

## Vibrações Livres e a Função de Green Temporal para um Modelo de Euler-Bernoulli

M.K. GIARETA<sup>1</sup>, Departamento de Matemática, Universidade de Passo Fundo,  
99.010-070 Passo Fundo, RS, Brasil

J.R. CLAEYSSSEN<sup>2</sup>, Instituto de Matemática - PPGMAp/Promec, Universi-  
dade Federal do Rio Grande do Sul, Cx.P. 10673, 90.001-970, Porto Alegre, RS,  
Brasil.

**Resumo.** Este trabalho visa a obtenção da resposta impulso, ou função de Green temporal para uma viga longa e fina descrita pela equação de Euler-Bernoulli sob a influência de uma força axial. Simulações para a função de Green temporal são apresentadas para vigas fixas-livre, engastadas, e deslizando-apoiada.

### 1. O Modelo de Euler-Bernoulli

Este trabalho visa a derivação de uma formulação sistemática para a resposta livre de um modelo elástico Euler-Bernoulli, que descreve a dinâmica de uma viga, em termos da base temporal, gerada pela resposta impulso ou, função de Green no tempo e a determinação desta última de maneira espectral. Os modos flexurais do sistema podem ser calculados com o uso da base clássica de Euler ou, com a introdução de uma base, chamada de base dinâmica espacial, a qual é melhor condicionada diante variação dos parâmetros físicos. Neste problema são consideradas condições de contorno genéricas. As simulações foram realizadas com auxílio do software Maple.

A viga em estudo está sujeita ao efeito de uma força paralela ao eixo horizontal, além da força lateral já existente. A Figura 1 mostra o esquema de uma viga fixa-livre de comprimento  $L$ , onde  $v(t, x)$  é o deslocamento transversal modificado por uma força axial  $N$  e  $f(t, x)$  é a força externa ou carga. É assumido por simplicidade que a força axial é constante e que o equilíbrio transversal não é afetado pela força axial. Segundo a teoria de de Euler Bernoulli, a qual supõe que o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados e que as seções transversais planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga após o deslocamento, tem-se o modelo

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(t, x), \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Projeto UPF-RS. E-mail: giareta@pas.matrix.com.br

<sup>2</sup>Auxílio FAPERGS. E-mail: julio@mat.ufrgs.br

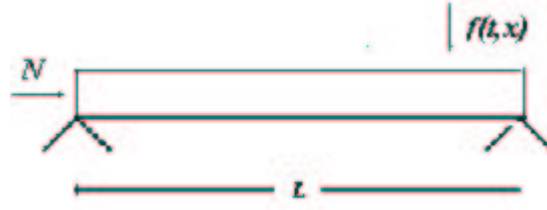


Figura 1: Viga fixa livre sob ação da força axial  $N$

onde  $A$  é a área transversal da viga,  $E$  o módulo de Young,  $I$  o momento de inércia,  $N$  a força axial,  $\rho$  a densidade linear. Este modelo é de natureza evolutiva, exigindo duas condições iniciais,  $v(0, x) = v_0(x)$  e  $v_t(0, x) = \dot{v}_0(x)$  que representam o deslocamento e velocidade iniciais da viga, respectivamente, e satisfazendo condições de contorno espaciais, com derivadas até terceira ordem avaliadas em ambas extremidades da viga,  $X = 0$  e em  $x = L$ , tais condições podem ser escritas na forma genérica e matricial,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t, 0) \\ v_x(t, 0) \\ v_{xx}(t, 0) \\ v_{xxx}(t, 0) \\ v(t, L) \\ v_x(t, L) \\ v_{xx}(t, L) \\ v_{xxx}(t, L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

## 2. Modos Flexurais

A equação de Euler -Bernoulli pode ser escrita de forma compacta e, análoga a uma equação vibratória conservativa, como

$$M\ddot{v} + Kv = f(t, x), \quad (2.1)$$

onde  $M = m\mathcal{I}$  com  $\mathcal{I}$  o operador identidade e  $K$  é o operador diferencial linear espacial de quarta ordem  $K = EI \frac{d^4}{dx^4} + N \frac{d^2}{dx^2}$ , atuando sob funções que satisfazem as condições de contorno (1.2).

Vibrações livres da forma oscilatória  $v(t, x) = e^{i\omega t}X(x)$  existem quando  $X$  é uma solução não nula da equação modal  $[K - \omega^2 M]X = 0$ , isto é,

$$X^{iv}(x) + g^2 X^{ii}(x) - a^4 X(x) = 0, \quad (2.2)$$

sujeita a condições de contorno. Aqui, os coeficientes são dados por  $g^2 = \frac{N}{EI}$  e  $a^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$ . Pela propriedade de simetria dos operadores M e K, os modos de vibração satisfazem relações de ortogonalidade.

Escrevendo  $X(x) = \Phi c$ , onde  $\Phi$  denota uma base de soluções  $[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4]$ , tem-se o sistema  $\Delta c = 0$ ,  $\Delta = B\Phi_o l$ . Introduzindo a solução fundamental  $h(x)$  que satisfaz o problema de valor inicial

$$h^{iv}(x) + g^2 h^{ii}(x) - a^4 h(x) = 0 \quad (2.3)$$

com as condições iniciais  $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$ ,  $h'''(0) = 1$ , o conjunto  $h, h', h'', h'''$  forma uma base de soluções. Em termos espectrais,

$$h(x) = \frac{\delta \sinh \epsilon x - \epsilon \sinh \delta x}{\delta^2 + \epsilon^2}, \quad (2.4)$$

onde  $\delta^2 - \epsilon^2 = g^2$ ,  $\delta^2 = g^2/2 + \sqrt{(g^4/2 - a^4)}$ . Pelos valores iniciais de  $h(x)$ , observa-se que o sistema  $\Delta c = 0$  pode ser reduzido segundo as condições de contorno do sistema, pois

$$\Delta = \begin{bmatrix} A_{14} & A_{13} & A_{12} & A_{11} \\ A_{24} & A_{23} & A_{22} & A_{21} \\ B_{1k} h^{(k-1)}(L) & B_{1k} h^{(k)}(L) & B_{1k} h^{(k+1)}(L) & B_{1k} h^{(k+2)}(L) \\ B_{2k} h^{(k-1)}(L) & B_{2k} h^{(k)}(L) & B_{2k} h^{(k+1)}(L) & B_{2k} h^{(k+2)}(L) \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

onde nas últimas duas linhas é utilizada notação tensorial, abreviação para indicar somatória com variação do índice  $k=1:2$ . Deve ser observado que as condições iniciais de  $h(x)$  independem dos parâmetros da equação, portanto a base dinâmica comporta-se melhor do que a base espectral clássica formada em termos das raízes da correspondente equação característica.

### 3. A Resposta Livre Através da Função de Green Temporal

Pelo método espectral de Fourier, a resposta livre da equação do movimento da viga (1.1) pode ser descrita na forma

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) X_n(x), \quad (3.1)$$

onde  $X_n(x)$  são os modos e os  $v_n(t)$  os coeficientes temporais.

Por substituição na equação homogênea e utilizando a ortogonalidade dos modos, decorre que os coeficientes temporais  $v_n(t)$  satisfazem à equação

$$\ddot{v}_n(t) + \omega_n^2 v_n(t) = 0. \quad (3.2)$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação (3.2) no tempo  $\tau$  por  $h(t - \tau) = \frac{\text{sen}\omega_n(t-\tau)}{\omega_n}$  e integrando-a por partes em  $\tau$  de 0 a  $t$ , obtém-se

$$v_n(t) = \cos(\omega_n t)v_n(0) + \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n}\dot{v}_n(0). \quad (3.3)$$

Substituindo-se na série (3.1), decorre que

$$v(t, x) = \int_0^L \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(t, x, s)mv_0(s) + h(t, x, s)m\dot{v}_0(s) \right] ds, \quad (3.4)$$

onde

$$h(t, x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{X_n(s)X_n(x)}{\|X_n\|^2} \right) \frac{\text{sen}\omega_n t}{\omega_n} \frac{1}{m} \quad (3.5)$$

é a *solução dinâmica* do sistema distribuído, que para  $t > 0$  corresponde à resposta impulso ou a função de Green de valor inicial. Aqui,  $\|X_n\|$  denota a norma integral quadrática do modo  $X_n$ .

A fórmula obtida para  $v(t, x)$ , em termos da função de Green temporal, pode ser escrita na forma compacta

$$v = \frac{dh}{dt}[mv_0] + h[m\dot{v}_0], \quad (3.6)$$

onde  $h$  é abreviação do operador dinâmico

$$h(t)\phi(x) = \int_0^L h(t, x, s)\phi(s)ds. \quad (3.7)$$

A introdução deste operador permite obter uma estrita analogia com a solução de um sistema conservativo concentrado  $M\ddot{v} + Kv = f(t)$ . Os operadores  $h$  e  $\dot{h}$ , possuem como núcleos a função de Green e sua derivada temporal, e podem ser associados com as matrizes  $\frac{\text{sen}(\sqrt{(M^{-1}K)t})}{\sqrt{(M^{-1}K)}}$  e  $\cos(\sqrt{(M^{-1}K)t})$  que atuam sobre deslocamentos concentrados espacialmente. O cálculo, igual ao caso concentrado, pode ser realizado através de métodos espectrais e não espectrais. Devido à ortogonalidade dos modos, decorre que para cada modo tem-se a relação

$$h(t)X_n = \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} X_n,$$

ou seja, são as autofunções do operador  $h(t)$ .

A seguir, são apresentadas simulações para a função de Green temporal para uma viga fixa apoiada, biapoada e livre-livre em determinados instantes de tempo devido a periodicidade.

### 3.1. Viga Fixa Apoiada

Tem-se as condições de contorno  $v(t, 0) = 0, v_x(t, 0) = 0, v(t, L) = 0, v_{xx}(t, L) = 0$ .

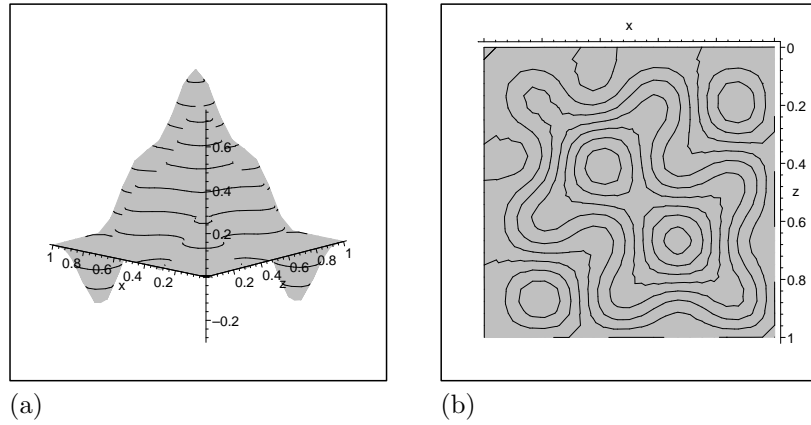


Figura 2: (a) Gráfico 3D da função de Green em  $t=3$  (b) Linhas de contorno.

### 3.2. Viga Biapoiada

Tem-se as condições de contorno  $v(t, 0) = 0, v_{xx}(t, 0) = 0, v(t, L) = 0, v_{xx}(t, L) = 0$ .

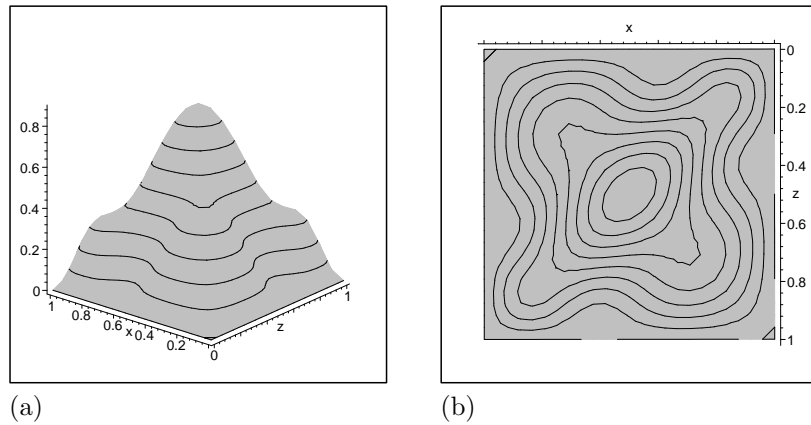


Figura 3: (a) Gráfico 3D da função de Green em  $t=4.4$  (b) Linhas de contorno.

### 3.3. Viga Livre-Livre

Tem-se as condições de contorno  $v_{xx}(t, 0) = 0$ ,  $v_{xxx}(t, 0) = 0$ ,  $v_{xx}(t, L) = 0$ ,  $v_{xxx}(t, L) = 0$ .

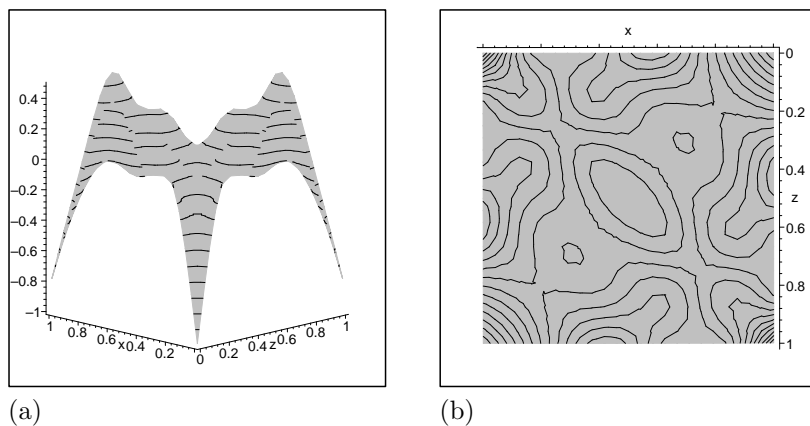


Figura 4: (a) Gráfico 3D da função de Green em  $t=3$  (b) Linhas de contorno.

## 4. Conclusões

A equação que descreve o modelo de Euler-Bernoulli pode ser considerada de maneira análoga a de um sistema conservativo concentrado em termos da resposta impulso, ou função de Green temporal. Observa-se que a simetria da função de Green em cada instante do tempo é decorrência do fato de o problema modal ser simétrico e que os padrões serem mantidos com o tempo é devido a periodicidade temporal. A formulação utilizada foi direta, evitando a redução para um sistema de primeira ordem, através do espaço de estado, com a qual é obscurecida a simetria do problema.

## Referências

- [1] J. Claeysen, G. Suazo, C. Jung, A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations, *Applied Numerical Mathematics*, **30** (1999), 65-78.
- [2] J.R. Claeysen, L.D. Chiacowsky, G.S. Suazo, The impulse response in the symbolic computing of modes for beams and plates, *Applied Numerical Mathematics*, **40** (2002), 119-135.

- [3] D. Findeisen, "System Dynamics and Mechanical Vibrations", Springer-Verlag, 2001.
- [4] M.K. Giaretta, J.R. Claeysen, Vibrações forçadas com força axial, em "Aplicon" (J.M. Balthazar et al., eds.), USP, São Carlos, 2001.
- [5] J. Ginsberg, "Mechanical and Structural Vibrations", John Wiley, 2001.
- [6] A.J. Hull, A closed form solution of a longitudinal bar with a viscous boundary condition, *J. Sound Vib.*, **169**, No. 1 (1994), 19-28.
- [7] R.A.L. Soder, J.R. Claeysen, Modos Flexurais sob a Influência de uma Força Axial, em "XXIII CNMAC", Santos, São Paulo, 2000.

