TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **10**, No. 1 (2009), 87-97.

Princípios de Processamento Digital de Sinais Intervalares

R.M.P. TRINDADE[1], Departamento de Ciências Exatas,UESB, 45083-900 Vitória da Conquista, BA, Brasil.

B.R.C. BEDREGAL[2], Departamento de Informática e Matemática Aplicada, UFRN, 59078-900 Natal, RN, Brasil.

A.D. DÓRIA NETO[3], Departamento de Engenharia de Computação e Automação, UFRN, 59078-900 Natal, RN, Brasil.

Resumo. Este trabalho propõe uma versão intervalar dos princípios básicos de processamento digital de sinais intervalares e aborda analiticamente sistemas lineares intervalares com uma perspectiva de aplicação em processamento digital de sinais. Para isso, estendem-se as propriedades básicas de sistemas lineares reais para a sua versão intervalar. Estas propriedades são causalidade, estabilidade, aditividade e homogeneidade. Finalmente, uma versão intervalar da convolução é apresentada e algumas de suas propriedades algébricas são discutidas.

Palavras-chave. Processamento de Sinais, matemática intervalar, seqüências intervalares, sistemas lineares.

1. Introdução

Um dos principais problemas dos usuários de processamento de sinais é a representação de sistemas reais em hardware e/ou software dedicados a processamento de sinais. Além disso, tem-se o problema de tratamento das incertezas (ruídos) do sistema. As incertezas podem ser inerentes ao sinal, das limitações dos sensores, do modelo matemático escolhido para representar o sistema, limitações físicas de implementações, ou devido à imprecisão de algumas operações implementadas em dispositivos de DSP.

Moore [10] propõe um controle intervalar para erros causados por operações com representação numérica finita. Intervalos fechados de extremos reais, que chamaremos simplesmente de intervalos, admitem diversas interpretações semânticas. Neste trabalho, usaremos a mesma interpretação dada por Santiago et al. [12], onde intervalos e funções intervalares são vistos como representações de números e funções

[1]rmpt@uesb.br
[2]bedregal@dimap.ufrn.br
[3]adriao@dca.ufrn.br

reais, respectivamente. assim, uma alternativa para solução do problema da presença de incertezas em processamento de sinais é o uso da matemática intervalar. No entanto, em função da grande complexidade da área de processamento de sinais, este trabalho limita-se apenas a sistemas lineares - SISO (do inglês "single input single output").

Os métodos intervalares em processamento de sinais são adequados para lidar com a imprecisão advinda da quantização dos sinais analógicos, pois algoritmos intervalares corretos garantem que os resultados ideais estão dentro dos resultados intervalares e portanto tem-se um controle automático e rigoroso dos erros computacionais que são típicos de computações numéricas.

Devido à importância dos sistemas lineares em processamentos digitais de sinais e à ocorrência de erros de quantização em sinais, foi proposto por alguns autores ([2, 4, 5, 6, 7, 8]) o uso de sistemas lineares que usem sinais intervalares, porém nenhum deles propôs uma fundamentação teórica que garanta que os sistemas lineares intervalares possuam as propriedades básicas necessárias para serem aplicadas no processamento digital de sinais intervalares (PDSI). De fato esses trabalhos em PDSI não passam de aplicações específicas. Neste trabalho é mostrado que os sistemas lineares intervalares preservam, em algum sentido, algumas das propriedades básicas de sistemas lineares tais como causalidade, linearidade, invariância no tempo, estabilidade, etc. as quais são fundamentais para aplicações em processamento digitais de sinais intervalares.

Este trabalho é organizado como segue. Na seção 2 são apresentados conceitos e notações básicas da aritmética intervalar. Na seção 3, são introduzidos conceitos básicos e alguns resultados essenciais para este trabalho sobre seqüências intervalares. Na seção 4, é mostrado que algumas propriedades básicas de sistemas discretos são preservadas em sistemas intervalares e finalmente na seção 5 apresentamos uma breve conclusão sobre este trabalho.

2. Aritmética Intervalar

A fundamentação da aritmética intervalar usada neste trabalho pode ser encontrada no trabalho de Moore [10]. Essa aritmética pode ser resumida da seguinte maneira: Um intervalo fechado em $\mathbb{R}$ (o conjunto do números reais) é um conjunto $[a,b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$ para algum $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. Seja $\mathbb{IR}$ o conjunto de todos os intervalos fechados em $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{IR} = \{[a,b] \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq b\}$. Se $X,\ Y \in \mathbb{IR}$ então para cada $\square \in \{+,\ -,\ :,\ \times\}$, defines-se $X \square Y = \{a \square b \in \mathbb{R} \mid a \in X \wedge b \in Y\}$ com $0 \notin Y$ no caso da divisão. Uma propriedade importante da aritmética de Moore é a monotonicidade da inclusão, resumida na seguinte expressão: Se $X \subseteq Y$ e $Z \subseteq W$ então $X \square Z \subseteq Y \square W$ ($0 \notin Z$ e $0 \notin W$ no caso da divisão).

A cada intervalo tem-se associado duas projeções, π_1 e π_2 definidas por $\pi_1([a,b]) = a$ e $\pi_2([a,b]) = b$. Para simplificação de notação usaremos $\underline{X}$ para representar $\pi_1(X)$ e $\overline{X}$ para representar $\pi_2(X)$.

Definição 2.1 (Relação de ordem)**.** *Sejam $X = [r,s]$ e $Y = [t,u]$, então X é menor ou igual a Y, denotado por $X \preceq Y$, se $r \leq t$ e $s \leq u$.*

Um intervalo X é dito positivo se $\underline{X} > 0$ e negativo se $\overline{X} < 0$.

A aritmética intervalar não tem a propriedade distributiva porém tem a propriedade de sub-distributividade. Formalmente: Seja A, B e $C \in \mathbb{IR}$ então: $A(B+C) \subseteq AB + AC$.

Proposição 2.1. *Um intervalo A é o ínfimo de um conjunto de intervalos M, em relação à ordem $\preceq$, se $A = [\inf\{\underline{X} : X \in M\}, \inf\{\overline{X} : X \in M\}]$.*

Demonstração. Verifica-se diretamente das definições clássicas e das propriedades de limites superiores e inferiores de conjuntos reais. □

Note que, assim como no caso dos reais, todo conjunto limitado de intervalos tem ínfimo.

3. Seqüências Intervalares

Sinais de tempo discreto são representados matematicamente como uma seqüência de números [11], portanto para desenvolver uma fundamentação matemática para o PDSI precisa-se de uma versão intervalar de seqüência de números reais.

Definição 3.1 (Seqüência intervalar)**.** *Uma seqüência intervalar discreta é uma aplicação $X : \mathbb{Z} \to \mathbb{IR}$, representada por $\{X[n]\}$, onde o n-ésimo termo é denotado por $X[n]$*[4]*.*

Por simplicidade de notação, neste trabalho, a seqüência $\{X[n]\}$ será referida como $X[n]$. Seja $X : \mathbb{Z} \to \mathbb{IR}$, uma seqüência intervalar, o limite inferior de $X[n]$ é a sequência real $\underline{X} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, onde $\underline{X}[n] = \underline{X[n]}$ e o limite superior de $X[n]$ é a seqüência real $\overline{X} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, onde $\overline{X}[n] = \overline{X[n]}$.

Uma seqüência intervalar discreta pode ser originada de uma amostragem periódica de um sinal analógico (contínuo). Neste caso, o valor numérico do n-ésimo termo da seqüência é igual ao valor do sinal analógico intervalar $X_a[t]$ no tempo nT; isto é, $X[n] = X_a(nT)$, onde $-\infty < n < \infty$. T é o período de amostragem; e sua inversa é a freqüência de amostragem.

3.1. Operações com Seqüências Intervalares Discretas

No tratamento de sinais discretos de tempo discreto, seqüências podem ser manipuladas de várias maneiras. Para estender processamento digital de sinais para sua versão intervalar é necessário fazer o mesmo com as operações básicas sobre seqüências discretas, estendendo-as para suas versões intervalares. Em muitos casos, pode-se fazer isso simplesmente substituindo as operações reais por sua versão intervalar. A multiplicação e a soma de duas seqüências intervalares, $X[n]$ e $Y[n]$, são definidas pelo produto ou pela soma, respectivamente, de amostra por amostra das duas seqüências. A multiplicação de uma seqüência $X[n]$ intervalar por uma constante C é definida pela multiplicação de cada termo da seqüência pela constante. No caso de multiplicação por um número real c, tem-se um caso particular da multiplicação pela constante intervalar quando $C = [c, c]$.

[4] [ ] será usado para denotar funções de variáveis inteiras e ( ) para denotar funções de variáveis contínuas

Uma seqüência intervalar $Y[n]$ é uma versão com retardo ou atraso (delay) de uma seqüência $X[n]$ se $Y[n]$ tem valores $Y[n] = X[n - n_0]$, para n_0 inteiro.

Definição 3.2. *Seja $X_1[i]$ e $X_2[k]$ duas seqüências intervalares discretas. $X_1[n] \preceq X_2[n]$ se $X_1[i] \preceq X_2[k]$, $\forall i = k$.*

3.2. Seqüências Básicas Intervalares

Em processamento de sinais algumas seqüências básicas recebem uma atenção especial. Nesta subseção, serão apresentadas duas de tais seqüências.

O pulso unitário, denotado por $\delta[n]$, é definido como $\delta[n] = 0$ se $n \neq 0$ e $\delta[n] = 1$ se $n = 0$.

Definição 3.3 (Pulso unitário intervalar)**.** *Pulso unitário intervalar, denotado por $\delta_i[n]$, é definido em função de δ como $\delta_i[n] = [\delta[n], \delta[n]]$.*

Assim como em processamento de sinais em tempo discreto, as seqüências intervalares também podem ser representadas em função do impulso, i.e,

$$X[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta_i[n-k].$$

A função Degrau Unitário denotada por $u[n]$ é definida como 0 se $n < 0$ e 1 se $n \geq 0$.

Definição 3.4 (Degrau unitário intervalar)**.** *A função degrau unitário intervalar, denotada por $u_i[n]$, é definida como $u_i[n] = [u[n], u[n]]$.*

A função degrau unitário intervalar pode ser representada pelo impulso unitário intervalar, formalmente, $u_i[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_i[n-k]$.

Definição 3.5. *Uma seqüência exponencial intervalar tem a seguinte forma $X[n] = A\alpha^n$, onde A e α são intervalos.*

Diz-se que uma seqüência exponencial intervalar é positiva e crescente quando $A > 0$ e $\alpha > 1$, ou, $A < 0$ e $0 < \alpha < 1$. A seqüência é chamada de decrescente quando A é um intervalo positivo e $\alpha \subset (0, 1)$, ou, A é um intervalo negativo e $\alpha \subset (1, +\infty)$. Quando $\alpha \subset (-1, 0)$, a seqüência é alternada em sinal, mas é decrescente em magnitude que decresce com o crescimento de n. Se $|\alpha| > 1$, a magnitude da seqüência decresce com n. O escopo deste trabalho não é suficiente para uma análise detalhada de convergência de seqüências intervalares. Isso será abordado em trabalho futuro.

Na figura 1 é apresentada uma ilustração gráfica de uma seqüência exponencial intervalar, onde A é um intervalo positivo e $\alpha \subset (0, 1)$.

Definição 3.6. *Uma seqüência intervalar senoidal pode ser definida da seguinte maneira*

$$X[n] = A\ cos(\omega_0 n + \phi) \text{ para todo } n, \text{ ou} \tag{3.1}$$

$$X[n] = A\ sen(\omega_0 n + \phi) \text{ para todo } n. \tag{3.2}$$

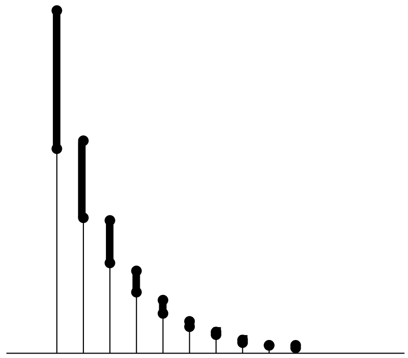

Figura 1: Ilustração gráfica de uma seqüência exponencial intervalar

Seja $X : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{IR}$ uma seqüência intervalar e $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $a \leq b$. O somatório intervalar de todos $X[n]$ com $a \leq n \leq b$ é definido por

$$\sum_{i=a}^{b} X[i] = \left[\sum_{i=a}^{b} \underline{X}[i], \sum_{i=a}^{b} \overline{X}[i] \right]. \tag{3.3}$$

Uma extensão genérica da equação (3.3) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} X[i] = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \underline{X}[i], \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \overline{X}[i] \right]. \tag{3.4}$$

Teorema 3.1. *Seja C uma constante intervalar. Então, tem-se que*

$$C \sum_{i=a}^{b} X[i] \subseteq \sum_{i=a}^{b} C X[i].$$

Demonstração. Uma generalização da propriedade distributiva □

Devido à sub-distributividade, os sistemas lineares intervalares são aplicados somente em sistemas estritamente positivos ou estritamente negativos, pois para sistemas lineares nos conjuntos $\mathbb{IR}^+$ ou $\mathbb{IR}^-$ pode-se substituir $\subseteq$ do Teorema 3.1 por $=$.

Teorema 3.2. *Seja $X_1[n]$ e $X_2[n]$ seqüências intervalares. Então,*

$$\sum_{i=a}^{b} (X_1[i] + X_2[i]) = \sum_{i=a}^{b} X_1[i] + \sum_{i=a}^{b} X_2[i].$$

Demonstração. Uma vez que $X + Y = [\underline{X} + \underline{Y}, \overline{X} + \overline{Y}]$ e pela definição de limite inferior e superior de uma seqüência intervalar, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=a}^{b}(X_1[i] + X_2[i]) &= \left[\sum_{i=a}^{b}\underline{(X_1[i] + X_2[i])}, \sum_{i=a}^{b}\overline{(X_1[i] + X_2[i])}\right] \\
&= \left[\sum_{i=a}^{b}(\underline{X_1}[i] + \underline{X_2}[i]), \sum_{i=a}^{b}(\overline{X_1}[i] + \overline{X_2}[i])\right] \\
&= \left[\sum_{i=a}^{b}\underline{X_1}[i], \sum_{i=a}^{b}\overline{X_1}[i]\right] + \left[\sum_{i=a}^{b}\underline{X_2}[i], \sum_{i=a}^{b}\overline{X_2}[i]\right] \\
&= \sum_{i=a}^{b}X_1[i] + \sum_{i=a}^{b}X_2[i].
\end{aligned}$$

□

4. Propriedades Básicas de Sistemas Intervalares Discretos

Nesta seção as propriedades básicas de processamento de sinais discretos são estendidas para sua versão intervalar.

Definição 4.1 (Sistema sem memória). *Um sistema intervalar discreto L é dito um sistema sem memória se $Y[n]$ depende somente de suas entradas $X[n]$.*

Definição 4.2 (Sistema intervalar invariante no tempo). *Um sistema intervalar é dito invariante no tempo quando uma variação no tempo da seqüência de entrada causa a mesma variação no tempo da seqüência de saída, isto é, se $X_1(n) = X(n - n_0) \Rightarrow Y_1(n) = Y(n - n_0)$.*

Definição 4.3 (Sistema intervalar aditivo). *Um sistema intervalar L é aditivo se a resposta de um somatório de entradas é um somatório de saídas correspondentes às respectivas entradas, isto é, $L(X_1 + X_2) = L(X_1) + L(X_2)$.*

Definição 4.4 (Sistema intervalar homogêneo). *Um sistema intervalar é dito homogêneo se a saída do sistema para uma entrada multiplicada por uma constante for a saída do sistema para a sua respectiva entrada multiplicada pela constante, isto é, $L(CX) = CL(X)$.*

Esta propriedade não é genérica em sistemas lineares intervalares, ela ocorre somente em casos específicos.

Definição 4.5 (Sistema linear intervalar). *Um sistema intervalar L é linear se para toda seqüência intervalar $X[n]$, $X_1(n)$ e $X_2(n)$ e uma constante intervalar A, $L\{X[n]\}$, $L\{X_1(n)\}$ e $L\{X_2(n)\}$ são seqüências intervalares e são válidas as seguintes equações:*

$$L\{X_1(n) + X_2(n)\} = L\{X_1(n)\} + L\{X_2(n)\} \tag{4.1}$$

e

$$L\{AX[n]\} = AL\{X[n]\}. \tag{4.2}$$

Observa-se que as equações (4.1) e (4.2) são as propriedades da aditividade e da homogeneidade, respectivamente, e com a sua combinação obtém-se o princípio da superposição dos sistemas lineares, i.e, $L\{AX_1(n) + BX_2(n)\} = AL\{X_1(n)\} + BL\{X_2(n)\}$.

Uma análise da condição de existência de sistemas lineares intervalares não será tratada neste trabalho, os trabalhos [9, 2, 13] abordam esse tema.

Proposição 4.1. *Seja L um sistema intervalar. Se L é homogêneo, então existe $K \in \mathbb{IR}$ tal que para cada $X \in \mathbb{IR}$, $L[X] = KX$.*

Demonstração. Seja $K = L([1;1])$ então, pela homogeneidade de L, $L(X) = L(X[1;1]) = XL([1;1]) = KX$. □

Definição 4.6 (Resposta ao impulso)**.** *A resposta ao impulso de um sistema linear intervalar discreto L denotada por H é:*

$$H[n] = L[\delta_i[n]]. \tag{4.3}$$

Teorema 4.1. *Se $L : \mathbb{R} \to \mathbb{IR}$ um sistema linear intervalar discreto. Então,*

$$\sum_{i=a}^{b} L[i] = L\left[\sum_{i=a}^{b} i\right].$$

Demonstração. Se L é um sistema linear intervalar discreto, então existe uma constante intervalar K, de modo que para todo x, tem-se $L[x] = Kx$. Portanto,

$$\sum_{i=a}^{b} L[x] = \sum_{i=a}^{b} Kx = K\sum_{i=a}^{b} x = L\left[\sum_{i=a}^{b} x\right].$$

□

Teorema 4.2. *Seja L um sistema linear intervalar invariante no tempo, $X[n]$ um sinal intervalar discreto representado por uma seqüência intervalar, $H[n]$ a resposta ao impulso de L e $Y[n]$ a saída do sistema L. Então,*

$$Y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X[i]H[n-i].$$

Demonstração. Os sistemas intervalares $Y[n] = L[X[n]]$, $X[n]$ podem ser re-escritos como soma infinita de resposta ao impulso, portanto, tem-se

$$\begin{aligned} Y[n] &= L\left(\textstyle\sum_{i=-\infty}^{\infty} X[i]\delta_i[n-i]\right) &&= \textstyle\sum_{i=-\infty}^{\infty} L[X[i]\delta_i[n-i]] \\ &= \textstyle\sum_{i=-\infty}^{\infty} X[i]L[\delta_i[n-i]] &&= \textstyle\sum_{i=-\infty}^{\infty} X[i]H[n-i]. \end{aligned}$$

□

A causalidade é uma noção básica para processamento de sinais em $\mathbb{R}$. Sua extensão para a versão intervalar é trivial.

Definição 4.7 (Causalidade)**.** *Um sistema intervalar é causal se para todos os valores n_0 a seqüência de saída até o índice $n = n_0$ depende somente dos valores de entradas $n \leq n_0$.*

Definição 4.8 (Estabilidade)**.** *Um sistema intervalar é estável (bounded-input bounded-output BIBO), se cada entrada limitada produz uma saída limitada. Uma entrada $X[n]$ é limitada se existe um valor real fixo positivo b_X, tal que $\forall\ n,\ |X[n]| \leq b_X < \infty$. Uma saída $Y[n]$ é limitada se para cada entrada limitada existe um valor real positivo, b_Y, tal que $\forall n,\ |Y[n]| \leq b_Y < \infty$.*

4.1. Convolução Intervalar

A convolução sobre sistemas lineares é uma das mais importantes operações em processamento digital de sinais. Qualquer sistema linear pode ser completamente representado por uma convolução da sua função de transferência (resposta ao impulso) com a função impulso. A convolução também pode ser usada para implementar filtros de médias móveis.

Em estatística, a função densidade de probabilidade da soma de duas variáveis independentes X e Y é dada pela convolução de suas respectivas funções densidade de probabilidade. Na multiplicação de polinômios, os coeficientes do produto são a convolução dos coeficientes dos polinômios de entrada.

Definição 4.9 (Convolução intervalar)**.** *Seja L um sistema linear intervalar discreto e invariante no tempo e $H[n]$ sua resposta ao impulso. A convolução intervalar de um sistema é definida com a soma infinita de suas respostas ao impulso $H[n]$ pela seqüência de suas respectivas entradas $X[n]$, isto é,*

$$X[n] * H[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X[i]H[n-i]. \tag{4.4}$$

As proposições 4.2 e 4.3 apresentam propriedades básicas da convolução intervalar discreta.

Proposição 4.2 (Comutatividade)**.** *A convolução intervalar discreta é comutativa. Logo,*

$$H[n] * X[n] = X[n] * H[n].$$

Demonstração. Tomando H e X sistemas intervalares discretos no tempo. Devido à propriedade comutativa da multiplicação intervalar tem-se

$$\begin{aligned} X[n] * H[n] &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X[i]H[n-i] &&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} H[n-i]X[i] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} H[v]X[n-v] &&= H[n] * X[n]. \end{aligned}$$

□

O fato de que a ordem dos sinais não é importante nessa propriedade possibilita a implementação de sistemas em cascata.

Proposição 4.3 (Associatividade)**.** *A convolução semi-intervalar é associativa, isto é,*

$$[X[n] * H[n]] * G[n] = X[n] * [H[n] * G[n]].$$

Demonstração. Seja $W[n] = X[n] * H[n]$ e $Z[n] = H[n] * G[n]$. Então,

$$\begin{aligned}
[X[n] * H[n]] * G[n] &= W[n] * G[n] \\
&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} W[i]G[n-i] \quad \text{pela equação (4.4)} \\
W[i] &= \sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v]H[i-v] \quad \text{pela equação (4.4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Logo, } \sum_{i=-\infty}^{+\infty} W[i]G[n-i] &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v]H[i-v] \right] G[n-i] \\
&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v]H[i-v]G[n-i]
\end{aligned}$$

Trocando a variável u por $i - v$, temos que pelo Teorema 3.1 e equação (4.4)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v]H[i-v]G[n-i] &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v]H[u]G[[n-v]-u] \\
&= \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} X[v]H[u]G[[n-v]-u] \\
&= \sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v] \sum_{u=-\infty}^{+\infty} H[u]G[[n-v]-u],
\end{aligned}$$

$$Z[n-v] = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} H[u]G[[n-v]-u]$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v] \sum_{u=-\infty}^{+\infty} H[u]G[[t-v]-u] &= \sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v] \left[\sum_{u=-\infty}^{+\infty} H[u]G[[t-v]-u] \right] \\
&= \sum_{v=-\infty}^{+\infty} X[v]Z[t-v] \\
&= X[n] * Z[t] \\
&= X[n] * [H[t] * G[t]].
\end{aligned}$$

□

Graças às propriedades associativa e distributiva, sistemas de processamentos de sinal podem ser implementados em paralelo.

5. Conclusão

Na análise de estabilidade de sistemas robustos tem-se muitos problemas de representação do sistema, um deles é a codificação em um número finito de bits, para contornar este problema Buslowicz and Kaczorek [2] usa sistemas lineares lineares intervalares e para contornar o problema da sub-distributividade da aritmética intervalar limita-se a sistemas estritamente positivos. Isso restringe muito, tanto na quantidade de fenômenos que o sistema pode modelar, quanto na quantidade de modelos que podem representar o sistema. Os sistemas lineares intervalares também são usados como uma alternativa em controle robusto [4], mas o trabalho não lida com as limitações dos sistemas lineares intervalares. Focado nestas limitações, este artigo mostrou que o modelo intervalar é adequado para o processamento digital de sinais, uma vez que todo sistema discreto que representa variáveis reais pode conter erros de quantização. Esses erros não são somente oriundos dos dados de entrada, mas também da aritmética de ponto flutuante e da variança do próprio sistema. Neste trabalho, várias propriedades de processamento de sinais na sua versão intervalar foram apresentadas. Entretanto, só sistemas lineares invariantes no tempo foram abordados. Com a convolução intervalar e propriedades aqui apresentadas, muitos sistemas que contém incertezas podem, agora, ser modelados com a segurança que essas incertezas estão sendo controladas. Por exemplo, a convolução intervalar pode ser usada no projeto de filtros intervalares, ou para análise de estabilidades de sistemas. Este trabalho poderá despertar nos usuários de processamento de sinais uma nova maneira de tratar as incertezas dos sistemas digitais. Como trabalho futuro, pretende-se estender esta abordagem para lidar com sistemas lineares intervalares complexos.

Referências

[1] H.R. Arndt, On interval systems $[x]=[a][x]+[b]$ and the powers of interval matrices in complex interval arithmetics, *Reliable Computing*, **13** (2007), 245–259.

[2] M. Buslowicz, T. Kaczorek, Robust stability of positive discrete-time interval systems with time-delays, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences - Technical Sciences*, **52**, No. 2 (2004), 99–102.

[3] Y. Candau, T. Raissi, N. Ramdani, L. Ibos, Complex interval arithmetic using polar form, *Reliable Computing*, **12**, No. 1 (2006), 1–20.

[4] J. Danko, M. Ondrovicov'a, V. Vesel'y, Robust controller design to control a warm air-drying chamber, *Eletrical Engineering*, **55**, No. 7-8 (2004), 207–211.

[5] W. Edmonson, Interval methods in digital signal processing, in "Proceeding of Validated Computing 2002", SIAM Workshop, Toronto, Canada, 2002.

[6] W. Edmonson, W. Alexander, G. Gloster, E. Hughes, Interval arithmetic requirements for digital signal processor, in "NSF Workshop: Presentations - Reliable Engineering Computing", pp. 1–1, Savannah GA, 2004.

[7] W. Edmonson, R. Gupte, S. Ocloo, J. Gianchandani, W. Alexander, Interval arithmetic logic unit for signal processing and control, in "NSF Workshop on Reliable Engineering Computing Modeling Errors and Uncertainty in Engineering Computations", pp. 1–8, Georgia Tech Savannah, 2006.

[8] R. Gupte, "Interval Arithmetic Logic Unit for DSP and Control Applications", Master's thesis, North Carolina State University, 2006.

[9] E. Hansen, The hull of precoditioned interval linear equations, *Reliable Computing*, **6** (2000) 95–103.

[10] R.E. Moore, "Methods and Applications of Interval Analysis", Studies in Applied Mathematics - SIAM, Philadelfia, 1979.

[11] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, "Discrete-Time Signal Processing", Prentice Hall, 1989.

[12] R.H.N. Santiago, B.C. Bedregal, B.M. Acióly, Formal aspects of correctness and optimality of interval computations, *Formal Aspects of Computing*, **18** (2006), 231–243.

[13] I. Skalna, A method for outer interval solution of systems of linear equations dapending linerly on interval parameters, *Reliable Computing*, **12** (2006), 107–120.