

# Injetividade do Funcional Dirichlet-Neumann Elítico via Matemática Intervalar

R. MENDOZA<sup>1</sup>, Departamento de Matemática, CCEN - UFPE, 50740-540 Cidade Universitária, Recife, PE, Brasil.

J. ROJAS<sup>2</sup>, Departamento de Matemática, CCEN - Campus I - UFPB, 58051-900 Cidade Universitária, João Pessoa, PB, Brasil.

M. CAMPOS<sup>3</sup>, R. BARRETO<sup>4</sup>, Centro de Informática - UFPE, 50732-970 Cidade Universitária, Recife, PE, Brasil.

**Resumo.** O estudo da injetividade do Funcional Dirichlet-Neumann Elítico, no anel de raios 1 e 2, está condicionado à existência de uma única solução, de período  $2\pi$ , para a equação  $(e^{2y} - 1)\lambda = 2y'' - (y')^2$ , onde  $\lambda$  é uma função que só depende de  $r > 1$ , raio externo do anel  $A_r$ . Se  $\lambda \geq 0$  mostra-se que a única solução dessa equação é  $y = 0$  para a condição inicial  $y(0) = 0$ ; para  $\lambda < 0$  também é possível encontrar as soluções. O objetivo deste trabalho é estudar, usando a matemática intervalar, para que valores de  $r > 1$ , a função  $\lambda$  é positiva, nula ou negativa. Como conclusões do mesmo, constatou-se que a função  $\lambda$  é não negativa para  $1 < r \leq 4,9202261876221005$ , e negativa para  $r \geq 4,9202261876221014$ .

**Palavras-chave.** Funcional Dirichlet-Neumann Elítico, injetividade, matemática intervalar.

## 1. Introdução

A injetividade do Funcional Dirichlet-Neumann (D-N) Elítico, no anel de raios 1 e 2, está condicionada à existência de uma única solução, de período  $2\pi$ , para a Equação

$$(e^{2y} - 1)\lambda = 2y'' - (y')^2, \quad (1.1)$$

onde  $\lambda$  é uma função que só depende de  $r$  (cf. (3.11)). Se  $\lambda \geq 0$ , o Teorema 3.2 mostra que a única solução de (1.1) é  $y = 0$  para a condição inicial  $y(0) = 0$ . Por outro lado, se  $\lambda < 0$  também é possível encontrar as soluções de (1.1).

O objetivo deste trabalho é estudar a injetividade do funcional Dirichlet-Neumann elítico não somente do ponto de vista teórico como também do computacional através da matemática intervalar. Para tanto, este trabalho está organizado como

---

<sup>1</sup>ramon@dmate.ufpe.br

<sup>2</sup>jacq@mat.ufpb.br

<sup>3</sup>mac@cin.ufpe.br

<sup>4</sup>rmb3@cin.ufpe.br

se segue. A Seção 2. introduz o funcional Dirichlet-Neumann elítico. A Seção 3. mostra resultados sobre a injetividade do funcional D-N no caso de variedades compactas com fronteira de dimensão 2 e como a comparação dos núcleos de Schwartz dos operadores associados às métricas  $F^*(e^{2\varphi}u_r)$  e  $u_r$  (cf. (3.2)) implica na Equação (1.1). A Seção 4. mostra, computacionalmente, que a função  $\lambda$  é não negativa para  $1 < r \leq 4,9202261876221005$ , e negativa para  $r \geq 4,9202261876221014$  através da matemática intervalar. E a última seção é a das conclusões.

## 2. O Funcional Dirichlet-Neumann Elítico

Sejam  $\Omega$  uma variedade compacta com fronteira  $\partial\Omega$  e  $\mathcal{M}(\Omega)$  o espaço de todas as métricas Riemannianas sobre  $\Omega$ . Denotemos por  $\mathcal{O}_p(\partial\Omega)$  o espaço de todos os operadores lineares sobre  $C^\infty(\partial\Omega)$ .

O funcional Dirichlet-Neumann,  $\Lambda : \mathcal{M}(\Omega) \rightarrow \mathcal{O}_p(\partial\Omega)$ , associa a cada métrica  $g \in \mathcal{M}(\Omega)$  o operador  $\Lambda_g$  sobre  $C^\infty(\partial\Omega)$  definido da seguinte forma:

**Definição 2.1.** Para cada  $\phi \in C^\infty(\partial\Omega)$  seja  $u \in C^\infty(\Omega)$  a única solução da equação  $\Delta_g u = 0$  tal que  $u|_{\partial\Omega} = \phi$  onde  $\Delta_g$  denota o operador de Laplace-Beltrami associado à métrica  $g$ . Assim,

$$\Lambda_g : \begin{array}{ccc} C^\infty(\partial\Omega) & \longrightarrow & C^\infty(\partial\Omega) \\ \phi & \longmapsto & du(\nu_g) \end{array}$$

onde  $\nu_g$  denota o campo de vetores normais unitários interior associado à métrica  $g$ .

Em [13] e [9] é mostrado que  $\Lambda_g$  é um operador pseudo-diferencial elítico. Mais detalhes sobre a definição de  $\Lambda_g$  podem ser encontrados em [3].

### 2.1. O Espaço de Órbitas $\mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{D}_0 \rtimes \mathcal{C}_0^\infty$

Sejam  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega)$  o grupo dos difeomorfismos de  $\Omega$  e  $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  o grupo abeliano das funções infinitamente diferenciáveis sobre  $\Omega$ . Seja  $\mathcal{D} \rtimes \mathcal{C}^\infty$  o produto semi-direto de  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}^\infty$ , com o produto  $\bullet$  dado por:

$$(F, \alpha) \bullet (H, \beta) = (F \circ H, \beta \circ F^{-1} + \alpha).$$

Observa-se que é possível definir a seguinte ação a direita do grupo  $\mathcal{D} \rtimes \mathcal{C}^\infty$  sobre  $\mathcal{M}(\Omega)$ :

$$g \cdot (F, \varphi) = F^*(e^{2\varphi}g).$$

Sejam  $\mathcal{D}_0$  o subgrupo de  $\mathcal{D}$  formado pelos difeomorfismos cuja restrição a  $\partial\Omega$  é a identidade e  $\mathcal{C}_0^\infty$  o subgrupo de  $\mathcal{C}^\infty$  das funções cuja restrição a  $\partial\Omega$  é zero. Verifica-se que  $\mathcal{D}_0 \rtimes \mathcal{C}_0^\infty$  é um subgrupo normal de  $\mathcal{D} \rtimes \mathcal{C}^\infty$  que age pela direita sobre  $\mathcal{M}(\Omega)$  de maneira análoga ao grupo  $\mathcal{D} \rtimes \mathcal{C}^\infty$ , e que o funcional de Dirichlet-Neumann é constante sobre o espaço de órbitas determinado por esta ação. Araújo-Gómez-Mendoza apresentam em [2] a seguinte conjectura:

**Conjectura.** Para toda variedade compacta com fronteira  $\Omega$ , o funcional de Dirichlet-Neumann  $\Lambda$ , induz um funcional  $\bar{\Lambda}$  sobre  $\mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{D}_0 \rtimes \mathcal{C}_0^\infty$  que é injetivo.

### 3. Injetividade do D-N no caso 2-dimendional

Seja  $\Omega$  uma variedade compacta com fronteira de dimensão 2. Para cada métrica  $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ , denota-se por  $\mathcal{N}_g$  o núcleo de Schwartz do operador  $\Lambda_g$ .

Fixada uma métrica  $g \in \mathcal{M}(\Omega)$  e um campo  $E$  de vetores tangentes unitários em relação a métrica  $g$  restrita à fronteira de  $\Omega$ . Então para cada  $F \in \mathcal{D}$  no que se segue denotaremos por  $F'(y)$  a única função a valores reais sobre  $\partial\Omega$  tal que  $F_*E = F'E \circ F$ .

Os resultados a seguir foram provados por Gómez-Mendoza em [6].

**Lema 3.1.** *Para toda métrica  $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ ,  $F \in \mathcal{D}$  e  $\phi \in \mathcal{C}^\infty$  tem-se:*

- (1)  $\Lambda_{F^*e^{2\phi}g} = F^* \circ e^{-\phi} \circ \Lambda_g \circ F^{-1*}$  e
- (2)  $\mathcal{N}_{F^*e^{2\phi}g}(x, y) = e^{-\phi \circ F(x)} \mathcal{N}_g(F(x), F(y)) F'(y)$ , onde a função  $F'(y)$  depende da métrica  $g \in \mathcal{M}$ .

Uma consequência deste lema é o corolário a seguir.

**Corolário 3.1.** *Se  $\Lambda_{F^*e^{2\phi}g} = \Lambda_g$  então  $e^{-\phi \circ F(x)} = F'(x)$  para  $x \in \partial\Omega$ .*

A seguir daremos uma descrição do núcleo de Schwartz para uma métrica fixada  $u_r$  no anel  $A_r$ . Na Subseção 3.2. será visto que para cada  $r > 1$  existe um difeomorfismo  $H_r$  que permitirá relacionar duas métricas quaisquer no anel  $A_{1,2}$  com a métrica  $u_r$  do anel  $A_r$ .

#### 3.1. O Núcleo de Schwartz para Métrica $u_r$ no Anel $A_r$

Seja o anel  $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{r} < \|z\| < r\}$ , com  $r > 1$ . Denota-se por  $\gamma_{\frac{1}{r}}$  e  $\gamma_r$ , respectivamente, as fronteiras interna e externa do anel  $A_r$ . Seja  $u_r$  a métrica conforme a métrica Euclidiana sobre  $A_r$  definida em coordenadas polares por:

$$u_r = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} \right) (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2) \quad (3.1)$$

onde  $z = \rho e^{i\theta}$  com  $\frac{1}{r} \leq \rho \leq r$  e  $0 < \theta < 2\pi$ .

Araújo et al. [2] usando resultados em [4], provaram o seguinte lema:

**Lema 3.2.** *Para  $u_r$  em (3.1) tem-se em  $\gamma_r$  e  $\gamma_{\frac{1}{r}}$ , respectivamente:*

- (1)  $\mathcal{N}_g(re^{i\theta}, re^{i\alpha}) = \underbrace{H(re^{i\theta}, re^{i\alpha})}_{\text{classe } c^\infty} - \underbrace{\frac{2r^2}{(1+r^2)^2} \cdot \frac{1}{1-\cos(\theta-\alpha)}}_{\text{parte singular}}$ ,
- (2)  $\mathcal{N}_g(r^{-1}e^{i\theta}, r^{-1}e^{i\alpha}) = \underbrace{H(r^{-1}e^{i\theta}, r^{-1}e^{i\alpha})}_{\text{classe } c^\infty} - \underbrace{\frac{2r^2}{(1+r^2)^2} \cdot \frac{1}{1-\cos(\theta-\alpha)}}_{\text{parte singular}}$ ,

onde  $H(re^{i\theta}, re^{i\alpha}) = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} \left\{ B(\theta, \alpha) - \frac{r^{-2} \cos(\theta-\alpha) + r^2 \cos(\theta-\alpha) + 2}{(r^{-2} + 2\cos(\theta-\alpha) + r^2)^2} \right\}$  com  $B(\theta, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n(\theta - \alpha)$  e  $b_n = n \cdot \left( \frac{(r^n - (-r)^{-n})^2}{r^n(r^n + (-r)^{-n})} - 1 \right)$ .

### 3.2. Conexão entre os Anéis $A_{1,2}$ e $A_r$

Considere o anel  $A_{1,2} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < \|z\| < 2\}$ , e, para cada  $r > 1$ , o difeomorfismo

$$\begin{aligned} H_r : A_{1,2} &\rightarrow A_r \\ \rho e^{i\theta} &\mapsto \left( \frac{r^2-1}{r}(\rho-2) + r \right) e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Assim fixada a métrica  $u_r$  em (3.1), temos a família  $\{U_r = H_r^* u_r\}_{r>1}$  de métricas em  $A_{1,2}$ . Em [2] é indicado que:

**Teorema 3.1.** *Seja  $g \in \mathcal{M}(A_{1,2})$ . Então existe  $F \in \mathcal{D}^+(A_{1,2})$  e  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(A_{1,2})$  tal que  $g = F^*(e^{2\varphi} U_r)$  para algum  $r > 1$ .*

### 3.3. A Injetividade de D-N e (1.1)

Para conveniencia do leitor interessado no assunto segue-se um esboço de como Araújo et al. [2] chegam à equação  $(e^{2y}-1)\lambda = 2y'' - (y')^2$  ao estudar a injetividade do funcional de Dirichlet-Neumann no anel  $A_{1,2}$ .

Sejam  $g_1$  e  $g_2$  métricas no anel  $A_{1,2}$  tais que  $\Lambda_{g_1} = \Lambda_{g_2}$ . Segue-se do Teorema 3.1 que  $g_1 = F_1^* e^{2\varphi_1} U_{r_1}$  e  $g_2 = F_2^* e^{2\varphi_2} U_{r_2}$ . Portanto,

$$\Lambda_{F^*(e^{2\varphi} u_r)} = \Lambda_{u_r}, \quad (3.2)$$

com  $F \in \mathcal{D}(A_r)$  e  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(A_r)$  obtidas a partir de  $F_1, F_2, \varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Aplicando o Lema 3.1 tem-se que:

$$\mathcal{N}_{F^* e^{2\varphi} u_r}(x, y) = e^{-\varphi \circ F(x)} \mathcal{N}_{u_r}(F(x), F(y)) F'(y) = \mathcal{N}_{u_r}(x, y).$$

Por outra parte definindo  $\mathcal{H}(r, \theta, \alpha)$  por:

$$\mathcal{H}(r, \theta, \alpha) = \left\{ H(re^{i\theta}, re^{i\alpha}) - \frac{2r^2}{(1+r^2)^2} \frac{1}{1-\cos(\theta-\alpha)} \right\}.$$

e representando  $x = re^{i\theta}$ ,  $y = re^{i\alpha}$  e  $F(re^{i\theta}) = re^{if(\theta)}$ , segue-se do Lema 3.2 que

$$e^{-\varphi \circ F(re^{i\theta})} \mathcal{H}(r, f(\theta), f(\alpha)) f'(\alpha) = \mathcal{H}(r, \theta, \alpha). \quad (3.3)$$

Além disso, do Corolário 3.1:

$$e^{-\varphi \circ F} = f' \quad (3.4)$$

na fronteira. Assim tem-se de (3.3) e (3.4) que

$$\mathcal{H}(r, f(\theta), f(\alpha)) f'(\alpha) f'(\theta) = \mathcal{H}(r, \theta, \alpha). \quad (3.5)$$

Resulta de (3.5) que as soluções de (1.1) formam um grupo.

Assim de (3.5) temos

$$\begin{aligned} H(re^{if(\theta)}, re^{if(\alpha)}) f'(\alpha) f'(\theta) - H(re^{i\theta}, re^{i\alpha}) = \\ \frac{2r^2}{(1+r^2)^2} \underbrace{\left\{ \frac{f'(\alpha) f'(\theta)}{1-\cos(f(\theta)-f(\alpha))} - \frac{1}{1-\cos(\theta-\alpha)} \right\}}_{(*)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

O lado direito da Equação (3.6) é a parte  $\mathcal{C}^\infty$  do núcleo de Schwartz. Fazendo  $\alpha \rightarrow \theta$  obtém-se

$$H(r, r)\{[f'(\theta)]^2 - 1\}. \quad (3.7)$$

Fazendo o desenvolvimento de Taylor para a expressão (\*) no lado esquerdo da Equação (3.6), para  $\alpha \rightarrow \theta$ , obtém-se

$$\frac{1}{3!} \left\{ [f'(\theta)]^2 - 1 + 2\mathcal{S}(f) \right\}, \quad (3.8)$$

onde  $\mathcal{S}(f) = \left[ \frac{f''}{f'} \right]' - \frac{1}{2} \left[ \frac{f''}{f'} \right]^2$  é a derivada Schwarziana de  $f$  (veja Tabachnikov [12]).

Logo, de (3.7) e (3.8) temos que

$$\{[f'(\theta)]^2 - 1\} \left\{ 3! \frac{(1+r^2)^2}{r^2} H(r, r) - 1 \right\} = 2\mathcal{S}(f). \quad (3.9)$$

Seja

$$\lambda(r) = 3! \frac{(1+r^2)^2}{r^2} H(r, r) - 1. \quad (3.10)$$

Segue-se do Lema 3.2 que

$$\lambda(r) = \frac{4!}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \frac{r^2}{(1+r^2)^2} \right\} - 1, \quad (3.11)$$

onde

$$b_n = n \left\{ \frac{-3(-1)^n + \frac{1}{r^{2n}}}{r^{2n} + (-1)^n} \right\}. \quad (3.12)$$

Segue-se das Equações (3.9) e (3.10) que

$$\{[f'(\theta)]^2 - 1\} \lambda(r) = 2\mathcal{S}(f). \quad (3.13)$$

### 3.4. Soluções de (3.13) para $\lambda \geq 0$

Como  $f(\theta + 2\pi) = f(\theta) + 2\pi$ , tem-se que

$$\begin{aligned} (i) \quad & \int_0^{2\pi} f'(t) dt = f(2\pi) - f(0) = 2\pi \\ (ii) \quad & f'(\theta + 2\pi) = f'(\theta). \end{aligned}$$

Logo,  $f'(\theta)$  é uma função de período  $2\pi$ . Após fazer a mudança de variáveis  $y(\theta) = \ln(f'(\theta))$ , a Equação (3.13) torna-se

$$2y'' - [y']^2 = \{e^{2y} - 1\} \lambda. \quad (3.14)$$

Note que  $y(\theta) = 0$  é uma solução da Equação (3.14). De fato, verificaremos a seguir que esta é a única solução satisfazendo  $y(0) = 0$ .

Doravante, neste trabalho  $\lambda(r) \geq 0$  será denominada de condição (i).

**Teorema 3.2.** *Se  $\lambda \geq 0$  então  $y(\theta) = 0$  é a única solução da Equação (3.14) tal que  $y(0) = 0$ .*

*Demonstração.* Sabe-se que  $e^y = f'$ , assim de (i) tem-se  $\int_0^{2\pi} e^{y(t)} dt = 2\pi$ . Considere o seguinte produto interno em  $\mathcal{C}^\infty([0, 2\pi])$ :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^{2\pi} f_1 f_2 dt.$$

Então aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz a  $f_1(t) = e^{y(t)}$  e  $f_2(t) = 1$  tem-se

$$2\pi = \int_0^{2\pi} e^{y(t)} dt \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} e^{2y(t)} dt} \cdot \sqrt{2\pi}, \quad (3.15)$$

ou seja,

$$2\pi \leq \int_0^{2\pi} e^{2y(t)} dt. \quad (3.16)$$

Por outro lado, integrando entre 0 e  $2\pi$  a Equação (3.14) e observando que  $\int_0^{2\pi} y''(t) dt = y'(2\pi) - y'(0) = 0$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^{2\pi} \{e^{2y(t)} - 1\} dt &= - \int_0^{2\pi} [y'(t)]^2 dt. \\ \lambda (\int_0^{2\pi} e^{2y(t)} dt - 2\pi) &= - \int_0^{2\pi} [y'(t)]^2 dt \leq 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Se  $\lambda$  for positiva segue-se de (3.16) e (3.17) que  $\int_0^{2\pi} e^{2y(t)} dt = 2\pi$ . Assim vale a igualdade na desigualdade (3.15). Portanto,  $e^{y(t)} = c \cdot 1$  para algum  $c \in \mathbb{R}$  e como  $1 = e^{y(0)} = c \cdot 1 = c$ , conclui-se que  $e^{y(t)} = 1$ . Portanto,  $y(t) = 0$ .

Se  $\lambda = 0$ , segue-se de (3.17) que  $\int_0^{2\pi} [y'(t)]^2 dt = 0$ , assim tem-se que  $[y'(t)]^2 = 0$ , conseqüentemente  $y'(t) = 0$ . Logo,  $y(t) = c$  para alguma constante  $c \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $y(t) = 0$  desde que  $y(0) = 0$ .  $\square$

Como  $y(t) = 0$  é a única solução da Equação (3.14), tem-se  $f'(\theta) = 1$ . Logo  $F$  (cf (3.4)) restrita à fronteira exterior é igual a uma rotação, desde que  $F(re^{i\theta}) = re^{if(\theta)}$ , assim a restrição à fronteira interior, ainda satisfaz a equação porém não é possível fixar o ponto  $1/r$ .

## 4. A Injetividade do Funcional D-N Elítico via Estudo Computacional de $\lambda$

O Teorema 3.2 estabelece uma condição para a existência de solução única para a Equação (3.14), sempre que a condição (i) for válida. Nesta seção serão determinados intervalos onde a condição (i) é verificada e onde não é.

### 4.1. Convergência de $\lambda(r)$

Seja

$$\lambda_k(r) = \frac{4!}{2} \left\{ \sum_{n=1}^k b_n(r) - \frac{r^2}{(1+r^2)^2} \right\} - 1, \quad (4.1)$$

onde  $k$  é utilizado no truncamento da série  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r)$  para a computação da mesma. Através de (4.1) determinou-se uma aproximação para (3.11) e, com isso, testou-se a condição (i) com  $r$  variando no intervalo  $(1, +\infty)$ , segundo descrito na Subseção 4.2.. Para tal, foi realizado o computo de  $\lambda_k(r)$  com a aritmética de ponto flutuante seguido da validação dos resultados através da aritmética intervalar com exatidão máxima [10], [11], [8]. Dado o desempenho e tradição na comunidade científica, a linguagem de programação C++ e a extensão C-XSC [7] – uma biblioteca para o desenvolvimento de algoritmos numéricos com controle automático do erro – foram escolhidas.

Valores obtidos para  $\lambda_k(r)$  usando ponto flutuante de precisão dupla (`real` no C-XSC) aparecem na Tabela 1. Como pode-se observar, não há diferença perceptível

Tabela 1: Valores de  $\lambda_k(r)$ 

$r$	$k$	$\lambda_k(r)$
2	1	10,0799999999999983
2	2	5,9329411764705871
2	3	7,6561554621848726
2	4	7,0965737501226158
2	29	7,2318213655769936
2	30	7,2318213655769927
2	500	7,2318213655769927

pela máquina para  $k > 29$ , fixando-se  $r = 2$ . Essa velocidade de convergência ocorre para todo  $r > 1$  em razão do decrescimento exponencial de (3.12) quando  $n$  cresce, implicando um esforço computacional pequeno (30 iterações se  $r = 2$ ) no cálculo de (3.11) uma vez que não é necessário  $k \rightarrow \infty$  para  $\lambda_k(r) \approx \lambda(r)$ . Um outro exemplo aparece na Tabela 2. Nesse caso, não há diferença entre os

Tabela 2: Mais valores de  $\lambda_k(r)$ 

$r$	$k$	$\lambda_k(r)$
1,1	10	481,8314580818556578
1,1	29	540,1537143859777643
1,1	100	538,2934560312634176
1,1	201	538,2934646559746170
1,1	202	538,2934646559745033
1,1	1000	538,2934646559745033

valores de  $\lambda_k(r)$  para  $k > 201$ , fixando-se  $r = 1,1$ , sendo, então, menor a velocidade de convergência mas, ainda assim, rápida o suficiente para tornar a computação viável. Essa substancial diminuição na taxa de convergência ocorre pois o termo  $r^{2n}$  do denominador de (3.12) cresce de forma mais lenta quando  $r$  se aproxima de 1, concluindo-se, portanto, que quanto maior o valor de  $r$  mais rapidamente (3.11) converge.

## 4.2. Verificação da condição $\lambda(r) \geq 0$

Da Subseção 4.1. torna-se trivial a verificação de (i) para dado  $r$ . Com efeito, tomando  $r = 1,00001 + h\Delta r$ ,  $h = 0, \dots, 10^5$ ,  $\Delta r = 1$ ,  $k = 30$  e computando (4.1) observa-se inversão de sinal em  $4,00001 \leq r \leq 5,00001$  (como na Tabela 3).

Tabela 3: Inversão de sinal de  $\lambda_k(r)$

$r$	$\lambda_k(r)$
3,00001	1,8413746491051708
4,00001	0,5301795392204616
5,00001	-0,0321840114225210
6,00001	-0,3307322281020401
7,00001	-0,5091765887317801

O intervalo onde ocorre a inversão do sinal é de especial interesse desde que é uma fronteira para a condição (i). Para estudá-lo utilizou-se o Algoritmo  $A_1$ :

### Algoritmo $A_1$

1. Sejam  $I = [4,00001; 5,00001]$ ,  $\epsilon = 10^{-1}$ ,  $k = 30$  e  $a$  variando em  $I$  com passo  $\epsilon$ .
2. Faça  $I := \{r \in I \mid a \leq r \leq a + \epsilon, \lambda_k(a) \geq 0, \lambda_k(a + \epsilon) \leq 0\}$
3. Faça  $\epsilon := 10^{-1}\epsilon$
4. Se  $\epsilon \geq 10^{-15}$ , volte ao Passo 2

A checagem  $\epsilon \geq 10^{-15}$  no Passo 4 do Algoritmo  $A_1$  é necessária porque, como o sistema de ponto flutuante é discreto, vai existir um ponto em que  $\epsilon$  será tão pequeno que não conseguirá diferenciar-se de 0 nas operações, e esse ponto aparece para  $\epsilon < 10^{-15}$  pois 15 é o número máximo de dígitos significativos usando-se precisão dupla. A partir do Algoritmo  $A_1$ , chegou-se ao menor intervalo detectável pela máquina onde ocorre a inversão de sinal como mostrado na Tabela 4.

Tabela 4: Menor intervalo detectável onde há inversão do sinal de  $\lambda_k(r)$

$r$	$\lambda_k(r)$
4,9202261876221005	0,0000000000000005
4,9202261876221014	-0,0000000000000003

Portanto, para  $1 < r \leq 4,9202261876221005$  a condição (i) constata-se verdadeira, e falsa para  $4,9202261876221014 \leq r \leq 10^5$ . Além disso, aplicando o Teorema de Bolzano (veja [1]), concluímos que existe raiz para  $\lambda(r)$  no intervalo  $[4,9202261876221005; 4,9202261876221014]$ .

## 4.3. Validação dos resultados utilizando matemática intervalar

Após os cálculos efetuados na Subseção 4.2., processou-se a validação dos resultados com a aritmética intervalar de exatidão máxima [10], [11], [8]. A aritmética intervalar é uma ferramenta matemática para a solução de problemas relacionados com

erros numéricos baseada em um sistema algébrico formado por todos os intervalos fechados da reta real e por operações definidas sobre ele. Ao invés de algoritmos numéricos usuais, usam-se algoritmos intervalares que produzem intervalos contendo a resposta verdadeira como resultado. A exatidão máxima, por outro lado, fornece um método axiomático para as operações aritméticas realizadas em computadores que captura propriedades essenciais associadas com arredondamentos.

A validação dos resultados foi obtida através do computo de (4.1) como na Subseção 4.2. de maneira intervalar, com  $r$  substituído pelo intervalo degenerado  $[r; r]$  – usando o toolkit para software numérico C-XSC [7] – seguido da verificação da pertinência dos resultados de ponto flutuante nos respectivos resultados intervalares. A seguir aparece o correspondente intervalar para a Tabela 3.

Tabela 5: Inversão de sinal de  $\lambda_k(R)$  intervalar

$R = [r; r]$	$k$	$\lambda_k(R)$
[3,00001; 3,00001]	30	[1,8413746491051363; 1,8413746491052048]
[4,00001; 4,00001]	30	[0,5301795392204420; 0,5301795392204807]
[5,00001; 5,00001]	30	[-0,0321840114225346; -0,0321840114225081]
[6,00001; 6,00001]	30	[-0,3307322281020495; -0,3307322281020302]
[7,00001; 7,00001]	30	[-0,5091765887317873; -0,5091765887317726]

Como pode-se observar, todos os valores para  $\lambda_k(r)$  da Tabela 3 pertencem aos intervalos,  $\lambda_k(R)$ , mostrados na Tabela 5. O mesmo ocorre para todos os valores computados neste trabalho e, conseqüentemente, o resultado obtido é confiável.

## 5. Conclusões

Neste trabalho foi estabelecida a conexão entre a existência de solução única e identicamente nula para a Equação (1.1) e a injetividade do funcional Dirichlet-Neumann em um anel de raios 1 e 2, desde que a partir do estudo da injetividade deste funcional na Seção 3.3. obtemos a Equação (1.1) e pela sua vez o conhecimento das soluções desta equação irá fornecer informações sobre a injetividade do funcional em estudo. Além disso, o Teorema 3.2 determinou uma condição para a existência dessa solução. Posteriormente, através do suporte computacional, essa condição constatou-se verdadeira para  $1 < r \leq 4,9202261876221005$ , e falsa para  $4,9202261876221014 \leq r \leq 10^5$  e, usando aritmética intervalar de exatidão máxima, validou-se os resultados concluindo sua confiabilidade. Dessa forma, o objetivo do trabalho foi alcançado.

**Abstract.** The study of the Dirichlet-Neumann elliptic functional injectivity on an annulus with radius 1 and 2 relies on the existence of an unique solution, of

period  $2\pi$ , for the Equation  $(e^{2y} - 1)\lambda = 2y'' - (y')^2$ , where  $\lambda$  only depends on  $r > 1$ , the external radius of  $A_r$ . If  $\lambda \geq 0$ , it's proven that the unique solution of this equation is  $y = 0$  for the initial condition  $y(0) = 0$ . Also, for  $\lambda < 0$ , it's demonstrated the possibility of finding the solutions. The objective of this paper is to study, using interval mathematics, for what values of  $r > 1$ , the function  $\lambda$  is positive, null or negative. The conclusions was that the function  $\lambda$  is not negative for  $1 < r \leq 4,9202261876221005$ , and negative for  $r \geq 4,9202261876221014$ .

## Referências

- [1] T. Apostol, "Calculus", Volume II, Editora: John Wiley, 2a edição 1969.
- [2] H. Araújo, P. Gómez, R. Mendoza, Uniqueness for the Dirichlet-Neumann elliptic functional on the annulus, *em preparação*.
- [3] T. Aubin, "Analysis on Manifolds", Monge-Ampère Equations, Springer Verlag, 1982.
- [4] I. Bârza, D. Guisa, Explicit formulas for Green's functions on the annulus and on the Möbius strip, *Acta Applicandae Mathematicae*, **54** (1998), 289-302.
- [5] A. Calderón, On an inverse boundary value problem, em *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics*, Rio de Janeiro, (W.H. Meyer, M.A. Raupp, eds.), Sociedade Brasileira de Matemática (1980), 65-73.
- [6] P. Gómez, R. Mendoza, Uniqueness for the Dirichlet-Neumann elliptic functional, *Inverse Problem*, **22** (2006), 1575-1578.
- [7] U. Kulisch et al., "C-XSC: A C++ Class Library for Extended Scientific Computing", Springer-Verlang, Heidelberg, 1993.
- [8] U. Kulisch, W.L. Miranker, "Computer Arithmetic in Theory and Practice", N.Y., Academic Press, 1911.
- [9] J. Lee, G. Uhlmann, Determining anisotropic real analytic conductivities by boundary measurements, *Comm. Pure Appl. Math.* **XLII** (1989), 1097-1112.
- [10] R.E. Moore, "Interval Analysis", N.J., Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1966.
- [11] R.E. Moore, "Methods and Applications of Interval Analysis", SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1976.
- [12] S. Tabachnikov, On zeros of the Schwarzian Derivative Topics in singularity theory, *AMS. Transl.*, ser. 2, **180** (1997), 229-239.
- [13] M. Taylor, "Partial Differential equations, II", Applied Mathematical Sciences 116, Springer, 1996.