos esses números podem ser atingidos dessa maneira. Haverá algum outro modo pelo qual isso possa ser feito?

Quais os números que podem ser atingidos sendo dados os termos "0" e "sucessor"? Haverá algum meio pelo qual possamos definir toda a classe de tais números? (Russell, 1966, p.26)

Neste contexto, Monteiro, descreve, respectivamente, a formulação matemática do princípio da boa ordenação, do princípio de indução matemática e o teorema de indução:

<u>*Princípio da boa ordenação*</u>*: Todo subconjunto não-vazio $S \subset IN$ possui um elemento mínimo.*

<u>*Princípio de indução matemática*</u>: *Seja S um subconjunto do conjunto IN dos inteiros positivos ($S \subset IN$) que satisfaz as duas seguintes condições: 1 pertence a S ($1 \in S$); e para todo inteiro, positivo k, se $k \in S$, então $k + 1 \in S$. Nestas condições, S é o conjunto IN dos inteiros positivos: $S = IN$.*

<u>*Teorema de Indução*</u>: *Seja $P(n)$ uma proposição associada a cada inteiro positivo n e que satisfaz às duas seguintes condições: $P(1)$ é verdadeira; e para todo inteiro positivo k, se $P(k)$ é*

* Aluna de Iniciação Científica
** Professor Orientador

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

verdadeira, então P(k + 1) também é verdadeira. Nestas condições, a proposição P(n) é verdadeira para todo inteiro positivo n.

Ao definir ordem, Russell, no capítulo IV, tece o seguinte comentário:

Devemos, agora, considerar o caráter serial dos números naturais na ordem 0, 1, 2, 3, ... Normalmente, pensamos nos números como se apresentados nessa ordem, e constitui parte essencial do trabalho de analisar os nossos dados buscar uma definição de "ordem" ou "série" em termos lógicos. (Russell, 1966, p.35)

Frequentemente, segundo Alencar, dizemos, de dois objetos x, y, que estão "relacionados" de algum modo. Por exemplo, se $x, y \in IR$, poderíamos ter "$x < y$". Esse é um exemplo de uma sentença da forma "xRy" - x "está na relação R com" y; mas, ao passo que podemos saber o que o exemplo específico de R acima significa, o que entendemos em geral por uma relação R? Refletindo, podemos dar uma definição como segue. Em princípio, saberíamos tudo o que precisamos saber sobre uma relação R se conhecêssemos todos os pares x, y tais que xRy. Assim, damos a seguinte definição matemática de relação e relação de ordem: Sejam A e B dois conjuntos e seja $A \times B$ o produto cartesiano de A por B. Todo subconjunto R de $A \times B$ é denominado relação de A em B. Diz-se que uma relação R sobre um conjunto A é uma relação de ordem quando as condições estão verificadas – para todo $x \in A$, tem-se xRx; quaisquer que sejam x e y em A, se xRy e se yRx, então $x = y$; quaisquer que sejam x, y e z em A, se xRy e se yRz, então xRz.

Em seguida, Russell, enuncia os três tipos de relações ordenadoras:

1) Se x precede y, y não deve também preceder x. Uma relação que tenha essa primeira propriedade é chamada assimétrica.

2) Se x precede y e y precede z, x deve preceder z. Uma relação que tenha a nossa segunda propriedade é chamada transitiva.

3) Dados quaisquer dois termos da classe a ser ordenada, deve haver um que precede e outro que sucede. Uma relação que tenha essa terceira propriedade é chamada conexa. (Russell, 1966, p.37)

Por fim, esboçamos as seguintes definições matemáticas das três relações de ordem: anti-simétrica - quaisquer que sejam x e y em A, se xRy e se yRx, então $x = y$; transitiva - quaisquer que sejam x, y e z em A, se xRy e se yRz, então xRz; e, conexa - quaisquer que sejam x e y (distintos) em A, então xRy ou yRx.

Primeiramente, queremos deixar explícito que este estudo não tem por objetivo fazer uma crítica à forma como foram expostos os conceitos matemáticos, por Russell, em sua obra *Introdução à Filosofia da Matemática*. De fato, no prefácio desse tratado, Russell esclarece que seu texto destina-se aos principiantes e, por isso, ele não utiliza um formalismo puramente lógico para expressar suas idéias e as questões inquietantes presentes na Filosofia da Matemática. Apesar disso, em seu tratado *Principia Mathematica*, Russell e Whitehead estabeleceram como características essenciais da lógica matemática os seguintes pressupostos: eliminação de considerações psicológicas, utilização da lógica em si mesmo e formalismo à maneira de Frege e Peano.

Ainda que a Matemática seja considerada uma ciência exata, a Filosofia da Matemática procura responder às questões relativas aos seus fundamentos, ou seja, num processo regressivo, investiga as estruturas básicas e fundamentais que servem de alicerce para essa ciência. Com efeito, procuramos neste trabalho explicitar os conceitos e as propriedades de ordem em termos matemáticos precisos e salientar a importância desses para o estudo de questões filosóficas das partes iniciais da Lógica Matemática.

Palavras Chave: Russell; Filosofia; Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] Alencar Filho, E. *Relações Binárias*. São Paulo: Nobel, 1984.

[2] Monteiro, L. H. J. *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1971.

[3] Russell, B. *Introdução à Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1966