NOTAS EM MATEMÁTICA APLICADA e-ISSN 2236-5915

Volume 16, 2012

Editado por

Eliana X.L. de Andrade
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Rubens Sampaio
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro -
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Geraldo N. Silva
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/notas.php

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio

Marcilia Andrade Campos
Marcilia Andrade Campos Centro de Informática
UFPE, Brasil
socorro@ibilce.unesp.br

Paulo Figueiredo Lima
CCEN - Universidade Federal de Pernambuco
UFPE, Brasi

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Véra Lucia da Rocha Lopes

Coordenação Editorial da Série: Geraldo Nunes Silva

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Campos, Marcilia Andrade.
Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio - São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 66 p., 20.5 cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 16)

e-ISBN 978-85-86883-83-5

1. Informação. 2. Ensino Médio. 3. Ensino Fundamental.
I. Campos, Marcilia Andrade. II. Lima, Paulo Figueiredo.
III. Título. VI. Série.

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2005 nesta mesma série pela SBMAC.

Conteúdo

Introdução

Este breve trabalho dirige-se a professores que lecionam Matemática no ensino básico. Como se sabe, este é um amplo leque de profissionais, desde o professor polivalente dos quatro (ou cinco) primeiros anos de ensino, até o que leciona a disciplina Matemática nos sete anos subseqüentes da educação escolar básica.

Trata-se de um convite à reflexão sobre o ensino, na escola básica, do campo de conhecimento que inclui estatística, probabilidade e combinatória. Esse campo do saber está, hoje, no centro das práticas científicas e tecnológicas em todos os níveis, inclusive na fronteira do conhecimento e, além disso, permeia as várias atividades do dia-a-dia do cidadão. Em particular, os novos recursos tecnológicos do computador e da calculadora, de difusão crescente na sociedade, ampliaram de forma evidente as potencialidades de tratamento de dados de experimentos e de observações empíricas. Além disso, as pessoas são constantemente expostas a um grande volume de informações que, para serem entendidas e levadas em conta de modo crítico, exigem a leitura e interpretação de gráficos e tabelas e demandam o conhecimento de outras noções estatísticas básicas.

Nos últimos anos, acertadamente, os currículos de Matemática do ensino fundamental (BRASIL, 1997, 1998) têm incluído um bloco de conteúdo abrangendo estatística, probabilidade e combinatória, que aparece sob a denominação de *tratamento da informação*, que será adotada neste trabalho.

A inclusão do campo do tratamento da informação nos currículos ocorreu não só no Brasil, mas em muitos outros países. Nos Estados Unidos, por exemplo, isso aconteceu, pelo menos, desde a publicação, pelo National Council of Teachers of Mathematics – NCTM – dos Standards, em 1989. Mais recentemente o NCTM divulgou os Principles and Standards, nos quais está incluído, com destaque, o bloco de conteúdos denominado *Data Analysis and*

Probability.

Em nosso país, a inclusão do tratamento da informação nos currículos repercutiu de forma evidente nos livros didáticos, que passaram a dar mais atenção ao tema. Em particular, com a divulgação, desde 1999, dos critérios de avaliação dos livros didáticos que são adquiridos pelo Ministério da Educação, para distribuição nas escolas públicas, (BRASIL, 1999, 2000, 2002a, 2004, 2005, 2005a) observa-se, cada vez mais, a presença da estatística, probabilidade e combinatória nos manuais didáticos brasileiros.

Para os professores que lecionam Matemática na escola básica surgiu, progressivamente, um enorme desafio: como ensinar esses conteúdos? Desafio que se avolumou porque tais conteúdos são uma parte quase ausente nos dos cursos de formação inicial de professores e só mais recentemente têm sido tratados nos programas de formação continuada. Avolumou-se, também, porque os estudos e as pesquisas em didática desses conteúdos não são suficientemente difundidas na comunidade educacional brasileira.

O presente trabalho é uma pequena contribuição ao debate sobre o ensino do tratamento da informação na escola básica. Deve ficar claro, desde o início, que não se pretende discutir todas as questões relevantes ligadas a essa temática, dadas sua extensão e sua complexidade. Procura-se, por outro lado, compensar essa limitação reunindo informações sobre publicações (inclusive veiculadas pela web) para que o leitor interessado possa prosseguir seu estudo sobre este tema.

O trabalho é iniciado com um capítulo em que se faz um resumo de recomendações curriculares contidas nos PCN (BRASIL, 1997, 1998) e nos Principles and Standards (NCTM, 2000). A inclusão desse capítulo justifica-se pela importância que tais documentos atribuem ao campo do tratamento da informação e pela justeza das recomendações neles contidas. Além disso, tem sido apontado freqüentemente que um conhecimento razoável do documento produzido pelo MEC, é bastante limitado entre os professores brasileiros. Um indício dessa afirmação pode ser visto na Tabela 2.2 deste trabalho, em que se verifica que, na rede municipal do Rio de Janeiro, cerca de 30% dos professores graduados há menos de 5 anos sequer conhecem os PCN.

O Capítulo 2 é dedicado aos gráficos e tabelas, que são representações básicas de dados estatísticos e fazem parte de qualquer proposta didática no campo do tratamento da informação.

No Capítulo 3 são mostradas fórmulas mais comuns da Estatística Descritiva e é apresentado um exemplo de aplicação dessas fórmulas. O destaque deste capítulo é o uso de separatrizes como medidas de classificação dos elementos de uma população ou amostra. Um professor pode se deparar com a situação de classificar seus alunos de acordo com as notas. Esta classificação é realizada como o cálculo de separatrizes.

No Capítulo 4, algumas noções básicas de probabilidades. Opta-se por apresentar, além da definição clássica, a usual, que aparece nos problemas envolvendo análise combinatória, a frequentista, a geométrica e a axiomática. A definição axiomática é importante para o professor fundamentar seus conhecimentos, embora não deva fazer parte do conteúdo programático do nível básico de escolaridade. A referência à definição geométrica é justificada por propiciar uma conexão importante entre probabilidade e geometria.

No Capítulo 5, é feito um resumo sobre números de ponto flutuante. Este tópico não consta, explicitamente, nos PCN, como pode ser visto no Capítulo 1. Entretanto, o quarto item do "Conteúdos para o 2º Ciclo" é "Exploração da função do número como código na organização de informação (linhas de ônibus, telefones, placas de carro, registros de identidade, bibliotecas, roupas, calçados". O número de ponto flutuante é um código de representação dos reais. É importante que os alunos tomem conhecimento desde cedo das limitações da máquina com respeito a tratar a informação básica em computação referente ao procedimento numérico.

Ao final, estão as referências bibliográficas.

Os autores agradecem à SBMAC a oportunidade de divulgar por meio desta publicação suas idéias, que, em grande parte, são fruto de experiência em sala de aula.

Capítulo 1

Recomendações Curriculares

Neste capítulo, é feito um resumo do que preconizam alguns documentos de orientação curricular no tocante ao tratamento da informação. De início, convém lembrar que os autores deste trabalho não defendem todas as afirmações e propostas contidas nesses documentos, mas endossam, firmemente, a importância por eles atribuída ao ensino de conteúdos do tratamento da informação. O que se pretende, aqui, é trazer a discussão do tema a um público mais amplo, para colaborar na mudança do ensino e na aprendizagem desses temas.

Nas últimas décadas, os conteúdos de estatística, probabilidade e combinatória passaram a fazer parte dos referenciais curriculares de muitos países, inclusive do Brasil. Dentre os referenciais brasileiros, neste capítulo, serão comentados os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – PCN – (BRASIL, 1997, 1998). Comentam-se, além disso, recentes recomendações curriculares dos Estados Unidos.

Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental

Nos PCN, são estabelecidos objetivos gerais para todo o Ensino Fundamental e objetivos gerais por área disciplinar. Além disso, os objetivos gerais por área são desdobrados em objetivos específicos para cada um dos quatro ciclos (cada um com dois anos de duração) em que propõem sejam divididos os oito anos do Ensino Fundamental. Ao lado dos objetivos por área e por ciclo, são propostos conteúdos e critérios de avaliação, também por ciclo de aprendizagem. Os conteúdos e critérios de avaliação são agrupados em quatro grandes blocos temáticos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; e Tratamento da Informação. Os PCN para o Ensino Fundamental foram separados em dois volumes, o primeiro divulgado em 1997, destinado aos dois primeiros ciclos e o segundo, publicado em 1998, voltado para os dois últimos ciclos. A parte final de ambas as publicações contém orientações didáticas, organizadas por bloco de conteúdo. Na opção adotada nos PCN, os conteúdos visados são ampliados, para além de sua dimensão conceitual, predominante nos currículos existentes, para incluir conteúdos procedimentais e conteúdos atitudinais. Procura-se, também, apontar para o trabalho pedagógico interdisciplinar com a proposição dos denominados Temas Transversais (Ética, Saúde, Meio Ambiente, Orientação Sexual, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo).

Nos PCN, os temas de estatística, probabilidade e de combinatória são reunidos no bloco Tratamento da Informação, que é um dos quatro grandes agrupamentos em que são organizados os conteúdos matemáticos visados no Ensino Fundamental. Esta opção revela, por si só, a importância atribuída à temática do tratamento da informação, relevância que se manifesta, além disso, pela sua presença em todas as seções em que é organizado esse documento curricular.

A importância atribuída ao tratamento da informação é justificada, nos PCN, pela forte demanda social:

> É cada vez mais freqüente a necessidade de se compreender as informações veiculadas, especialmente pelos meios de comunicação, para tomar decisões e fazer previsões que terão influência não apenas na vida pessoal, como na de toda a comunidade.
> Estar alfabetizado, neste final de século supõe saber ler e interpretar dados apresentados de maneira organizada e construir representações, para formular e resolver problemas que impliquem o recolhimento de dados e a análise de informações.
> Essa característica da vida contemporânea traz ao currículo de Matemática uma demanda em abordar elementos da estatística, da combinatória e da probabilidade, desde os ciclos iniciais.
> (BRASIL, 1997, pp. 131, 132)

O texto acima reflete opções metodológicas adotadas nos PCN, que são influenciadas pelas teorias mais recentes de ensino e de aprendizagem. Nessas teorias, preconiza-se que se direcione o ensino escolar para a aquisição de competências básicas necessárias à participação ativa e consciente do cidadão na sociedade em que vive e não apenas para o preparar para etapas posteriores de sua escolarização. A proposta de se abordar o tratamento da informação desde os anos iniciais resulta da concepção, hoje advogada por muitos, de que, ao longo da aprendizagem escolar, os conteúdos devem ser abordados e retomados, de forma gradualmente mais extensa e aprofundada. Defende-se, também, que o aluno desempenhe um papel ativo na construção de seu conhecimento; que se dê ênfase à resolução de problemas vinculados ao contexto social; e que sejam valorizadas as conexões entre os vários ramos do saber abordados na escola.

A questão da interdisciplinaridade é tratada nos PCN com base na proposta de Temas Transversais. Os conteúdos matemáticos do tratamento da informação, em particular os recursos da estatística, desempenham um papel relevante como instrumento para análise de questões tais como a diferença de remuneração de trabalho de homens e mulheres; o aumento da gravidez prematura entre jovens e adolescentes; o comportamento das doenças sexualmente transmissíveis; a evolução da Aids nos diferentes grupos humanos; os índices da fome, da subnutrição e da mortalidade infantil em várias regiões do país; as condições de saneamento básico no país, entre muitas outras. O trabalho envolvendo esses temas, com o emprego do conhecimento matemático, constitui-se uma dimensão importante a ser desenvolvida no Ensino Fundamental, para que o aluno se torne um cidadão crítico, consciente e participativo.

Nos PCN, são estabelecidos objetivos e conteúdos de aprendizagem relativos aos três principais campos temáticos incluídos no bloco *Tratamento da Informação.*

Com relação à estatística, preconiza-se que o aluno possa, gradualmente ao longo dos anos de aprendizagem, construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações, especialmente as que aparecem freqüentemente em seu dia-a-dia. Além disso, nas etapas mais avançadas, calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda como ferramentas conceituais para interpretar dados estatísticos.

Quanto ao campo da probabilidade, a principal finalidade é levar o aluno a compreender a noção de acontecimento aleatório, com base em observação de fenômenos do cotidiano, explorando a idéia de acaso e incerteza, de forma inicialmente intuitiva e, progressivamente, procurando quantificar a chance de ocorrência de resultados incertos. Defende-se que o aluno deva ser levado a realizar experimentos, observar eventos e discutir a noção de eqüiprobabilidade.

Com relação à combinatória, entende-se que se deva dar prioridade aos problemas de contagem, em situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo. É enfatizado o emprego desse conteúdo como instrumento para o cálculo de probabilidades.

Mais especificamente no 1º. Ciclo, deve-se procurar estimular o aluno

> ...a fazer perguntas, a estabelecer relações, a construir justificativas e a desenvolver o espírito de investigação.
> A finalidade não é a de que os alunos aprendam apenas a ler e a interpretar representações gráficas, mas que se tornem capazes de descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos matemáticos.
> (BRASIL, 1997, p. 69)

Com esse fim, são propostos os seguintes objetivos e conteúdos, estes últimos entendidos apenas como conceitos e procedimentos:

Objetivos para o 1º Ciclo

⋆ Identificar o uso tabelas e gráficos para facilitar a leitura e interpretação de informações e construir formas pessoais de registro para comunicar informações coletadas. (BRASIL, 1997, p. 66)

Conteúdos para o 2º Ciclo

- Leitura e interpretação de informações contidas em imagens.
- Coleta e organização de informações.
- Criação de registros pessoais para comunicação das informações coletadas.
- Exploração da função do número como código na organização de informação (linhas de ônibus, telefones, placas de carro, registros de identidade, bibliotecas, roupas, calçados.
- Interpretação e elaboração de listas, tabelas simples, de dupla entrada e gráficos de barra para comunicar a informação obtida.
- Produção de textos escritos a partir da interpretação de gráficos e tabelas.
  (BRASIL, 1997, p. 74)

Ao longo do 2º Ciclo, deve-se procurar aprofundar o trabalho com coleta, organização e descrição de dados, levando-se o aluno a compreender o papel das tabelas e gráficos empregados para comunicar esses dados, salientando-se que tais instrumentos permitem apresentar de forma mais rápida os aspectos globais e as propriedades mais importantes do conjunto de dados. Espera-se que:

> Lendo e interpretando dados apresentados em tabelas e gráficos, os alunos percebam que eles permitem estabelecer relações entre acontecimentos e, em alguns casos, fazer previsões. Também, ao observarem a freqüência de ocorrência de um acontecimento, ao longo de um grande número de experiências, desenvolvem sua primeiras noções de probabilidade.
> (BRASIL, 1997, p. 85)

Os objetivos e conteúdos propostos para este ciclo são os seguintes:

Objetivos para o 2º Ciclo

⋆ Recolher dados e informações, elaborar formas para organizá-los e expressá-los, interpretar dados apresentados sob forma de tabelas e gráficos e valorizar essa linguagem como forma de comunicação.

⋆ Utilizar diferentes registros gráficos – desenhos, esquemas, escritas numéricas - como recurso para expressar idéias, ajudar a descobrir formas de resolução e comunicar estratégias e resultados.

⋆ Identificar características de acontecimentos previsíveis ou aleatórios a partir de situações-problema, utilizando recursos estatísticos e probabilísticos.
(BRASIL, 1997, p. 81)

Conteúdos para o 2º Ciclo

- Coleta, organização e descrição de dados.
- Leitura e interpretação de dados apresentados de maneira organizada (por meio de listas, tabelas, diagramas e gráficos) e construção dessas representações.
- Interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos.
- Produção de textos escritos, a partir da interpretação de gráficos e tabelas, construção de gráficos e tabelas com base em informações contidas em textos jornalísticos, científicos ou outros.
- Obtenção e interpretação de média aritmética.
- Exploração da idéia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de "sorte".

- Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades.
- Identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais.
  (BRASIL, 1997, pp. 90, 91)

Ao passar para o 3º Ciclo, correspondente à etapa de 5ª e 6ª Séries, o aluno deve ampliar, gradualmente, os conceitos e procedimentos do campo da estatística com os quais lidou nos ciclos anteriores: coleta, organização de dados por meio de tabelas e gráficos, estabelecer relações, fazer algumas previsões e observar a freqüência de ocorrência de um acontecimento. Neste ciclo, pleiteia-se que o aluno aprenda, também, a formular questões pertinentes para um conjunto de informações, a elaborar algumas conjecturas e comunicar informações de modo convincente, a interpretar diagramas e fluxogramas. Nessa fase pode ser iniciado o estudo de medidas estatísticas tais como a média aritmética, como instrumento para interpretação dos dados. Essas ampliações devem levar à progressiva compreensão das ferramentas estatísticas em seu papel de apresentação global da informação, leitura rápida, destaque dos aspectos relevantes e de meio para descrever, analisar, avaliar e tomar decisões.

Quanto ao campo da probabilidade, é proposto que:

> Neste ciclo, também, amplia-se a exploração das possibilidades de quantificar o incerto. Com as noções elementares de probabilidade os alunos aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (lançamento de moedas, dados, cartas). Assim, poderão ir se familiarizando com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões e perceber a importância da probabilidade na vida cotidiana.
> (BRASIL, 1998, pp. 69, 70)

Os objetivos e conteúdos para o ciclo são:

Objetivos para o 3º Ciclo

O ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

⋆ coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, formular argumentos convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas;

⋆ resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão.
(BRASIL, 1998, p. 65)

Conteúdos para o 3º Ciclo

- Coleta, organização de dados e utilização de recursos visuais adequados (fluxogramas, tabelas e gráficos) para sintetizá-los, comunicá-los e permitir a elaboração de conclusões.
- Leitura e interpretação de dados expressos em tabelas e gráficos.
- Compreensão do significado da média aritmética como um indicador da tendência de uma pesquisa de dados.
- Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias.
- Construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão.
(BRASIL, 1998, p. 74)

No ciclo final do Ensino Fundamental (7ª e 8ª Séries), o interesse e a capacidade dos alunos ampliam-se e temas mais gerais como saúde, meio ambiente, pobreza, violência, entre outros, podem ser tratados em conexão com os conceitos estatísticos mais elaborados. Na resolução de situações-problema, eles podem ser estimulados a formular estratégias, testar hipóteses e interpretar resultados, recorrendo, inclusive, à calculadora, a planilhas eletrônicas ou a outros softwares.

Com relação à combinatória, os problemas de contagem podem envolver situações com números de ordem de grandeza mais elevada e servir de base para o estudo de probabilidade que, por sua vez,

> ...tem por finalidade fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático. Para tanto, terão que construir o espaço amostral como referência para estimar a probabilidade de sucesso utilizando-se de uma razão.
> (BRASIL, 1998, pp. 85,86)

Os objetivos e conteúdos propostos para este ciclo são mencionados a seguir:

Objetivos para o 4º Ciclo

O ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do raciocínio estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- ⋆ construir tabelas de freqüência e representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos;
- ⋆ construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos. (BRASIL, 1998, p. 82)

Conteúdos para o 4º Ciclo

- Leitura e interpretação de dados expressos em gráficos de colunas, de setores, histogramas e polígonos de freqüência.
- Organização de dados e construção de recursos visuais adequados como gráficos (de colunas, de setores, histogramas e polígonos de freqüência) para apresentar globalmente os dados, destacar aspectos relevantes, sintetizar informações e permitir a elaboração de inferências.
- Compreensão de termos como freqüência, freqüência relativa, amostra de uma população para interpretar informações de uma pesquisa.
- Distribuição das freqüências de uma variável de uma pesquisa em classes de modo a resumir os dados com um grau de precisão razoável.
- Obtenção das medidas de tendência central de uma pesquisa (média, moda e mediana), compreendendo seus significados para fazer inferências.
- Construção do espaço amostral utilizando o princípio multiplicativo e indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.
- Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas.
  (BRASIL, 1998, p. 90)

Os dois volumes em que foram publicados os PCN para o Ensino Fundamental são encerrados com Orientações Didáticas. No volume destinado aos dois primeiros ciclos, tal seção é bem reduzida, com respeito ao bloco Tratamento da Informação, restringindo-se a reforçar a importância social do tema e fazer breves recomendações sobre atividades de levantamento e organização de dados em tabelas e gráficos. Em contrapartida, no volume voltado para os dois últimos ciclos, há extensas considerações sobre o bloco Tratamento da Informação, em que são retomados todos os objetivos e conteúdos propostos para essa fase da aprendizagem, com a preocupação adicional de sugerir tipos de atividades de ensino e de fornecer mais pormenores a respeito dos conceitos e procedimentos envolvidos.

Os comentários e citações que se seguem procuram dar uma idéia dos temas abordados nessa seção do documento dos PCN.

Em primeiro lugar, é reforçada a importância do bloco temático Tratamento da Informação, do ponto de vista das conexões com as práticas sociais contemporâneas, com inúmeros exemplos de temas com relevância social para serem objeto de pesquisas, projetos e outras atividades pedagógicas, destacando-se em muitos deles o impacto e o papel dos meios de comunicação atuais. Menciona-se, também, a relevância do tratamento da informação pelas suas possíveis articulações com outros campos matemáticos e com outras áreas do saber.

Como justificativa sintética do campo em questão, escreve-se:

> ...os conteúdos estabelecidos no Tratamento da Informação justifica-se por possibilitar o desenvolvimento de formas particulares de pensamento e raciocínio para resolver determinadas situações-problema – as que envolvem fenômenos aleatórios – nas quais é necessário coletar, organizar e apresentar dados, interpretar amostras, interpretar e comunicar resultados por meio da linguagem estatística.
> (BRASIL, 1998, p. 134)

Com relação a conceitos estatísticos básicos são feitas recomendações e sugestões de atividades didáticas no campo do tratamento da informação, a saber: definição precisa do problema a ser analisado, indicando a população a ser observada e as variáveis envolvidas; questões de representatividade da amostra; organização adequada dos dados e observação de aspectos relevantes desses dados; representações convenientes para comunicar e interpretar os dados e formular conclusões e levantar hipóteses; o agrupamento em classes como instrumento de organização e análise de dados; os recursos de visualização mais adequados para apresentação global da informação, a leitura rápida e o destaque dos aspectos relevantes do conjunto de dados; indicadores estatísticos tais como as medidas de tendência central.

Os Principles and Standards do NCTM

O National Council of Teachers of Mathematics – NCTM – é uma associação de professores com enorme influência no ensino de Matemática nos Estados Unidos. Para mencionar apenas as últimas décadas, em 1989, o NCTM elaborou o documento Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, que teve grande impacto nos meios educacionais daquele país, gerando um amplo debate, que resultou, entre outras conseqüências, na elaboração, cerca de dez anos depois, dos Principles and Standards for School Mathematics. Já no primeiro desses documentos, era proposta a introdução de conteúdos de estatística e probabilidade em todas as etapas da escolarização, da educação infantil ao ensino médio. Havia, ainda, um bloco de conteúdos especificamente dedicado à Matemática discreta, abordando temas de princípios de contagem, iteração e recursão e grafos. Nos referenciais curriculares mais recentes, é reiterada a atenção a esses conteúdos, sendo proposto um bloco de conteúdos denominado Análise de Dados e Probabilidade e distribuindo-se os temas relativos à matemática discreta no interior dos demais blocos. Nos parágrafos seguintes, são resumidas as recomendações dos Principles com relação à Análise de Dados e Probabilidade[1].

Um primeiro ponto salientado é a necessidade de articulação entre os conteúdos de análise de dados e os de probabilidade. Outra articulação desejável é entre tais conteúdos e os pertencentes ao demais campos da Matemática – números, álgebra, grandezas e medidas e geometria –, bem como, são relevantes as conexões com outras áreas do conhecimento.

Além disso, é dada ênfase à vinculação dos conteúdos do bloco em causa com os problemas das práticas sociais. É apontada a enorme quantidade de dados a que está exposto o cidadão nos dias atuais e a necessidade de que ele adquira a competência de situar-se criticamente face a esse acúmulo de informações baseadas em dados sobre comportamento do consumidor, preferências políticas, efeitos de medicamentos, evolução dos índices econômicos, e tantas outras.

O estudo da análise de dados e probabilidades deve estar presente em todos os níveis da aprendizagem escolar e defende-se uma abordagem progressivamente mais complexa, desde a educação infantil até o ensino médio, devendo-se: retomar, estender e aprofundar os con-

[1] O texto que se segue envolve tradução de trechos do original, em inglês, que é de responsabilidade dos autores deste trabalho. O original pode ser conhecido, na íntegra, consultando-se a página do NCTM.(www.nctm.org).

ceitos. Deve-se, também, evitar a mera repetição. As recomendações relativas ao bloco de Análise da Dados e Probabilidade são agrupadas em quatro grandes competências a serem gradualmente adquiridas pelos alunos, ao longo dos anos escolares:

A) Formular questões que envolvam a obtenção de dados e coletar, organizar e apresentar dados relevantes para resolver essas questões

Nas fases iniciais da vida escolar as crianças revelam grande curiosidade sobre o mundo que as cerca, em geral, sobre fatos mais próximos de sua experiência. As freqüentes indagações Quantos? Quanto? Quais? De que tipo? fornecem ponto de partida para a análise de dados e probabilidade. O aluno pode se interessar por formular questões ligadas à sua vida ou à de seus colegas. Perguntas do tipo Qual o jogo de que você gosta mais? conduzem à coleta, organização e apresentação de dados relativos à classe ou à escola. Progressivamente, temas mais gerais podem despertar a curiosidade do aluno: reciclagem, preservação da natureza, cuidados com a saúde, entre outros.

Instrumentos de planejamento, coleta, organização e apresentação dos dados provenientes de levantamentos e experimentos devem ser progressivamente introduzidos: questionários, tabelas e gráficos de diversos tipos (pictogramas, de barra, de setores, de linhas, etc.).

Uma idéia importante, a ser gradualmente construída, é a de que coleta, organização e apresentação de dados conduzem a informações esclarecedoras sobre a questão formulada ou sobre o fenômeno em causa. O aluno deve progressivamente desenvolver a competência de representar os dados apresentados em gráficos, tabelas ou outras formas de apresentação e aprender o significado dos números, pontos e símbolos envolvidos. Por exemplo, ele dá um grande passo quando distingue que certos números representam o valor de um dado relativo a uma grandeza observada e outros representam a freqüências com que tal valor numérico ocorre no experimento. Etapas subseqüentes da aprendizagem devem levar à capacidade de ler e interpretar dados expressos em tabelas e gráficos e à comparação entre dois ou mais conjuntos de dados. Propõe-se que o aluno compare as diferentes formas de apresentação de dados e saiba utilizar, inclusive, recursos tecnológicos para reorganizar e representar graficamente os dados.

B) Selecionar e usar métodos estatísticos apropriados para analisar dados

No início, o olhar da criança sobre os dados obtidos em levantamentos pode estar preso ao seu interesse individual. Por exemplo, num gráfico, ela preocupa-se em observar que *Minha* família tem quatro pessoas.... É preciso, então, levar o aluno buscar uma visão do conjunto de dados obtidos e fazer análises mais globais desses dados, sabendo-se, no entanto, que há dificuldades de aprendizagem envolvidas nisso. Por exemplo, concluir da análise de uma tabela ou de um gráfico que a maioria dos seus colegas usa ônibus para ir à escola. Mais tarde é preciso desenvolver outras ferramentas conceituais que permitam caracterizar o conjunto de dados, tais como as medidas de tendência central (média, mediana, moda), as medidas de dispersão (amplitude, desvio padrão) e as propriedades ligadas à curva de distribuição de freqüência dos dados. Ao longo da escolaridade, o aluno deve adquirir a capacidade de realizar comparações estatisticamente válidas. De início, observando que um determinado grupo tem mais ou tem menos de certo atributo do que outro grupo, depois, quantificando essas diferenças por comparação de conceitos estatísticos. As comparações entre conjuntos de dados vão requerendo, gradualmente, a aquisição de outras ferramentas estatísticas como histogramas, entre outros. O estudo introdutório da correlação entre dados relativos a duas grandezas deve fazer parte, também, da formação matemática das séries finais do ensino médio.

C) Desenvolver e avaliar inferências e predições baseadas em dados

O aluno deve progressivamente adquirir conceitos centrais da análise estatística: definir uma amostra apropriada, coletar dados dessa amostra, descrever a amostra e fazer inferências razoáveis relacionando a amostra e a população.

Nas fases iniciais o aluno é exposto a levantamentos censitários, por exemplo, as preferências dos alunos em uma classe. A idéia de que tal classe pode ser vista como amostra dos alunos da escola não é clara nessa fase. Nas fases posteriores, as inferências com base em amostragem vão ganhando corpo, sempre acompanhadas de inúmeras dificuldades de aprendizagem. Muitas dessas dificuldades originam-se na predominância dos julgamentos pessoais a respeito de determinado fenômeno observável sobre a inferência de base estatística. Nos estágios mais avançados, em particular, no fim do ensino médio, o aluno deve compreender a idéia de escolha apropriada da amostra e as maneiras de quantificar quão certo se pode estar ao se fazer uma inferência estatística.

Também nos níveis mais avançados é desejável que o aluno use simulações para conhecer sample distributions e fazer inferências informais. Ele deve, também, adquirir a competência de julgar a validade de argumentos baseados em estatística, cada vez mais freqüentes nos meios de comunicação.

D) Compreender e aplicar conceitos básicos de probabilidade

Probabilidade é vista no documento do NCTM como um dos campos da Matemática com muitas conexões com outros campos dessa ciência, e além disso, como base teórica para a coleta, descrição e interpretação de dados.

Na fase inicial, o tratamento das idéias de probabilidade deve ser informal. Devem ser introduzidas idéias e vocabulário referentes a noções probabilísticas, tais como: É provável que não vá haver aula à tarde; Dificilmente choverá hoje. Experimentos aleatórios simples, como retirar fichas coloridas de uma sacola podem ser realizados para trazer à tona idéias de chance e de acaso. Tais experimentos podem ser mais desenvolvidos nas fases subseqüentes, com moedas, dados, roletas, etc., introduzindo-se a idéia de chance de um evento simples associado ao experimento. Mais adiante, espera-se que o aluno possa calcular a probabilidade de eventos compostos, tais como, a ocorrência de duas caras em 100 lançamentos de duas moedas. devem ser calculadas, bem adquira os conceitos de eventos condicionais e independentes.

O aluno deve gradualmente passar de situações em que a probabilidade de um evento pode rapidamente ser determinada para situações em que é necessário utilizar a amostragem e a simulação para quantificar a chance de um evento incerto.

O experimento com o lançamento de uma moeda é bom exemplo para a discussão dos conceitos fundamentais de probabilidade. Dada uma moeda não viciada, é razoável supor que há a mesma chance de resultar 'cara' ou 'coroa' na face superior da moeda. Num dado lançamento, qual face ficará para cima é imprevisível. Mesmo após 10 aparecimentos consecutivos de 'coroa', no próximo lance o resultado 'coroa' tem apenas 50% de chance de ocorrer, por mais contra-intuitivo que possa parecer. No entanto, se muitos e muitos lançamentos forem feitos, experimentalmente verifica-se que surge um padrão nos resultados obtidos. A idéia de que, nesses casos, eventos individuais não sejam previsíveis, mas que ocorra um padrão no conjunto dos resultados, é um importante conceito que serve de base para o estudo da estatística inferencial.

Considerações finais

A leitura dessas recomendações curriculares revela que os conteúdos de estatística, probabilidade e combinatória, aqui englobados na denominação genérica de tratamento da informação, ocupam um lugar de inegável importância nos objetivos educacionais do ensino básico, fase que corresponde, em geral, aos doze primeiros anos da vida escolar, iniciada aos seis ou sete anos de idade do aluno. O ensino básico, como se percebe, ocorre durante um longo período e abrange fases psicológicas tão distintas quanto infância, adolescência e juventude. Atender à proposta de incluir como componente curricular do ensino básico, em toda a sua extensão, o tratamento da informação constitui-se uma tarefa de extrema complexidade, mas que se impõe como necessidade, pelas demandas sociais contemporâneas, que reclamam os conceitos e procedimentos, nos âmbitos científico e tecnológico e, mais ainda, no cotidiano do cidadão. Necessidade que deriva, também, da idéia, hoje majoritariamente acatada, de que a aprendizagem se dá de forma contínua e por retomadas sucessivas dos conceitos e procedimentos no decorrer de um longo período. Assim, muitos dos conceitos e procedimentos básicos devem se fazer presentes, em diversos graus de extensão e complexidade, desde o início da vida escolar.

Observa-se que, no tocante ao tratamento da informação, é bastante amplo o leque dos conceitos e procedimentos que são recomendados nos documentos expostos. Dada a extensão e a diversidade dos conteúdos propostos, é esperado que surjam muitas indagações sobre aspectos didáticos relativos a esses conteúdos.

Nos capítulos seguintes, foram escolhidos alguns dos temas que têm relação com o ensino do tratamento da informação no ensino básico.

Documentos curriculares consultados

– BRASIL. MEC. SEF (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, MEC/ SEF, Matemática: Primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental.

– BRASIL. MEC. SEF (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, MEC/ SEF, Matemática. Matemática: Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental.

– BRASIL. MEC. SEF (1999a). Guia de livros didáticos – 5a a 8a séries – Matemática. Brasília, MEC/SEF/PNLD.

– BRASIL. MEC. SEF (2000a). Guia de livros didáticos – 1a a 4a séries – Matemática. Brasília, MEC/SEF/PNLD.

– BRASIL. MEC. SEF (2002a). Guia de livros didáticos – 5a a 8a séries – Matemática. Brasília, MEC/SEF/PNLD.

– BRASIL. MEC. SEF (2004). Guia de livros didáticos – 1a a 4a séries – Matemática. Brasília, MEC/SEF/PNLD, Vol. 2.

– BRASIL. MEC. SEF (2005). Guia de livros didáticos – 5a a 8a séries – Matemática. Brasília, MEC/SEF/PNLD.

– BRASIL. MEC. SEMTEC (2005a). Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – Matemática. Brasília, MEC/SEF/PNLEM.

– NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. NCTM. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, VA, USA, 1989.

– NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. NCTM. Principles and Standards for School Mathematics, Reston, VA, USA, 2000.

Capítulo 2

Representações Gráficas e Tabelas

Neste capítulo serão citadas as representações gráficas mais comumente encontras nos meios de comunicação e que podem ser de interesse para o aprendizados dos alunos do ensino básico.

Inicialmente, convém enfatizar que na Matemática estamos acostumadas a fazer *gráfico de funções*, como o gráfico da função seno, por exemplo. Estes gráficos são distintos dos que serão citados neste capítulo, não somente com respeito a forma de fazer (desenhar) o gráfico como também aos objetivos a que se propõem. Entretanto, no contexto do que aqui estamos apresentando usaremos os termos gráficos e representações gráficas de forma análoga. As referências deste capítulo são [Azevedo e Campos, 1987], [Jain, 1991], [Pereira e Tanaka, 1990] e [Giampaoli e Lima, 2004].

Na verdade, representações gráficas podem ser consideradas como a arte de apresentação de dados. Há várias boas razões para se usar representação gráfica em lugar de uma explicação textual: (i) uma figura substitui muitas palavras; (ii) é mais rápido entender as informações correspondentes a elas; (iii) uma representação gráfica podem enfatizar ou esclarecer determinados pontos; (iv) uma figura pode despertar mais o interesse do leitor do que um texto.

Existem vários tipos de representações gráficas, assim, um ponto importante quando da escolha de um deles é saber qual o *tipo de variável* que será exibido:

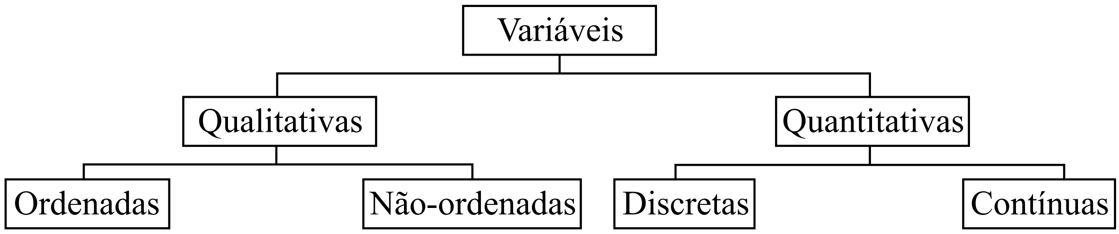


Figura 2.1: *Tipos de Variáveis.*

Variáveis qualitativas, que também são chamadas de *categóricas*, têm *estados*, *níveis* ou categorias que são definidas por um conjunto de subclasses mutuamente exclusivas e exaustivas. Estas subclasses podem ser ordenadas ou não-ordenadas.

Exemplo 2.1: Variável qualitativa ordenada

• Nível de escolaridade dos pais dos alunos de um dado colégio.

Exemplo 2.2: Variável qualitativa não-ordenada

• Diferentes regiões geográficas do Brasil.

Nas variáveis quantitativas os níveis são expressos numericamente. Há dois tipos de variáveis quantitativas: discretas e contínuas. Geralmente as discretas (números inteiros) estão associados a problemas de contagem e as contínuas (números reais) a resultados de mensurações sobre o mundo físico. Voltando ao Capítulo 2, as variáveis quantitativas contínuas, que são números reais, são as passíveis de erros numéricos quando representadas em computadores.

Exemplo 2.3: Variável quantitativa discreta

• Número de alunos de dado colégio.

Exemplo 2.4: Variável quantitativa contínua

• Altura dos alunos da 5ª série.

A representação de dados estatísticos usualmente é feita por meio de tabelas ou de gráficos. Entre os gráficos mais comumente encontradas são: (i) lineares, (ii) colunas, (iii) barras, (iv) setograma, (v) cartograma e (vi) pictórico. No capítulo seguinte o leitor encontrará o histograma, que é um tipo de gráfico de coluna associado a tabela de distribuição de freqüências.

A seguir são apresentados exemplos de tabelas e gráficos. Os dados estatísticos representados foram extraídos do site http://www.ibge.gov.br, exceto no caso da Tabela 2.2 e do Figura 2.5, que foram obtidos de recente trabalho acadêmico e Figura 2.6 (pictograma) disponível em http://www.uaq.mx/matematicas/estadisticas/xu3.html [1].

Tabela 2.1: *Contas nacionais*

CONTAS NACIONAIS					
Agregados macroeconômicos	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**
Produto interno bruto					
valor (1.000.000 R$)	963 846	1 101 255	1 198 736	1 346 028	1 556 182
Per capita (R$)	5 771	6 430	6 896	7 631	8 694
Renda nacional bruta (1.000.000 R$)	939 739	1 068 658	1 153 452	1 294 084	1 501 032
Renda disponível bruta (1.000.000 R$)	942 766	1 071 448	1 157 318	1 301 351	1 509 785
Poupança bruta (1.000.000 R$)	150 238	190 793	200 817	249 212	317 172
Capacidade (+) ou necessidade (-) de					
financiamento (1.000.000 R$)	- 46 051	- 45 963	(-)53 409	(-)15 434	11 193

Tabela 2.2: *Percentual de professores em relação ao nível de conhecimento do PCN Matemática, segundo tempo de graduação, na rede de ensino básico do Rio de Janeiro*

Conhecimento do PCN	**Tempo como graduado**			
	Até 5 anos	De 5 a 10 anos	De 10 a 15 anos	De 15 a 20 anos
Profundamente	1	0,8	5,3	10
Parcialmente	69	93	89,5	89
Não conheço	30	6,3	5,3	1

Os dados contidos em tabelas, na maioria das vezes, não propiciam um rápido entendimento das informações nelas contidas. Gráficos, surgem então como um recurso para resolver esse problema. Para ilustrar tal fato, observe que as informações sobre o PIB do Brasil contidas na primeira linha da Tabela 2.1 ficam mais claras no gráfico a seguir apresentado.

[1] Ortigão, M.I.R., *Currículo de Matemática e desigualdades educacionais*, Tese de Doutorado, PUC/DE-Rio de Janeiro, 2005.

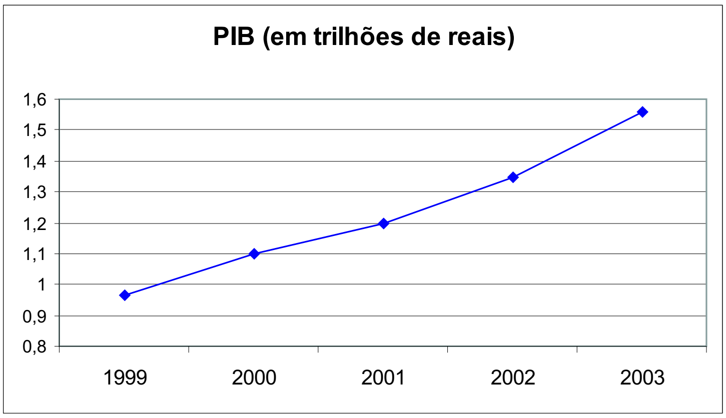
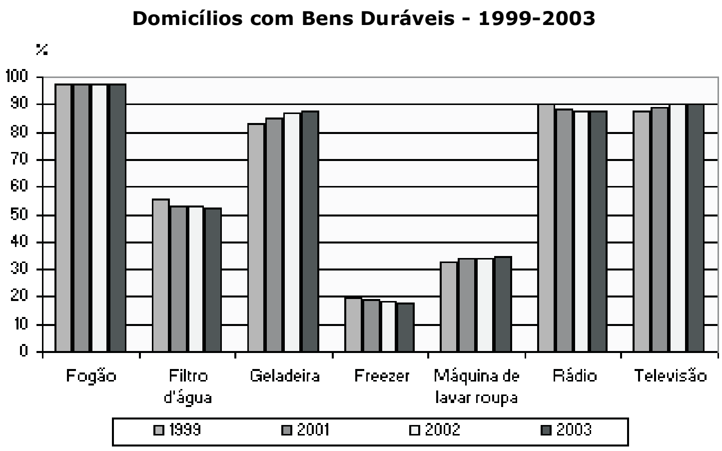


Figura 2.2: *Gráfico linear*



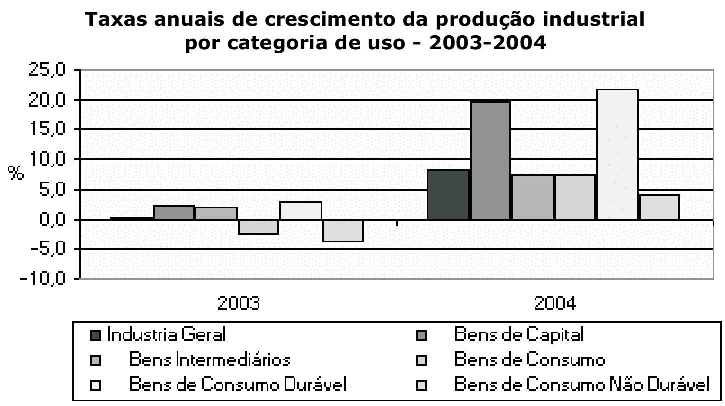


Figura 2.3: *Gráficos de colunas*

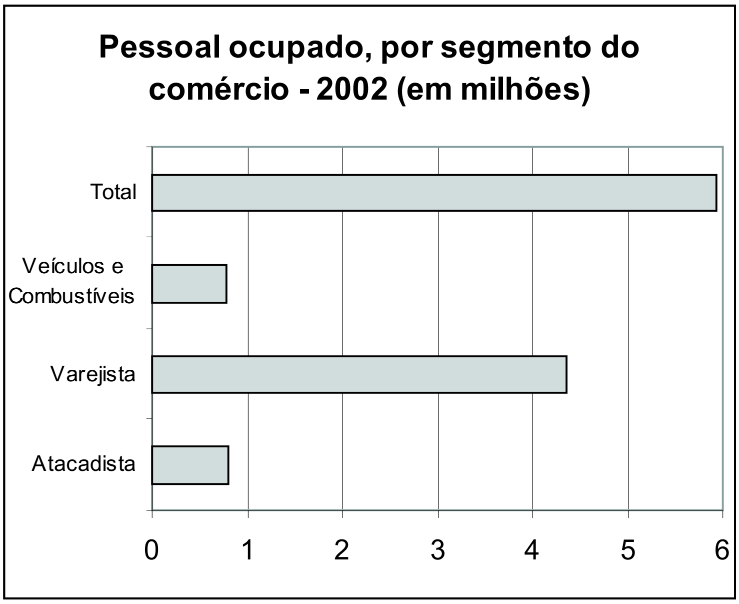


Figura 2.4: *Gráfico de barras*

Figura 2.5: *Gráfico de setores*

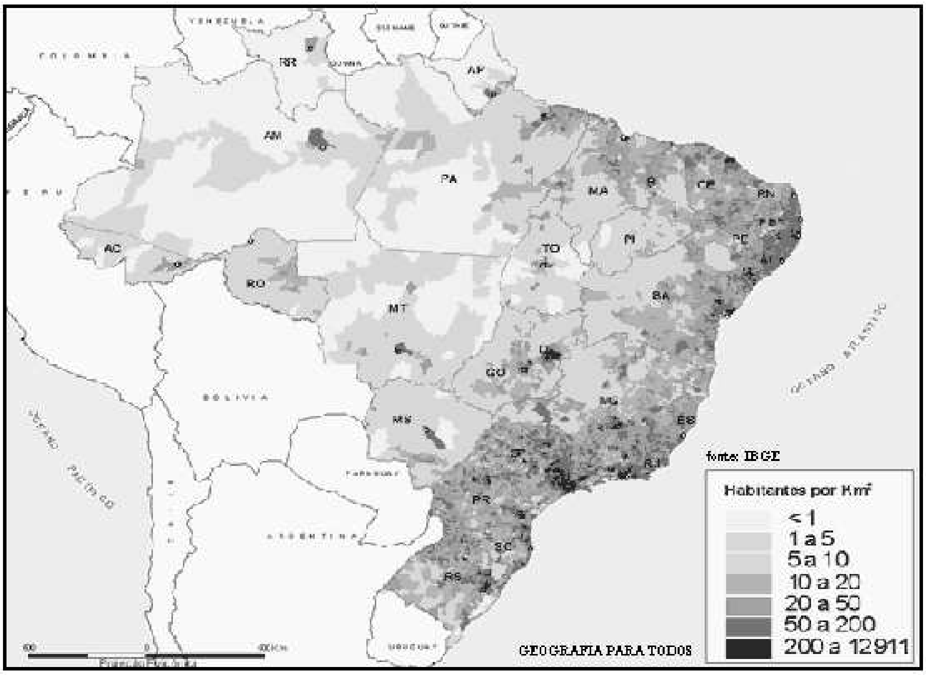


Figura 2.6: *Cartograma – Densidade demográfica do Brasil*

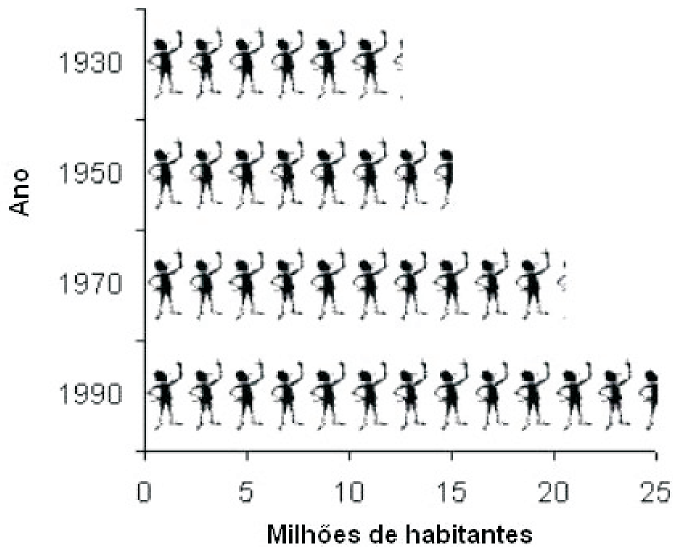


Figura 2.7: *Pictograma – População dos Estados Unidos*

Como sugestões para a preparação de boas representações gráficas, vamos usar a idéia de máximos e mínimos:

- MINIMIZAR o esforço que o leitor vai fazer para entender o gráfico;
- MINIMIZAR ambigüidades;
- MINIMIZAR quantidade de tinta e excesso de cores;
- MAXIMIZAR a informação.

A seguir são apresentados erros comuns na elaboração de gráficos.

- apresentar muitas alternativas em um único gráfico. [Jain, 1991] sugere que o gráfico de linhas tenha no máximo 6 curvas; o de colunas, ou barras no máximo 10 colunas ou barras; o de setor no máximo 8 componentes.
- representar muitas variáveis y em um único gráfico;
- usar símbolos em lugar de texto;
- selecionar escala inapropriada;
- representar valores incorretos;
- escolher representação gráfica inadequada.

Gráficos e tabelas constituem-se ferramentas úteis para representação e apresentação de dados. São fáceis de fazer e representações gráficas podem ser extremamente criativas. Geralmente informações que constam em uma tabela podem ser exibidas em uma específica representação gráfica ou vice-versa. Quem sabe não seria possível propor desafios entre os alunas envolvendo a dupla (Desenho $\times$ Tratamento da Informação)!?

Capítulo 3

Estatística Descritiva

Neste capítulo são apresentados os indicadores, ou medidas, estatísticos mais usuais: média (aritmética), mediana, moda, variância, desvio padrão, coeficiente de variação e os quantis ou separatrizes, que são os quartis, decis e percentis ou centis. Além destes indicadores também apresenta-se o histograma. Estes indicadores estatísticos, ou estatísticas descritivas, são úties quando o objetivo é comparar as notas de duas turmas, ou o desempenho das alunas em um exercício escolar ou até para classificar os alunos dentro da sua turma. As referências utilizadas foram [Azevedo e Campos, 1987], [Jain, 1991] e [Pereira e Tanaka, 1990].

A primeira decisão quando se tem um conjunto de medições para serem analisadas, no contexto do que aqui está sendo abordado, é se o computador será usado ou não. Se SIM, o professor ou alunos poderão efetuar seus cálculos e fazer gráficos usando os *softwares* (ou aplicativos) de que dispõem, porque, neste caso *não é necessário agrupar os dados*. Se NÃO, na maioria das vezes, dependendo do tamanho do arquivo de dados, *é imprescindível agrupar os dados* (a suposição é que todos temos um tempo finito para realizar nossas pesquisas!!!). Entretanto, na nossa opinião, mesmo que existam recursos computacionais disponíveis é IMPORTANTE saber como tratar os dados. A situação é similar a, para quem mora em edifícios, usar o elevador sabendo que, em situações de emergência, existe a escada.

Agrupar os dados implica em dispor os dados numa tabela de distribuição de freqüências para, a partir desta, usando fórmulas adequadas, obter os índices de interesse e fazer o histograma, que é o gráfico de uma distribuição de freqüências.

Exemplo 3.1: Os dados a seguir são de [Jain, 1991], página 195. Correspondem a medições de tempo de CPU (Central Processor Unity = Unidade Central de Processamento) em segundos (s):

3.1	4.2	2.8	5.1	2.8	4.4	5.6	3.9
3.9	2.7	4.1	3.6	3.1	4.5	3.8	2.9
3.4	3.3	2.8	4.5	4.9	5.3	1.9	3.7
3.2	4.1	5.1	3.2	3.9	4.8	5.9	4.2

Estes dados, $x_1, x_2, \ldots, x_N$, $N = 32$, foram agrupados na Tabela 4.1, onde tem-se $k = 5$ classes com limites inferiores l_i, $i = 1, \ldots, 5$ e limites superiores, L_i, respectivamente $1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.4$ e $2.4, 3.4, 4.4, 5.4, 6.4$ e freqüências absolutas, $f_i = 1, 10, 11, 8, 2$ sendo as amplitudes, $h_i = L_i - l_i$, são todas iguais a 1.

Tabela 3.1: *Distribuição de freqüências dos tempos da CPU, em segundos.*

Classes	Freqüência
$1.4 \vdash 2.4$	1
$2.4 \vdash 3.4$	10
$3.4 \vdash 4.4$	11
$4.4 \vdash 5.4$	8
$5.4 \vdash 6.4$	2
Total	32

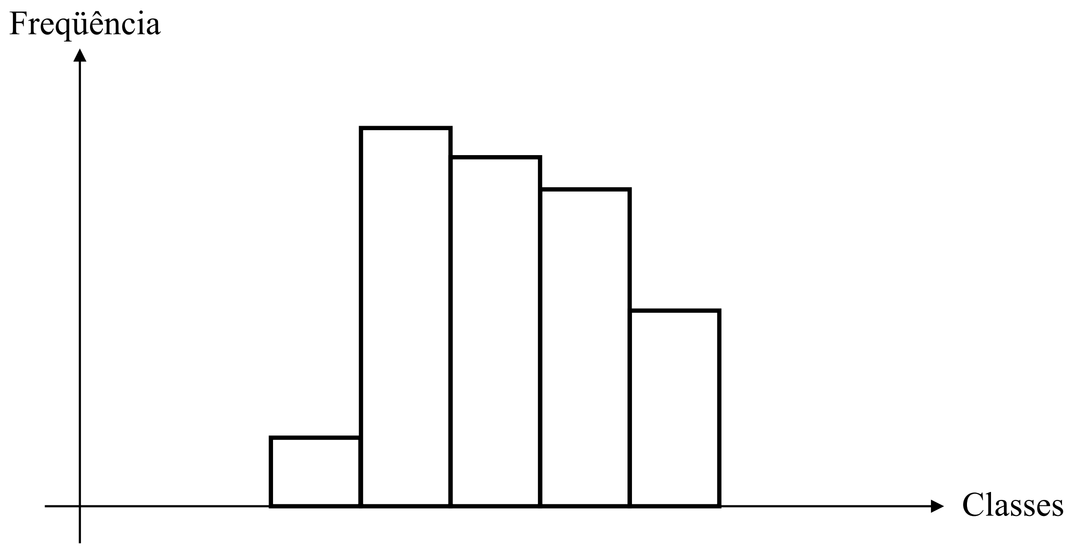


Figura 3.1: *Histograma com os dados da Tabela 4.1.*

Com os dados da Tabela 4.1 foram calculados os estatísticos descritivos usuais:

$$\text{Média} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i = 3.9s.$$

$$\text{Mediana} = l_i + \frac{\frac{1}{2}N - \sum f_{\text{ant}}}{f_{\text{Mediana}}} h_i = 3.9s, \tag{3.1}$$

onde $\sum f_{\text{ant}}$ é o somátorio das freqüências anteriores à classe da mediana e f_{Mediana} é a freqüência da classe da mediana.

$$\text{Moda} = l_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1})} h_i = 3.6s.$$

$$\text{Variância} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 f_i = 0.94s^2.$$

$$\text{Desvio padrão} = +\sqrt{\text{Variância}} = 0.97s.$$

$$\text{Coeficiente de variação} = \frac{\text{Desvio Padrão}}{\text{Média}} = 0.2s.$$

Obviamente, os valores podem diferir se esses indicadores forem calculados sem usar a distribuição de freqüências. Por exemplo, no caso da Moda tem-se 2.8 e 3.9 como modas, pois ambos repetem-se três vezes. A variância e desvio padrão são as mais usadas medidas de dispersão, em particular o desvio padrão pois este tem a mesma unidade de medida de média, o que facilita comparar a dispersão dos dados. O coeficiente de variação é adimensional, portanto pode ser usado para comparar grandezas distintas. Por exemplo, é possível comparar o peso dos alunos da 3ª série do ensino fundamental com a idade dos mesmos alunos.

O cálculo dos indicadores estatísticos mais usuais envolve apenas as operações aritméticas, mas, do ponto de vista de interpretação de resultados estes indicadores podem ser associados, inclusive, com a tomada de decisões.

3.1 Separatrizes

A fórmula da mediana é particularmente interessante porque com uma pequena mudança de enfoque é possível calcular qualquer separatriz, isto é, quartis $(Q_1, \ldots, Q_3)$, decis $(D_1, \ldots, D_9)$ e percentis $(P_1, \ldots, P_{99})$. Na verdade a mediana também é uma separatriz (Mediana$= Q_2 =$

$D_5 = P_{50}$). Por exemplo, se o objetivo é calcular D_3 então calcula-se $\frac{3}{10}32$ e a fórmula (4.1) assume os valores

$$D_3 = 2.4 + \frac{9.6-1}{10}1 = 3.3s.$$

O cálculo do percentíl de ordem 90 corresponderá a $\frac{90}{100}32 = 28.8$ e

$$P_{90} = 4.4 + \frac{28.8-22}{8} = 5.3s.$$

O cálculo de separatrizes permite classificar um conjunto de dados de acordo com algum tipo de critério. Por exemplo, se a professor deseja saber qual foi a menor nota entre os 25% melhores alunos da sua turma deve calcular D_3 ou P_{75}; D_1 responderia sobre qual a menor nota entre 25% alunos mais fracos ou qual a maior nota entre os 75% alunos mais adiantados.

Cálculo de separatrizes são interessante porque podem, e devem, ser associados ao conceito de frações, isto é, divisão do inteiro em um dado número de partes. Por exemplo, na fórmula (3.1), N representa o inteiro. Assim, se o objetivo é calcular D_2, então calcula-se $\frac{2}{10}N$ que apontará em que classe na distribuição de freqüência D_2 encontra-se.

Exemplo 3.2: Este exemplo mostra como cálculo de separatrizes pode ser útil para classificar os elementos de uma mostra (ou população). Sejam as seguintes notas:

8.3	6.8	6.9	9.4	8.5	6.1	3.0	8.5	5.9	8.2	
7.6	8.2	6.7	8.3	7.0	6.4	9.8	7.4	9.0	6.2	
7.6	10.0	7.5	8.4	6.5	6.2	1.3	8.8	7.7	5.1	
6.5	7.2	8.4	6.2	6.6	7.6	8.2	10.0	10.0	5.7	7.5

Vamos responder às seguintes questões, mas sem usar as fórmulas vistas anteriormente, isto é, sem construir uma distribuição de freqüências.

(a) Qual a menor dentre as 5% melhores notas?

(b) Qual a nota mais alta dentre as 25% menores notas?

Jain [Jain, 1991], na página 194, sugere que as α-separatrizes podem ser estimadas ordenando as observações e tomando o elemento $(n-1)\alpha+1$ no conjunto ordenado. Portanto, ordenando o conjunto acima:

1.3	3.0	5.1	5.7	5.9	6.1	6.2	6.2	6.2	6.4	
6.5	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0	7.2	7.4	7.5	
7.5	7.6	7.6	7.6	7.7	8.2	8.2	8.2	8.3	8.3	
8.4	8.4	8.5	8.5	8.8	9.0	9.4	9.8	10.0	10.0	10.0

(a) $(41-1)\frac{95}{100}+1=39$. Logo $\text{Percentil}_{95}=10$.

Isto é, a menor nota dentre as 5% melhores é 10.

(b) $(41-1)\frac{25}{100}+1=11$. Logo, o $\text{Quartil}_1=\text{Percentil}_{25}=6.5$.

Portanto, a maior das 25% menores notas é 6.5.

Capítulo 4

Noções Básicas de Probabilidades

Neste capítulo são dadas definições da função probabilidade, exemplos e propriedades decorrentes da definição axiomática. As principais referências para este capítulo são [Campos, 2005], [James, 1981], [Meyer, 1983].

Questões em probabilidade em situações práticas basicamente constituem-se, como seria o esperado, em como calcular probabilidades. Aí é onde a situação se complica. Se o espaço amostral é finito, podemos usar a definição clássica e a "complicação" consiste em contar, o que implica no uso de técnicas de *análise combinatória*, que, não são fáceis. Se o problema envolve "volumes de sólidos", é possível, em algumas situações, usar as chamadas *probabilidades geométricas* e o problema está resolvido. Se o espaço amostral é enumerável, conhecimentos sobre *progressões geométricas* adquiridos no ensino básico resolvem alguns problemas. Uma outra forma para calcular probabilidades é usar a freqüência relativa como sendo a probabilidade para um dado evento. Nesse caso teríamos que ter um "grande número de observações", mas, o que é $\cdots$ "grande"? A construção axiomática da teoria da probabilidade, abstrai o cálculo de probabilidades de casos particulares e nos provê de um método formal para resolver problemas probabilísticos.

Vamos supor que, por alguma razão, estamos interessados em contar quantas pessoas imprimem seus arquivos em uma das impressoras de um centro acadêmico. Notem que, mesmo a escolha da impressora já é díficil de predizer. Essa escolha depende de diversos fatores. Experimentos como esse requerem uma modelagem diferente. Tais **experimentos** são ditos **aleatórios** e, é com esses, que nos preocuparemos doravante. Uma das características de um experimento aleatório é que o mesmo apresenta um conjunto de possíveis resultados. Esse conjunto em probabilidade é denominado de *espaço amostral*.

Espaço amostral, Ω.

Eventos são subconjuntos de Ω. Ω, evento certo. $\emptyset$, evento impossível. $\{\omega\}$, evento elementar ou simples, onde $\omega \in \Omega$.

Portanto, os termos básicos no começo do estudo de probabilidade são:

- experimento aleatórios;
- espaço amostral;
- eventos.

Exemplo 4.1: Descreva um espaço amostral para cada um dos experimentos abaixo

(a) *Strings* de dígitos binários são gerados até que pela primeira vez o mesmo resultado apareça duas vezes em sucessão.

(b) *Strings* de dígitos binários são geradas até que o dígito 1 apareça pela primeira vez.

(c) *Strings* de 3 dígitos binários são geradas. Observe as seqüências de zeros e uns.

(d) Conte o número de zeros em uma *string* de dígitos binários com 3 dígitos.

4.1 Definições

4.1.1 Frequentista (freqüência relativa)

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}, \tag{4.1}$$

onde n_A é o número de ocorrências de A em n ensaios independentes do experimento (teoria baseada na observação).

Exemplo 4.2: Sejam a, b, k, n, N inteiros positivos tais que $a, b, N \geq 2$, $k = 1, \cdots, b-1$, $n = 1, \cdots, N$. Seja $N(k)$ o número de vezes que k aparece como o primeiro dígito de $\{a^n\}_{n=1}^{N}$

na base b. Sabe-se que

$$\lim_{N\to\infty} N(k)/N = \log_b(1+1/k). \tag{4.2}$$

As Tabelas 4.1 e 4.2 abaixo apresentam resultados computacionais para k, $N(k)$ e

$$P(k,N) = N(k)/N,$$

que é a freqüência relativa, onde $b = 10$, $N = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ $a = 2,3$. A Tabela 4.3 exibe valores numéricos aproximados para o resultado teórico,

$$\log_b(1+1/k).$$

Tabela 4.1: k, $N(k)$ e $P(k,N)$ para 2^n, $n = 1,\cdots,N$ e $N = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$

k	$N(k)$	$P(k,10^2)$	$N(k)$	$P(k,10^3)$	$N(k)$	$P(k,10^4)$	$N(k)$	$P(k,10^5)$
1	30	0.30	301	0.301	3010	0.3010	30103	0.30103
2	17	0.17	176	0.176	1761	0.1761	17611	0.17611
3	13	0.13	125	0.125	1249	0.1249	12492	0.12492
4	10	0.10	97	0.097	970	0.0970	9692	0.09692
5	7	0.07	79	0.079	791	0.0791	7919	0.07919
6	7	0.07	69	0.069	670	0.0670	6695	0.06695
7	6	0.06	56	0.056	579	0.0579	5797	0.05797
8	5	0.05	52	0.052	512	0.0512	5116	0.05116
9	6	0.05	45	0.045	458	0.0458	4576	0.04576

Tabela 4.2: k, $N(k)$ e $P(k,N)$ para 3^n, $n = 1,\cdots,N$ e $N = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$

k	$N(k)$	$P(k,10^2)$	$N(k)$	$P(k,10^3)$	$N(k)$	$P(k,10^4)$	$N(k)$	$P(k,10^5)$
1	28	0.28	300	0.300	3007	0.3007	30101	0.30101
2	19	0.19	177	0.177	1764	0.1764	17611	0.17611
3	12	0.12	123	0.123	1247	0.1247	12492	0.12492
4	8	0.08	98	0.098	968	0.0968	9693	0.09693
5	9	0.09	79	0.079	792	0.0792	7916	0.07916
6	7	0.07	66	0.066	669	0.0669	6697	0.06697
7	7	0.07	59	0.059	582	0.0582	5798	0.05798
8	5	0.05	52	0.052	513	0.0513	5116	0.05116
9	5	0.05	46	0.046	458	0.0458	4576	0.04576

Tabela 4.3: Valores numéricos aproximados para os resultados teóricos

k	$\log(1+1/k)$
1	0.30103000
2	0.17609126
3	0.12385164
4	0.09691001
5	0.07918125
6	0.06818586
7	0.05690485
8	0.05115250
9	0.04532298

Seja $S_{2,10^5} = \sum_{k=1}^{9} x_{10^5,k}^2$, onde $x_{10^5,k}$ é o quadrado da diferença entre o valor teórico aproximado e o resultado computacional para $k = 1, \cdots, 9$ quando $a = 2$ and $N = 10^5$. Vemos que $S_{2,10^5} \approx 0$ [Campos, Maranhão e Mendonza, 1999].

4.1.2 Clássica

$$P(A) = \frac{n_A}{n},$$

onde n é o número de resultados *possíveis* e n_A , o número de resultados *favoráveis* a A dentre o número de resultados possíveis. Baseia-se na idéia de resultados igualmente prováveis. A definição pode ser aplicada apenas a uma classe limitada de problemas, isto é, aqueles onde é possível contar os elementos do espaço amostral, Ω, e do evento A. Nessa contagem a técnica usada é Análise Combinatória.

Exemplo 4.3: No Brasil, a placa dos automóveis é uma *string*, na qual os 3 primeiros elementos são letras escolhidas dentre as 26, e, os 4 últimos, dígitos na base decimal.

(a) Qual é o número máximo de automóveis que podem ser emplacados neste sistema?

(b) Qual é a probabilidade de que uma placa seja iniciada pela letra K?

Exemplo 4.4: Um poliedro com k faces, $k > 3$, rotuladas $f_1, f_2, \cdots, f_k$ é atirado aleatoriamente em um plano, sendo observada a face tangente ao mesmo.

(a) Descreva o espaço amostral.

(b) Seja o evento A, a face voltada para baixo não excede o número $k/2$. Descreva A.

(c) Calcule $P(A)$ para um icosaedro, dodecaedro e octaedro.

4.1.3 Geométrica

Considerando o espaço amostral constituído de objetos geométricos tais como pontos, retas e planos, a obtenção de probabilidades, nesse caso, é referenciada na literatura como problemas de *probabilidade geométrica*. Portanto, dado um certo evento A, nesse contexto, de modo geral,

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

desde que todas as medidas estejam bem definidos. Enfatiza-se que o termo *medida* pode significar comprimento, área ou volume.

A definição geométrica de probabilidade pode ser usada somente quando a probabilidade de acessar qualquer parte de um certo domínio é proporcional ao tamanho deste domínio (comprimento, área, volume, etc.) e é independente da sua posição e forma.

Exemplo 4.5: Um ponto é escolhido aleatoriamente no quadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Encontre a probabilidade de que o ponto pertença a região limitada por $x \geq 1/2$ e $x+y \geq 1/3$.

O cálculo de probabilidades através das definições geométrica e clássica utiliza conhecimentos de geometria e análise combinatória, conhecimentos estes que fazem parte dos programas de Matemática do ensino básico. O cálculo da probabilidade freqüentista (o limite da freqüência relativa) pode ser realizado usando-se um gerador de números aleatórios, um tabela de números aleatórios ou até lançando-se uma moeda!

4.1.4 Axiomática (A. N. Kolmogorov, 1933)

Seja Ω um espaço amostral e $\mathcal{A}$, uma σ-álgebra construída a partir de Ω. Seja P uma medida, $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, satisfazendo aos seguintes axiomas:

(i) $P(A) \geq 0$.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) Se $A_1, A_2, \ldots$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$, então

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Equivalentemente, probabilidade também pode ser definida pelos axiomas:

(i) $P(A) \geq 0$.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) Seja $A_1, A_2, \ldots A_n$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$. Então

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(iv) Seja $A_1, A_2, \ldots$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, com $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Então

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

O axioma (iv) é denominado de continuidade no vazio.

A terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ é chamada de **espaço de probabilidade**. Intuitivamente quando se modela um problema através de probabilidade, basicamente, o que se faz é especificar cada uma das componentes da terna acima.

Eventos são os elementos de $\mathcal{A}$, aos quais se pode atribuir probabilidade. Probabilidade é uma função cujo argumento é um conjunto. Portanto, não somente conjuntos, como também as operações sobre eles, tem uma importância fundamental em teoria da probabilidade. Entretanto, é preciso que a linguagem de conjuntos seja traduzida para a linguagem de probabilidade. A Tabela 5.4, a seguir, exibe algumas dessas traduções. A idéia subjacente é que um experimento aleatório foi realizado e aconteceu algum evento.

Tabela 5.4: Interpretações interessantes

Ω	conjunto universo	espaço amostral, evento certo
ω	elemento	evento elementar
A	conjunto A	evento A
$\emptyset$	conjunto vazio	evento impossível
A^c ou $\overline{A}$	complemento de A	não ocorreu o evento A
$A \cap B$	A intercessão B	os eventos A e B ocorreram
$A \cup B$	A união B	os eventos A ou B ocorreram
$\cap_n A_n$	intercessão dos conjuntos A_n	todos os eventos A_n ocorreram
$\cup_n A_n$	união dos conjuntos A_n	ao menos um dos eventos A_n ocorreu

A notação usada neste capítulo é a comumente encontrada nos livrso de probabilidade. Entretanto, fora do contexto de probabilidade, é possível, aliás quase certo, encontrar notação distinta. Por exemplo, em [Russel e Norvig, 1995] tem-se $P(A \vee B)$, $P(A \wedge B)$ e $P(\neg A)$ para $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$ e $P(A^c)$.

Capítulo 5

Números de Ponto Flutuante

Neste capítulo será mostrado como os números reais $\mathbb{R}$, são representados nos computadores, porque têm de ser representáveis e exemplos de propriedades algébricas dos reais que são perdidas com essa representação. A bibliografia deste capítulo é [Claudio e Marins, 1994], [Ruggiero e Lopes, 1988] e [Santos e Silva, 2002].

É importante chamar a atenção para as limitações dos computadores com respeito à computação científica, isto é, operar com os números reais em computadores. Esta é a razão deste capítulo com noções sobre números de ponto flutuante. Adicionalmente a realização de experimentos no mundo físico pode originar medições que precisem ser representados e analisados, o que atualmente, geralmente, é feito em computadores.

Um primeiro tipo de informação a ser tratada é o número que é armazenado e processado nos computadores. Basicamente, este número pode vir de uma regra de contagem ou ser mensuração de uma grandeza física. No último caso tem-se um número real, o que significa *um problema básico de computação numérica*, ao qual também está associado um *erro numérico*.

5.1 Erros Numéricos

Os *erros numéricos* mais comumente citados são:

- **Inerente**. Se o problema é calcular a área de um círculo de raio 6, na fórmula $c = \pi r^2$, π deve ser representado por um número. A questão crucial é que o conjunto dos números disponíveis em qualquer computador é finito, assim como é finita a excursão de qualquer elemento deste conjunto. Em outras palavras, o modelo da Matemática, o conjunto dos números reais, longe está de ser representável (e operável) por qualquer computador. Portanto, expressões como "*para todo x real ...*" ou "*seja x um número real tal que ...*" não têm sentido em computações que exigem um processamento numérico automático, incluindo desde as calculadores que realizam apenas as operações aritméticas básicas, aos computadores dos centros científicos.

- **Truncamento**. Como calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$? Não sendo praticamente possível realizar tal feito, o que se faz é truncar a expressão acima, isto é, trocá-la, por exemplo, $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n!}$.
- **Arredondamento**. Este erro está associado ao tamanho da palavra na máquina. Será visto a seguir.

Por último, lembramos que além dos tipos de erros numéricos mencionados acima, o processamento numérico nos computadores é realizado na base 2, Figura 5.1, portanto, adicionalmente ainda tem-se o *erro de conversão da base.*

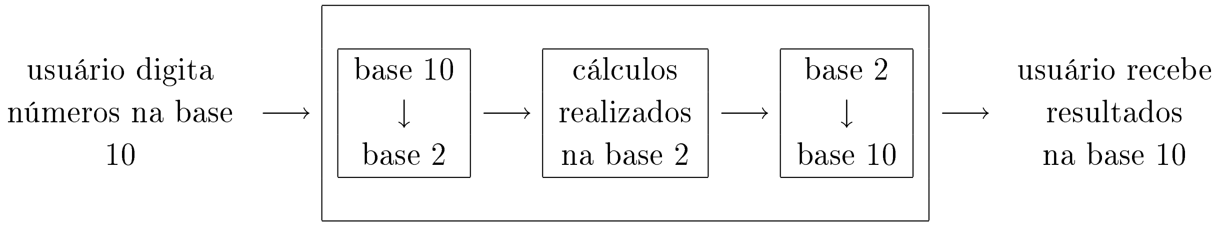


Figura 5.1: *Seqüência de passos para processamento numérico.*

O conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo. O fato dos reais constituírem um corpo possibilita que nele sejam resolvidas equações dos tipo $ax = b$, $a \neq 0$, onde a solução única é $x = a^{-1}b$. Como é completo, equações do tipo $x^2 = 2$ tem solução. Por razões de ordem prática, os computadores, em geral, representam constante de bits.

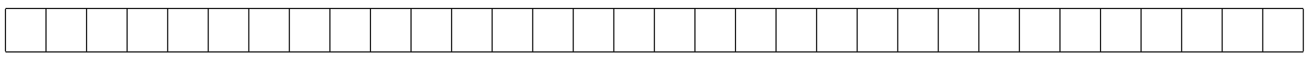


Figura 5.2: *Um byte com 32 bits.*

No caso dos reais é necessário substituí-los por um outro conjunto que os represente, usualmente o dos números de ponto flutuante. O problema porém é que o conjunto dos números de ponto flutuante, diferentemente dos reais, não tem propriedades algébricas que garantam os resultados dos cálculos efetuados. Por exemplo, a soma de dois números de grande magnitude pode dar *overflow*, ou seja, nem sempre a soma de dois números de ponto flutuante é sequer um número de ponto flutuante.

5.2 Ponto Flutuante

Definição 5.1: Um *número de ponto flutuante*, x, é da fórmula

$$x = m \times b^e = \pm 0 \cdot d_1 d_2 \cdots d_l \times b^e,$$

onde m é uma mantissa de comprimento l, b é a base, a qual é um inteiro maior ou igual a $2, e$ é o expoente, tal que $e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$ são números inteiros. Os dígitos da mantissa são restritos a $1 \leq d_1 \leq b-1$ e $0 \leq d_i \leq b-1$, $i = 2, \ldots, n$. Porque $d_1 \neq 0$, x é denominado um número de *ponto flutuante normalizado*. Um *sistema de ponto flutuante*, F, é usualmente representado por

$$F = F(b, l, e_{\min}, e_{\max}).$$

A representação do 0 (zero real) é

$$0 = +0 \cdot 000 \cdots 0 \times b^{e_{\min}}.$$

Os elementos de menor, $x_{\min}$, e maior, $x_{\max}$, valor absoluto em F são,

$$\begin{aligned} x_{\min} &= +0 \cdot 10 \cdots 0 \times b^{e_{\min}}, \\ x_{\max} &= +0 \cdot (b-1)(b-1) \cdots (b-1) \times b^{e_{\max}}. \end{aligned}$$

O número de elementos de F, $\# F$, é

$$\# F = 2(b-1) b^{l-1} (e_{\max} - e_{\min} + 1) + 1,$$

isto é, F tem um número finito de elementos!

O termo *número de ponto flutuante* deve-se ao fato de que o ponto se move no número dependendo do expoente da base. Alguns autores usam a vírgula ao invés do ponto; neste trabalho adotou-se o ponto que é a notação usada nas máquinas digitais.

Exemplo 5.1: Seja o sistema de ponto flutuante $F = F(2, 3, -1, 2)$. Portanto F tem base 2 (binária), a mantissa tem 3 dígitos, o menor expoente é $e_{\min} = -1$ e o maior expoente $e_{\max} = 2$, assim a excursão do expoente vai de -1 e 2 e *todos* os expoentes deste sistema são $\{-1, 0, 1, 2\}$, isto é, tem-se um total de 4 expoentes, que vem do cálculo $e_{\max} - e_{\min} + 1$. Para este sistema tem-se:

- representação do zero: $0 = +0.000 \times 2^{-1}$;
- maior elemento de $F : x_{\max} = +0.111 \times 2^2$;
- menor elemento de $F : -x_{\max} = -0.111 \times 2^2$;
- menor elemento positivo de $F : x_{\min} = +0.100 \times 2^1$;
- maior elemento negativo de $F : -x_{\min} = -0.100 \times 2^1$;
- número de elementos de $F : \# F = 33$.

Exemplo 5.2: Considerando $F = F(10, 5, -98, 100)$. Neste caso a base é decimal, tem-se 5 dígitos na mantissa a excursão do expoente varia de -98 a 100.

- $0 = 0.00000 \times 10^{-98}$;
- $x_{\max} = +0.99999 \times 10^{100}$;
- $-x_{\max} = -0.99999 \times 10^{100}$;
- $x_{\max} = +0.10000 \times 10^{-98}$;
- $-x_{\min} = -0.10000 \times 10^{-98}$;
- $\# F = (2(10-1)10^{5-1}(100-(-98)+1)) + 1 = 32820001$.

O leitor já pode concluir dos exemplos anteriores que tem-se um número finito de números reais possíveis de serem representados em um sistema de ponto flutuante. O subconjunto de $\mathbb{R}$ que é representável em F são números não-igualmente espaçados localizados na região hachuriada mais o zero.

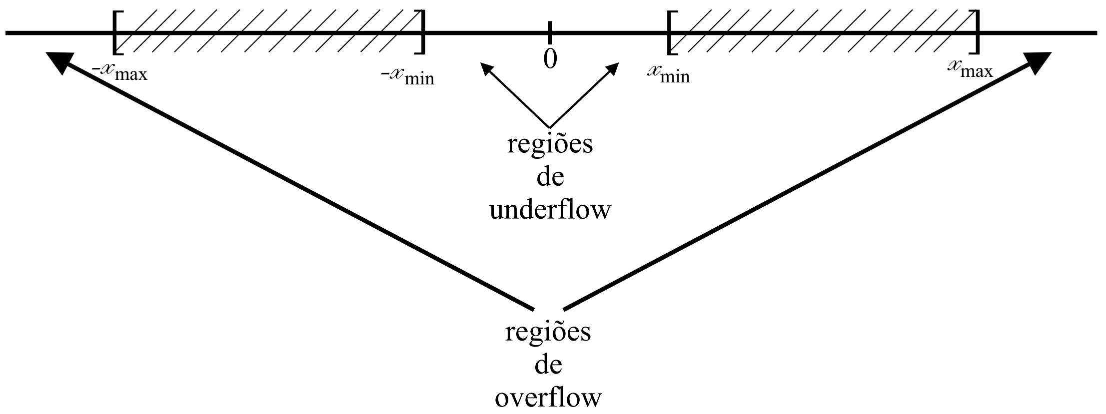


Figura 5.3: *Distribuição dos números de ponto flutuante na reta.*

Exemplo 5.3: No sistema $F = F(2, 3, -1, 2)$ tem-se:

$$\begin{array}{lcl}
0.100 \times 2^{-1} & = & 0.25 \\
0.101 \times 2^{-1} & = & 0.3125 \\
0.110 \times 2^{-1} & = & 0.375 \\
0.111 \times 2^{-1} & = & 0.4375 \\
0.100 \times 2^{0} & = & 0.5 \\
0.101 \times 2^{0} & = & 0.625 \\
0.110 \times 2^{0} & = & 0.75 \\
0.111 \times 2^{0} & = & 0.875 \\
0.100 \times 2^{1} & = & 1 \\
0.101 \times 2^{1} & = & 1.25 \\
0.110 \times 2^{1} & = & 1.5 \\
0.111 \times 2^{1} & = & 1.75 \\
0.100 \times 2^{2} & = & 2 \\
0.101 \times 2^{2} & = & 2.5 \\
0.110 \times 2^{2} & = & 3 \\
0.111 \times 2^{2} & = & 3.5
\end{array}$$

Portanto, a apresentação aproximada destes é:

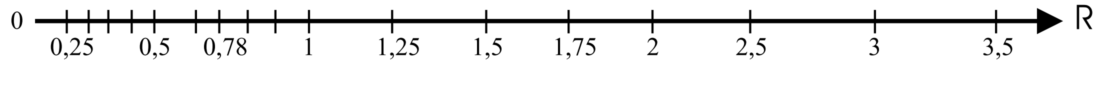


Figura 5.4: *Números positivos e o zero no sistema* $F(2, 3, -1, 2)$.

Supondo o sistema $F = F(10, 3, -1, 2)$ então 0.3125 e 0.4375 têm de ser *arredondados*. Logo, $0.3125 \simeq 0.312$ e $0.4375 \simeq 0.438$. Convertendo-se estes últimos resultados para a base 2 tem-se

$$0.312_{10} = 0.010011\ldots$$

$$0.438_{10} = 0.1110\ldots$$

Chamando de $\mathcal{R}$ o subconjunto de $\mathbb{R}$ representável em F, então

$$\mathcal{R} = \{-x_{\max} \leq x_i \leq -x_{\min}\} \cup \{0\} \cup \{x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max}\}.$$

Enfatiza-se, mais uma vez, que $\#\mathcal{R}$ é finito e ainda, nem todos os racionais são representáveis por F.

Exemplo 5.4: Considerando $F = F(10, 5, -98, 100)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \;=\; & \{-0.99999 \times 10^{100} \leq x_i \leq -0.10000 \times 10^{-98}\} \cup \{+0.00000 \times 10^{-98}\} \cup \\ & \{0.10000 \times 10^{-98} \leq u_i \leq 0.99999 \times 10^{100}\}. \end{aligned}$$

5.3 Propriedades Algébricas

Além da restrição com respeito ao número de elementos, uma vez que $\mathbb{R}$ é não-enumerável e F é finito, propriedades algébricas que são válidas em $\mathbb{R}$ não são válidas em F. As referências [Claudio e Marins, 1994] e [Santos e Silva, 2002] trazem vários exemplos. Aqui são citados alguns.

Exemplo 5.5: Falha na Lei do Corte Aditiva. Sabe-se que em $\mathbb{R}$:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R},\; a + b = a + c \Rightarrow b = c.$$

Será mostrado que em F,

$$\exists a, b, c \in F \text{ tais que } a + b = a + c \not\Rightarrow b = c.$$

Seja $F = F(10, 4, -9, 9)$ e

$$\begin{aligned} a &= 0.3245 \times 10^2, \\ b &= 0.4587 \times 10^{-3}, \\ c &= 0.8794 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Colocando os números na potência dos maior expoente,

$$\begin{aligned} a &= 0.3245 \times 10^2, \\ b &= 0.00004587 \times 10^2, \\ c &= 0.000008794 \times 10^2. \end{aligned}$$

Somando,

$$\begin{aligned} a + b &= 0.32454587 \times 10^2, \\ a + c &= 0.324508794 \times 10^2. \end{aligned}$$

Arredondando porque $l = 4$,

$$\begin{aligned} a + b &= 0.3245 \times 10^2, \\ a + c &= 0.3245 \times 10^2. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que $a + b = a + c$, mas $b \neq c$!

Neste exemplo surgiu o erro de arredondamento mencionado anteriormente uma vez que F não admite 4 dígitos mantissa.

Bibliografia

[Azevedo e Campos, 1987] Azevedo, A.G. de e Campos, P.H.B. de, *Estatística Básica*, Livros Técnicos e Científicos, 5a. Edição, 1987.

[Campos, Maranhão, Mendonza, 1999] Campos, M.A., Maranhão, A.A.R. de, Mendonza, R., *An alliance that works*, http://www.cin.ufpe.br/∼ejmc

[Campos, 2005] Campos, M.A., *Probabilidade. Aplicação em Computação*, Notas de Aula, http://www.cin.ufpe.br/∼mac

[Claudio e Marins, 1994] Claudio, D.M. e Marins, J.M., *Cálculo Numérico Computacional. Teoria e Prática*, 2a. Edição, São Paulo, Editora Atlas S.A., 1994.

[Giampaoli, Lima, 2004] Giampaoli, V. e Lima, C., *O ensino da Estatística no contexto da Matemática*, I Encontro Norte-Nordeste de Matemática Aplicada e Computacional, 7-8 de outubro, CIn/CCEN/UFPE, 2004.

[Jain, 1991] Jair, R., *The Art of Computer Systems Performance Analysis. Techniques for Experimental Design, Measurement, Simulation and Modeling.* John Wiley & Sons, 1991.

[James, 1981] James, B., *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, IMPA, Projeto Euclides, 1981.

[Meyer, 1983] Meyer, P.L., *Probabilidade. Aplicações à Estatítica*, 2ª edição, Livros Técnicos e Científicos, 1983.

[Pereira e Tanaka, 1990] Pereira, W. e Tanaka, O.K., *Estatística. Conceitos Básicos*, McGraw-Hill, 2a. Edição, 1990.

[Ruggiero e Lopes, 1988] Ruggiero, M.A. Gomes e Lopes, V.L. da R., *Cálculo Numérico. Aspecto Teórico e Computacionais*, McGraw-Hill, 1998, São Paulo.

[Russel e Norvig, 1995] Russel, S. and Norvig, P., *Artifitial Intelligence. A Modern Approach*, Printice Hall, 1995.

[Santos e Silva, 2002] Santos, J.D. dos e Silva, Z.C. da, *Métodos Numéricos*, Livrorapido, 2002.