Notas em Matemática Aplicada e-ISSN 2236-5915

Volume 20, 2012

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2012

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/notas.php

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

FRAÇÕES CONTÍNUAS: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

2ª edição

Eliana Xavier Linhares de Andrade
eliana@ibilce.unesp.br
Cleonice Fátima Bracciali
cleonice@ibilce.unesp.br

Departamento de Ciências de Computação e Estatística
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Elbert Einstein Nehrer Macau

Coordenação Editorial da Série: Rosana Sueli da Motta Jafelice

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Andrade, Eliana X. L.
Fracções Contínuas: Propriedades e Aplicações -
São Carlos, SP : SBMAC, 2012, 118 p., 20.5 cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 20) - 2ª edição

e-ISBN 978-85-86883-63-7

1. Frações Contínuas 2. Relação de Recorrência
3. Convergentes
I. Andrade, Eliana X. L. II. Bracciali, Cleonice F.
III. Título. IV. Série

CDD - 51

Esta edição em formato e-book é uma edição revisada do livro original do mesmo título publicado em 2005 nesta mesma série pela SBMAC.

Aos nossos esposos
Audeni e Sérgio
Dedicamos

Conteúdo

Prefácio

A teoria de frações contínuas tem vasta aplicação tanto na Matemática Pura quanto nas chamadas Ciências Aplicadas. São ferramentas essenciais, por exemplo, na teoria de aproximação de números reais por números racionais.

Ao escrever o presente livro, nosso objetivo principal era oferecer ao estudante de graduação, e mesmo de pós-graduação, da área de ciências exatas, um texto introdutório sobre a teoria das frações contínuas, destacando aquelas conhecidas como frações contínuas simples, isto é, aquelas que têm a forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} \; ,$$

com a hipótese de que $a_1, a_2, a_3, \dots$ são números inteiros positivos e a_0 é um inteiro qualquer. Além disso, apresentar algumas aplicações de frações contínuas no estudo de polinômios ortogonais, aproximação de funções, aproximação de números irracionais por racionais. Ao término de cada capítulo, incluímos uma pequena lista de exercícios. Uma extensa bibliografia sobre o assunto foi anexada ao final do texto.

Queremos registrar aqui nossos agradecimentos aos alunos que participaram dos seminários sobre frações contínuas e polinômios ortogonais, que vêm ocorrendo já há alguns anos no DCCE/IBILCE/UNESP, sempre sob a coordenação de um dos docentes do Grupo de Pesquisa em Polinômios Ortogonais e Similares. Ao final de cada ciclo de seminários, os alunos preparavam relatórios sobre os assuntos estudados, originando uma apostila que passou a ser utilizada pelos novos alunos que ingressavam no grupo. Essa apostila foi sendo aprimorada ao longo do tempo e foi a base para este livro.

São José do Rio Preto, setembro de 2011.
Eliana X. L. de Andrade
Cleonice F. Bracciali

Capítulo 1

Introdução

1.1 Conceitos básicos

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \dots}}}} \quad , \tag{1.1.1}$$

onde $a_0, a_1, a_2, \dots$ e $b_1, b_2, b_3, \dots$ são números reais ou complexos, ou funções de variáveis reais ou complexas. O número de termos pode ser finito ou infinito.

Podemos denotar a fração contínua (1.1.1) da forma

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \frac{b_3}{a_3 +} \; \dots \quad , \tag{1.1.2}$$

onde $\dfrac{b_i}{a_i}$, $i = 1, 2, ...$, são chamados de quocientes parciais. Chamaremos a_i e b_i, respectivamente, de denominador e numerador do quociente parcial $\dfrac{b_i}{a_i}$.

Consideremos a sequência $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ construída da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 \\ C_1 &= a_0 + \frac{b_1}{a_1} \\ C_2 &= a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \cdots \frac{b_n}{+ a_n} \qquad (1.1.3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

C_n, que é uma fração contínua finita, é chamado de n-ésimo convergente (ou aproximante) da fração contínua (1.1.2).

Por se tratar de frações, é possível que certos convergentes sejam indefinidos. Por exemplo, C_2 não tem sentido se $a_1 a_2 = -b_2$. Contudo, se quisermos ainda considerar a correspondente fração contínua, fazemos uso da definição abaixo.

Definição 1.1. *Dizemos que a fração contínua* (1.1.2) *converge para o valor K (finito) se no máximo um número finito de C_n é indefinido e*

$$\lim_{n\to\infty} C_n = K.$$

Caso contrário, dizemos que a fração contínua diverge.

Se a fração contínua converge para K, escrevemos

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \cdots = K.$$

Esta notação envolve a mesma ambigüidade que ocorre com séries infinitas quando escrevemos $\sum a_k = S$, de modo que $\sum a_k$ denota tanto a série como a sua soma.

Da relação (1.1.3) podemos escrever $C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, onde

$$\begin{array}{ll} p_0 = a_0, & q_0 = 1, \\ p_1 = a_0a_1 + b_1, & q_1 = a_1, \\ p_2 = a_0a_1a_2 + a_0b_2 + b_1a_2, & q_2 = a_1a_2 + b_2, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \end{array}$$

Notemos, por exemplo, que $p_2 = a_2p_1 + b_2p_0$ e $q_2 = a_2q_1 + b_2q_0$. Deste modo, obtemos o resultado a seguir, facilmente demonstrável usando-se o princípio da indução finita.

Teorema 1.1. *Sejam as seqüências* $\{p_n\}$ *e* $\{q_n\}$ *tais que*

$$\begin{array}{rcl} p_n & = & a_np_{n-1} + b_np_{n-2} \\ q_n & = & a_nq_{n-1} + b_nq_{n-2} \end{array}, \qquad n \geq 1, \tag{1.1.4}$$

com $p_{-1} = 1$, $p_0 = a_0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$ *e* $a_n \neq 0$ *para* $n \geq 1$. *Então, o* n*-ésimo convergente* C_n, *dado por* (1.1.3), *satisfaz* $C_n = p_n/q_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Demonstração: Para $n = 1$, o resultado vale, pois

$$\begin{array}{rclcll} p_1 & = & a_0a_1 + b_1 & = & a_1p_0 + b_1p_{-1} & \text{e} \\ q_1 & = & a_1 & = & a_1q_0 + b_1q_{-1}. & \end{array}$$

Suponhamos, agora, que (1.1.4) seja válido para $n \leq k$ e mostremos que vale para $n = k + 1$.

$$\begin{array}{rcl} C_{k+1} & = & a_0 + \dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{b_2}{a_2} + \cdots + \dfrac{b_k}{a_k} + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}} \\ & = & a_0 + \dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{b_2}{a_2} + \cdots + \dfrac{b_k}{a_k^*} = C_k^*, \end{array}$$

onde $a_k^* = a_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}$ e C_k^* é o $k-$ésimo convergente da fração contínua

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_k}{a_k^*} + \frac{b_{k+2}}{a_{k+2}} + \cdots \quad .$$

Podemos, então, usar a hipótese de indução para C_k^*. Portanto,

$$C_{k+1} = C_k^* = \frac{a_k^* p_{k-1} + b_k p_{k-2}}{a_k^* q_{k-1} + b_k q_{k-2}} = \frac{\left[a_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right] p_{k-1} + b_k p_{k-2}}{\left[a_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right] q_{k-1} + b_k q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_k p_{k-1} + b_k p_{k-2} + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}} p_{k-1}}{a_k q_{k-1} + b_k q_{k-2} + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}} q_{k-1}}$$

$$= \frac{p_k + (b_{k+1}/a_{k+1}) p_{k-1}}{q_k + (b_{k+1}/a_{k+1}) q_{k-1}} = \frac{a_{k+1} p_k + b_{k+1} p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + b_{k+1} q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}. \blacksquare$$

Segundo Chihara [11], as fórmulas dadas por (1.1.4) são conhecidas por fórmulas de Wallis, onde p_n é chamado o n-ésimo numerador parcial e q_n é o n-ésimo denominador parcial da fração contínua.

Se multiplicarmos a primeira fórmula de Wallis (1.1.4) por q_{n-1} e a segunda por p_{n-1}, e subtrairmos uma da outra, obtemos

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} &= -b_n (p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2}) \\ &= (-b_n)(-b_{n-1})(p_{n-2} q_{n-3} - q_{n-2} p_{n-3}) \\ &= \cdots \\ &= (-b_n)(-b_{n-1}) \cdots (-b_2)(p_1 q_0 - q_1 p_0) \\ &= (-1)^{n+1} b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1. \end{aligned}$$

Daí, obtemos o seguinte resultado, envolvendo os numeradores e denominadores de dois convergentes consecutivos:

Teorema 1.2. *Os numeradores e denominadores dos convergentes de ordem n e $n-1$ da fração contínua* (1.1.1) *satisfazem à seguinte relação, conhecida como Fórmula do Determinante:*

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1} b_1 b_2 \ldots b_n, \quad n \geq 1. \tag{1.1.5}$$

Dividindo ambos os membros da relação acima por $q_n q_{n-1}$, obtemos

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} b_1 b_2 ... b_n}{q_{n-1} q_n},$$

que nos fornece

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} b_1 b_2 ... b_k}{q_{k-1} q_k}, \tag{1.1.6}$$

desde que $a_k \neq 0$ e $q_k \neq 0$ para $1 \leq k \leq n$. Esta é a n-ésima soma parcial da série $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} b_1 b_2 ... b_k}{q_{k-1} q_k}$, conhecida por série de Euler-Minding.

Definição 1.2. *Duas frações contínuas são equivalentes se os respectivos convergentes de ordem n, $n \geq 0$, são iguais.*

Definição 1.3. *Uma extensão par (ímpar) de uma fração contínua é uma fração contínua cujos convergentes de ordem par (ímpar) são os sucessivos convergentes da fração contínua original.*

Definição 1.4. *Uma fração contínua é uma contração par (ímpar) de outra fração contínua se seus sucessivos convergentes são os convergentes de ordem par (ímpar) desta outra fração contínua.*

1.2 Aspectos históricos

Citaremos, agora, alguns aspectos interessantes da história das frações contínuas. Mais detalhes sobre este assunto podem ser encontrados nas referências [10, 18, 24, 29].

Embora os gregos já conhecessem o algoritmo de Euclides (325A.C. - 265A.C., aproximadamente) para o cálculo do máximo divisor comum entre dois números inteiros (mdc), não há evidências de que eles o usavam para construir frações contínuas.

Brezinski afirma, em [10], que frações contínuas foram usadas durante séculos antes de seu próprio descobrimento.

O primeiro uso conhecido de frações contínuas foi dado por R. Bombelli (1526-1573) em 1572 na aproximação de $\sqrt{13}$ por

$$\sqrt{13} \simeq 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6}} = \frac{18}{5},$$

que é um caso especial da fórmula

$$\sqrt{a^2+b} \simeq a + \frac{b}{2a +} \frac{b}{2a +} \frac{b}{2a +} \frac{b}{2a + \ldots} . \qquad (1.2.1)$$

No século XVI já se conhecia a aproximação

$$\sqrt{a^2+b} \simeq a + \frac{b}{2a +} \frac{b}{2a}.$$

Um segundo caso especial de (1.2.1) foi dado por Cataldi (1548-1626), cientista italiano considerado o descobridor das frações contínuas, que, em 1613, obteve a seguinte aproximação para $\sqrt{18}$:

$$\sqrt{18} \simeq 4\&\cfrac{2}{8\&\cfrac{2}{8\&\cfrac{2}{8\ddots}}} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}},$$

que ele abreviou como

$$4 \,\&\frac{2}{8.} \,\&\frac{2}{8.} \,\&\frac{2}{8.} \,\cdots .$$

Cataldi também discutiu a fórmula (1.2.1).

A primeira expansão em fração contínua infinita é divida a Lord W. Brouncker (1620 - 1686), 1º presidente da Royal Society of London.

Por volta de 1959, ele encontrou

$$\frac{4}{\pi} = 1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\ddots}}}}} = 1+\frac{1^2}{2}\,+\,\frac{3^2}{2}\,+\,\frac{5^2}{2}\,+\,\frac{7^2}{2}\,+\,\frac{9^2}{2}\,+\,\dots\,, \tag{1.2.2}$$

mas não demonstrou. Acredita-se que ele a tenha sido obtida através da fórmula produto-infinito para $\pi/2$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9}\ \cdots\,,$$

dada por Wallis (1616-1703) em 1655, que marca o início do desenvolvimento da teoria de frações contínuas. Ambas as descobertas foram passos importantes na história de $\pi = 3.14159\ldots$.

L. Euler (1707-1783) foi quem, em 1775, apresentou uma demonstração para a fórmula (1.2.2). Em 1737, Euler iniciou a sistematização do desenvolvimento da teoria de frações contínuas. Neste mesmo ano, encontrou o seguinte desenvolvimento para o número e:

$$e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}$$

ou,

$$e = 2+\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{2}\,+\,\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{4}\,+\,\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{6}\,+\,\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{1}\,+\,\frac{1}{8}\,+\cdots\,.$$

Em seu trabalho, ele tornou claro que frações contínuas podiam ser usadas tanto na teoria dos números como em análise. Uma outra contribuição sua foi apresentar uma solução para a equação diferencial de Riccati em termos de frações contínuas.

J.H. Lambert (1728-1777) mostrou, em 1766, que

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\frac{6}{x}+\cfrac{1}{\frac{10}{x}+\cfrac{1}{\frac{14}{x}+\cdots}}}}.$$

Em 1768 ele encontrou expansões em frações contínuas para as funções $log(1+x)$, $arctg(x)$ e $tg(x)$. Para $tg(x)$ ele encontrou

$$tg(x) = \cfrac{1}{\frac{1}{x}-\cfrac{1}{\frac{3}{x}-\cfrac{1}{\frac{5}{x}-\cfrac{1}{\frac{7}{x}-\cdots}}}}.$$

Lambert usou essas expansões para concluir que

a) Se x é um número racional diferente de zero, então e^x não pode ser racional;

b) Se x é um número racional diferente de zero, então $tg(x)$ não pode ser racional;

Assim, como $tg(\pi/4) = 1$, nem $\pi/4$ nem π podem ser racionais.

J.L. Lagrange (1736-1813) contribuiu com muitos resultados da teoria de frações contínuas regulares. Ele mostrou que números quadráticos irracionais são exatamente os números que têm expansões em frações contínuas periódicas (veja Teorema 2.10). Encontrou expansões para $(1+x)^M$ e

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^n}.$$

Como Euler, Lambert e Lagrange, em épocas diferentes, foram todos membros da Academia de Berlim, imagina se eles sempre discutiam seus trabalhos sobre frações contínuas,

Capítulo 2

Frações Contínuas Simples

2.1 Introdução

Uma forma mais simples de (1.1.1) é a fração contínua simples ou fração contínua regular

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 +}\,\frac{1}{a_2 +}\,\frac{1}{a_3 +}\,\dots\;, \tag{2.1.1}$$

onde $a_1, a_2, a_3, \dots$ são números inteiros positivos e a_0, um inteiro qualquer. Denotamos (2.1.1), também, por $[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$.

Uma fração contínua simples finita é uma expressão da forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +}\,\frac{1}{a_2 +}\,\dots\,\frac{1}{+\, a_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]. \tag{2.1.2}$$

2.2 Convergentes de frações contínuas simples

Consideremos os convergentes da fração contínua (2.1.1)

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{a_0}{1} \\ C_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} \\ C_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2} \\ &\vdots \qquad \vdots \\ C_n &= a_0 + \frac{1}{a_1 +} \dots \frac{1}{+ a_n} \\ &\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

Vejamos, agora, algumas propriedades algébricas desses convergentes. Como conseqüência imediata do Teorema 1.1, temos o seguinte resultado para os numeradores e denominadores das frações contínuas simples:

Corolário 2.1. *Os numeradores p_n e os denominadores q_n de uma fração contínua simples satisfazem*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_n &=& a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &=& a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{array} \right. , \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{2.2.1}$$

com as condições iniciais

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_0 &=& a_0 \\ q_0 &=& 1 \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{lcl} p_{-1} &=& 1 \\ q_{-1} &=& 0 \end{array} \right. .$$

Observamos que p_{-1} e q_{-1} não definem numerador e denominador de convergente.

De (1.1.5), obtemos a Fórmula do Determinante para as frações contínuas simples

$$\begin{vmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{vmatrix} = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}, \quad n \geq 0, \tag{2.2.2}$$

Como conseqüência deste resultado, obtemos o seguinte

Corolário 2.2. *Todo convergente* $C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, $n \geq 1$, *de uma fração contínua simples é um racional irredutível, isto é,* $mdc(p_n, q_n) = \pm 1$, *onde* $mdc(a, b)$ *significa o máximo divisor comum entre* a *e* b.

Demonstração: Suponhamos que exista r inteiro tal que $p_n = rp'_n$ e $q_n = rq'_n$, onde p'_n e $q'_n \in \mathbb{Z}$. Assim, de (2.2.2),

$$\begin{aligned} rp'_n q_{n-1} - p_{n-1} r q'_n &= p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n \\ &= (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Dividindo o primeiro e último membros da expressão acima por r, obtemos

$$p'_n q_{n-1} - p_{n-1} q'_n = \frac{(-1)^{n-1}}{r} \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $r = \pm 1$, o que demonstra o resultado. ∎

2.3 Expansão de números racionais em frações contínuas

Se $\dfrac{p}{q}$ é um número racional, ele possui uma expansão em fração contínua simples finita dada por

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \dots \frac{1}{+ a_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]. \tag{2.3.1}$$

Demonstrado este resultado no Teorema 2.1 adiante.

Veremos que, por meio de simples manipulações, podemos expressar um número racional como uma fração contínua. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{87}{59} &= 1 + \frac{28}{59} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{59}{28}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{28}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{28}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{3}}} = [1; 2, 9, 3]. \end{aligned}$$

Observamos que o número $\frac{87}{59}$ admite uma expansão em fração contínua simples finita.

A pergunta natural que se coloca é: qualquer número racional possui uma expansão em fração contínua simples finita? Caso a resposta seja afirmativa, a expansão é única?

Antes, vamos considerar mais alguns exemplos:

1)

$$\begin{aligned}
\frac{87\times 3}{59\times 3} &= \frac{261}{177} = 1+\frac{84}{177} = 1+\cfrac{1}{\frac{177}{84}} = 1+\cfrac{1}{2+\frac{9}{84}}\\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{84}{9}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9+\frac{3}{9}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9+\frac{1}{3}}}\\
&= [1;2,9,3].
\end{aligned}$$

2)

$$\frac{59}{87} = 0+\cfrac{1}{\frac{87}{59}} = 0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9+\frac{1}{3}}}} = [0;1,2,9,3].$$

3)

$$\begin{aligned}
-\frac{87}{59} &= -1-\frac{28}{59} = -1-\frac{28}{59}+\frac{59}{59}-1 = -2+\frac{31}{59}\\
&= -2+\cfrac{1}{\frac{59}{31}} = -2+\cfrac{1}{1+\frac{28}{31}} = -2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{31}{28}}}\\
&= -2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{3}{28}}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-\frac{87}{59} &= -2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{28}{3}}}} = -2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3}}}}\\
&= [-2;1,1,9,3].
\end{aligned}$$

A resposta à questão anteriormente colocada é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.1. *Qualquer fração contínua simples finita representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita.*

<u>Demonstração</u>: A demonstração da primeira parte é imediata.

Para a recíproca, consideremos um número racional $\frac{p}{q}$ qualquer. Pelo algoritmo da divisão, obtemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q},$$

onde $0 \leq r_1 < q$ e $a_0 = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$. $\lfloor a \rfloor$ significa maior inteiro menor que a.

Se $r_1 = 0$, $\frac{p}{q}$ é um número inteiro e, então, o processo termina. Caso contrário, escrevemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}, \quad 0 < r_1 < q.$$

Repetimos, agora, o mesmo procedimento com $\frac{q}{r_1}$ e obtemos

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Se $r_2 = 0$, então o processo termina e, assim,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1].$$

Se $r_2 \neq 0$, repetimos o mesmo procedimento com a fração $\dfrac{r_1}{r_2}$.

Observamos que o processo termina quando $r_n = 0$ para algum n, o que ocorre, pois $q > r_1 > r_2 > \ldots$ é uma sequência decrescente de inteiros positivos. Temos, então,

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_1}{q}, \qquad 0 < r_1 < q,\\
\frac{q}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \qquad 0 < r_2 < r_1,\\
&\vdots\\
\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= a_{n-2} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, \qquad 0 < r_{n-1} < r_{n-2},\\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_{n-1}, \qquad r_n = 0
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}}\\
&= [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}],
\end{aligned}$$

o que demonstra o resultado. ∎

Como $\dfrac{1}{a_{n-1}} = \dfrac{1}{(a_{n-1} - 1) + \dfrac{1}{1}}$, segue que $[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1} - 1, 1]$ é também uma expansão de $\dfrac{p}{q}$. Ressalva feita à possibilidade de expressar um número inteiro k também como $(k-1)+1$, a unicidade da expansão segue do algoritmo da divisão. Por exemplo, podemos escrever a fração contínua

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}} \;=\; [1;2,3,4]$$

como

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4-1+\cfrac{1}{1}}}} \;=\; [1;2,3,3,1].$$

Suponhamos, agora, $r_{n+1}=0$ para algum n. Procedendo como na demonstração do teorema anterior, obtemos um método para encontrar a representação de $\dfrac{p}{q}$ em fração contínua simples, da seguinte maneira:

$$\frac{p}{q} \;=\; a_0+\frac{r_1}{q} \quad\Rightarrow\quad p=a_0q+r_1, \qquad 0<r_1<q.$$

Mas, podemos escrever

$$\frac{p}{q} \;=\; a_0+\cfrac{1}{\cfrac{q}{r_1}}.$$

Repetindo o mesmo procedimento, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{q}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1} & &\Longrightarrow\ q = a_1 r_1 + r_2, \quad 0 \le r_2 < r_1,\\
\frac{r_1}{r_2} &= a_2 + \frac{r_3}{r_2} & &\Longrightarrow\ r_1 = a_2 r_2 + r_3, \quad 0 \le r_3 < r_2,\\
&\ \vdots & &\ \vdots\\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} & &\Longrightarrow\ r_{n-2} = a_{n-1} r_{n-1} + r_n, \quad 0 \le r_n < r_{n-1},\\
\frac{r_{n-1}}{r_n} &= a_n + \frac{r_{n+1}}{r_n} & &\Longrightarrow\ r_{n-1} = a_n r_n, \quad r_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Este é o algoritmo de Euclides para determinar o máximo divisor comum entre p e q (que é r_n) e pode ser sistematizado como

		a_0	a_1	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
p	q	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-1}	r_n	$r_{n+1} = 0$

.

Demonstraremos, a seguir, que existe uma única representação de $\frac{p}{q}$ da forma $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$, com $a_n \ge 2$. Se $a_n = 1$, a representação não é única, pois, como

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \dfrac{1}{1}},$$

segue que $[a_0, a_1, \ldots, a_n - 1, 1]$, é também uma expansão de $\frac{p}{q}$.

Do algoritmo de Euclides, temos que $a_n = \frac{r_{n-1}}{r_n}$. Como $r_{n-1} > r_n$, obtemos $a_n > 1$. Sendo a_n um inteiro positivo, segue que $a_n \ge 2$. A unicidade da representação decorre do fato de ser única a representação para $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ através do algoritmo de Euclides, com $a_n \ge 2$.

Neste texto, consideraremos $a_n \ge 2$ para frações contínuas simples finitas $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$.

Exemplo 2.1. *Encontre a fração contínua que representa o número* $\dfrac{97}{35}$ *usando o algoritmo de Euclides.*

Como

$$\begin{array}{rcll} 97 & = & \mathbf{2}\cdot 35 & + \; 27, \\ 35 & = & \mathbf{1}\cdot 27 & + \; 8, \\ 27 & = & \mathbf{3}\cdot 8 & + \; 3, \\ 8 & = & \mathbf{2}\cdot 3 & + \; 2, \\ 3 & = & \mathbf{1}\cdot 2 & + \; 1, \\ 2 & = & \mathbf{2}\cdot 1 & + \; 0, \end{array}$$

ou seja,

		2	**1**	**3**	**2**	**1**	**2**
97	35	27	8	3	2	1	0

temos

$$\frac{97}{35} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}} = [2; 1, 3, 2, 1, 2].$$

Propriedade 2.1. *Sejam* $p > q$ *e* $\dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$. *Então,* $\dfrac{q}{p} = [0; a_0, a_1, \ \ldots, a_n]$. *Reciprocamente, se* $\dfrac{q}{p} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n]$, *então* $\dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$.

<u>Demonstração</u>: Como, por hipótese, $p > q$, então $\dfrac{q}{p} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{p}{q}}$.

Mas, $\dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ e, assim,

$$\frac{q}{p} = 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Verifiquemos que a recíproca também vale. Se, por hipótese,

$$\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n] = 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \, ,$$

então,

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x,$$

onde

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, \ldots, a_n].$$

$\blacksquare$

2.4 Expansão de números irracionais em frações contínuas

Nesta seção, vamos estudar, além da expansão de números irracionais em frações contínuas simples, outros tipos de expansões em frações contínuas para números irracionais conhecidos como quadráticos. Veremos, também, alguns resultados sobre convergência.

2.4.1 Expansão de números irracionais em frações contínuas simples

Para construir a expansão de um número irracional em fração contínua simples, utilizaremos substituições sucessivas, da forma que descreveremos a seguir.

Sejam x um número irracional qualquer e $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Podemos escrever x como

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad \text{onde} \quad 0 < \frac{1}{x_1} < 1.$$

Então, $x_1 = \dfrac{1}{x - a_0} > 1$ é um número irracional.

Da mesma forma, podemos escrever

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad \text{onde} \quad a_1 = \lfloor x_1 \rfloor \geq 1, \quad 0 < \frac{1}{x_2} < 1$$

e obtemos $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_1} > 1$, que é, também, um número irracional.

Repetindo-se esse processo, obtemos, sucessivamente, as equações

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 > 1, \\ x_1 &= a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 > 1, \qquad a_1 \geq 1, \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad x_{n+1} > 1, \qquad a_n \geq 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ são inteiros e $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ são irracionais.

Notemos que este processo não termina, pois isto só ocorreria se $x_n = a_n$ para algum n, o que é impossível, pois x_n é número irracional para todo n.

Fazendo substituições apropriadas, obtemos a fração contínua simples infinita

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} \\ &= \ldots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots]. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. *Expressar* $\sqrt{2}$ *como uma fração contínua simples.*

Note que $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = \lfloor 1.414213... \rfloor = 1$. Podemos encontrar a fração contínua da seguinte forma

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \sqrt{2} - 1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Logo,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+\sqrt{2}-1} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}.$$

Continuando, temos

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}} = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\cdots\,.$$

Exemplo 2.3. *Expressar* $-\sqrt{2}$ *como uma fração contínua simples.*

Como $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor = \lfloor -1.414213... \rfloor = -2$, então $a_0 = -2$.

$$\begin{aligned}
-\sqrt{2} = -2 + (-\sqrt{2}+2) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{x_1} = -\sqrt{2}+2 \\
&\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{-\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}+2}{2} \\
&\Rightarrow \quad a_1 = 1. \\
\frac{\sqrt{2}+2}{2} = 1 + (\frac{\sqrt{2}+2}{2} - 1) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{2}+2}{2} - 1 \\
&\Rightarrow \quad x_2 = \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{2}+2}{2} - 1} = \sqrt{2} \\
&= \quad 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\cdots\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$-\sqrt{2} = -2 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = -2 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\cdots\,.$$

Exemplo 2.4. *Expressar* $\sqrt{13}$ *como uma fração contínua simples.*

Note que $\lfloor\sqrt{13}\rfloor = \lfloor 3.605551...\rfloor = 3$. Logo, $a_0 = 3$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{13} = 3 + (\sqrt{13} - 3) \qquad & \Longrightarrow \quad \frac{1}{x_1} = \sqrt{13} - 3 \\
& \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} \\
& \Longrightarrow \quad a_1 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{13} + 3}{4} = 1 + (\frac{\sqrt{13} + 3}{4} - 1) \quad & \Longrightarrow \quad \frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} - 1 \\
& \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13} + 3}{4} - 1} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3} \\
& \Longrightarrow \quad a_2 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{13} + 1}{3} = 1 + (\frac{\sqrt{13} + 1}{3} - 1) \quad & \Longrightarrow \quad \frac{1}{x_3} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3} - 1 \\
& \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13} + 1}{3} - 1} = \frac{\sqrt{13} + 2}{3} \\
& \Longrightarrow \quad a_3 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{13} + 2}{3} = 1 + (\frac{\sqrt{13} + 2}{3} - 1) \quad & \Longrightarrow \quad \frac{1}{x_4} = \frac{\sqrt{13} + 2}{3} - 1 \\
& \Longrightarrow \quad x_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13} + 2}{3} - 1} = \frac{\sqrt{13} + 1}{4} \\
& \Longrightarrow \quad a_4 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{13} + 1}{4} = 1 + (\frac{\sqrt{13} + 1}{4} - 1) \quad & \Longrightarrow \quad \frac{1}{x_5} = \frac{\sqrt{13} + 1}{4} - 1 \\
& \Longrightarrow \quad x_5 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13} + 1}{4} - 1} = \frac{\sqrt{13} + 3}{1} \\
& \Longrightarrow \quad a_5 = 6,
\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{13}+3}{1} = 6 + (\frac{\sqrt{13}+3}{1} - 6) \implies \frac{1}{x_6} = \frac{\sqrt{13}+3}{1} - 6$$
$$\implies x_6 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}+3}{1} - 6} = \frac{\sqrt{13}+3}{4}$$
$$\implies a_6 = 1.$$

Então,

$$a_7 = 1, \quad a_8 = 1, \quad a_9 = 1, \quad a_{10} = 6, \quad a_{11} = 1, \dots .$$

Logo,

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\dots .$$

Quando os denominadores dos quocientes parciais se repetem, podemos usar a seguinte notação

$$\sqrt{2} \;=\; [1; 2, 2, 2, ...] \;=\; [1; \overline{2}].$$

Outros exemplos

$$\begin{aligned}
\sqrt{13} &= [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]. \\
\sqrt{18} &= [4; \overline{4, 8}]. \\
\sqrt{19} &= [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]. \\
\sqrt{53} &= [7; \overline{3, 1, 3, 14}]. \\
\sqrt{82} &= [9; \overline{18}].
\end{aligned}$$

Exemplo 2.5. *Expressar π como uma fração contínua simples.*

Note que $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 3.1415926535897932... \rfloor = 3$. Logo, $a_0 = 3$ e

$$\frac{1}{x_1} = 0.14159265358... \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{0.14159265358...} = 7.06251331041...$$
$$\Rightarrow\; x_1 = 7 + 0.06251331041...$$

Logo, $a_1 = 7$.

$$\frac{1}{x_2} = 0.06251331041... \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{0.06251331041...} = 15.9965932606...$$
$$\Rightarrow \quad x_2 = 15 + 0.9965932606...$$

Logo, $a_2 = 15$.

$$\frac{1}{x_3} = 0.9965932606... \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1.00341838495...$$
$$\Rightarrow \quad x_3 = 1 + 0.00341838495...$$

Logo, $a_3 = 1$.

$$\frac{1}{x_4} = 0.00341838495... \quad \Rightarrow \quad x_4 = 292.535807004...$$
$$\Rightarrow \quad x_4 = 292 + 0.535807004...$$

e, então, $a_4 = 292$.

Continuando desta forma, encontramos,

$$a_5 = 1 \quad a_6 = 1, \quad a_7 = 1, \quad a_8 = 2, ... \,.$$

Assim,

$$\pi \;=\; 3 + \frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{292+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{14+}\,\ldots$$

Exemplo 2.6. *Alguns exemplos de expansões em frações contínuas simples*

$$e \;=\; 2 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{8+}\,\frac{1}{1+}\,\ldots$$

$$\frac{e-1}{e+1} \;=\; \frac{1}{2+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{10+}\,\frac{1}{14+}\,\frac{1}{18+}\,\frac{1}{22+}\,\frac{1}{26+}\,\frac{1}{30+}\,\frac{1}{34+}\,\frac{1}{38+}\,\frac{1}{42+}\,\ldots$$

$$\frac{e-1}{2} \;=\; \frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{10+}\,\frac{1}{14+}\,\frac{1}{18+}\,\frac{1}{22+}\,\frac{1}{26+}\,\frac{1}{30+}\,\frac{1}{34+}\,\frac{1}{38+}\,\frac{1}{42+}\,\ldots$$

$$\sqrt{e} \;=\; 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{9+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{13+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\ldots$$

Observe que há padrão para os denominadores a_i. É, então, fácil escrever as frações contínuas acima com o número de termos que desejarmos.

2.4.2 Outras expansões para os números irracionais

Quando $x = \sqrt{N}$, onde $N \in \mathbb{N}$ não é um quadrado perfeito, podemos, também, encontrar expansões em frações contínuas, que podem não ser simples, da seguinte forma:
• encontramos a e $b \in \mathbb{N}$ tais que $N = a^2 + b$ e calculamos

$$\sqrt{N} - a = \frac{(\sqrt{N} - a)(\sqrt{N} + a)}{\sqrt{N} + a} = \frac{N - a^2}{\sqrt{N} + a} = \frac{b}{2a + \sqrt{N} - a},$$

• em seguida, substituímos o valor de $\sqrt{N} - a$, que aparece do lado direito da equação acima, por todo o segundo membro e obtemos

$$\sqrt{N} - a = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \sqrt{N} - a}} = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \sqrt{N} - a}}},$$

• procedendo assim, sucessivamente, encontramos

$$\sqrt{N} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}} .$$

Assim, todos os numeradores valem b e todos os denominadores valem $2a$.

Exemplo 2.7. *Expressar $\sqrt{2}$ como uma fração contínua.*

Como $2 = 1^2 + 1$, então

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2 - 1}{\sqrt{2} + 1 + 1 - 1} = \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}$$

e obtemos

$$\sqrt{2}-1 = \cfrac{1}{2+\sqrt{2}-1} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}}} \quad .$$

Logo,

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}} = 1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\cdots \ ,$$

que é a fração contínua simples encontrada no Exemplo 2.2.

Exemplo 2.8. *Expressar* $\sqrt{18}$ *como uma fração contínua.*

Como $18 = 4^2 + 2$, seguindo o mesmo raciocínio, encontramos

$$\sqrt{18} = 4+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\ddots}}} = 4+\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\cdots \ .$$

Neste caso, conseguimos transformar esta fração contínua numa fração contínua simples, pois $b = 2$ divide $2a = 8$. Para isto, basta dividir numerador e denominador de algumas frações intermediárias por b. Assim,

$$\begin{aligned}
\sqrt{18} &= 4+\frac{\div 2}{\div 2}\left\{\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\frac{\div 2}{\div 2}\left\{\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\cdots\right\}\right\}\\
\sqrt{18} &= 4+\frac{2/2}{8/2+}\,\frac{2/2}{8}\,+\frac{2/2}{8/2+}\,\frac{2/2}{8}\,+\frac{2/2}{8/2+}\,\cdots\\
&= 4+\frac{1}{4+}\,\frac{1}{8+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{8+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{8+}\,\cdots \ .
\end{aligned}$$

Exemplo 2.9. *Expressar* $\sqrt{13}$ *como uma fração contínua.*

Como podemos escrever $13 = 3^2 + 4$, então

$$\sqrt{13} - 3 = \frac{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3)}{\sqrt{13}+3} = \frac{13-9}{\sqrt{13}+3+3-3} = \frac{4}{6+\sqrt{13}-3}\,.$$

Seguindo o raciocínio anterior, obtemos

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+}\,\frac{4}{6+}\,\frac{4}{6+}\,\ldots\,.$$

Neste caso, não conseguimos transformar esta fração contínua numa fração contínua simples, pois $b = 4$ não divide $2a = 6$.

Exemplo 2.10. *Encontrar uma fração contínua para expressar $\sqrt{6}$.*

Analogamente, podemos escrever $6 = 2^2 + 2$ e, assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{6} &= 2 + \frac{2}{4+}\,\frac{2}{4+}\,\frac{2}{4+}\,\frac{2}{4+}\,\ldots \\
&= 2 + \frac{2/2}{4/2+}\,\frac{2/2}{4}\,+\frac{2/2}{4/2+}\,\frac{2/2}{4}\,+\frac{2/2}{4/2+}\,\ldots \\
&= 2 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\,\ldots
\end{aligned}$$

Exemplo 2.11. *Outros exemplos de expansões de números irracionais em frações contínuas (não simples)*

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\pi} &= 1 + \frac{1^2}{2\ +}\,\frac{3^2}{2\ +}\,\frac{5^2}{2\ +}\,\frac{7^2}{2\ +}\,\frac{9^2}{2\ +}\,\frac{11^2}{2\ +}\,\ldots \\
\pi &= \frac{4}{1\ +}\,\frac{1^2}{2\ +}\,\frac{3^2}{2\ +}\,\frac{5^2}{2\ +}\,\frac{7^2}{2\ +}\,\frac{9^2}{2\ +}\,\frac{11^2}{2\ +}\,\ldots \\
e-1 &= 1 + \frac{2}{2+}\,\frac{3}{3+}\,\frac{4}{4+}\,\frac{5}{5+}\,\frac{6}{6+}\,\frac{7}{7+}\,\frac{8}{8+}\,\frac{9}{9+}\,\ldots \\
e-1 &= 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{2}{3+}\,\frac{3}{4+}\,\frac{4}{5+}\,\frac{5}{6+}\,\frac{6}{7+}\,\frac{7}{8+}\,\ldots \\
\frac{1}{e-2} &= 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{2}{3+}\,\frac{3}{4+}\,\frac{4}{5+}\,\frac{5}{6+}\,\frac{6}{7+}\,\frac{7}{8+}\,\frac{8}{9+}\,\ldots
\end{aligned}$$

2.5 Alguns resultados sobre convergência

Como já vimos, os convergentes das frações contínuas simples são definidos por

$$C_n = a_0 + \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2 +} \dots \frac{1}{+ a_n} = \frac{p_n}{q_n}, \quad n \geq 0,$$

cujos numeradores e denominadores satisfazem às equações (2.2.1).

Consideremos, então, a fração contínua simples

$$x = 1 + \frac{1}{2 +}\frac{1}{2 +}\frac{1}{2 +}\frac{1}{2 +}\frac{1}{2 +} \dots \quad . \tag{2.5.1}$$

Seus primeiros convergentes são dados por

$$\begin{array}{lllllll}
C_0 & = & \dfrac{p_0}{q_0} & = & \dfrac{1}{1} & = 1 & = \underline{1}, \\[2ex]
C_1 & = & \dfrac{p_1}{q_1} & = & 1 + \dfrac{1}{2} & = \dfrac{3}{2} & = \underline{1}.5, \\[2ex]
C_2 & = & \dfrac{p_2}{q_2} & = & \dfrac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \dfrac{2 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 2 + 1} & = \dfrac{7}{5} & = \underline{1.4}, \\[2ex]
C_3 & = & \dfrac{p_3}{q_3} & = & \dfrac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \dfrac{2 \cdot 7 + 3}{2 \cdot 5 + 2} & = \dfrac{17}{12} & = \underline{1.41}66667, \\[2ex]
C_4 & = & \dfrac{p_4}{q_4} & = & \dfrac{a_4 p_3 + p_2}{a_4 q_3 + q_2} = \dfrac{2 \cdot 17 + 7}{2 \cdot 12 + 5} & = \dfrac{41}{29} & = \underline{1.41}37931, \\[2ex]
C_5 & = & \dfrac{p_5}{q_5} & = & \dfrac{a_5 p_4 + p_3}{a_5 q_4 + q_3} = \dfrac{2 \cdot 41 + 17}{2 \cdot 29 + 12} & = \dfrac{99}{70} & = \underline{1.4142}857.
\end{array}$$

Observe que $\sqrt{2} = 1.41421356237...$. No Exemplo 2.7, vimos que a fração contínua (2.5.1) pode ser obtida da expansão de $\sqrt{2}$. Além disso, tudo indica que os convergentes desta fração contínua convergem para $\sqrt{2}$.

Para demonstrar que este resultado é verdadeiro para qualquer fração contínua simples infinita, veremos, primeiramente, alguns resultados sobre os convergentes desse tipo de frações contínuas simples.

Propriedade 2.2. *Os convergentes de frações contínuas simples infinitas satisfazem*

$$C_n - C_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}, \quad n \geq 1, \tag{2.5.2}$$

e

$$C_n - C_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-2}}{q_n q_{n-2}}, \quad n \geq 2. \tag{2.5.3}$$

Demonstração: Para $n \geq 1$, dividimos ambos os membros de (2.2.2) por $q_n q_{n-1}$, obtendo

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}},$$

de onde segue (2.5.2).

Para mostrar (2.5.3), tomamos

$$C_n - C_{n-2} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n}{q_n q_{n-2}} .$$

Usando a relação de recorrência (2.2.1) para p_n e q_n, obtemos

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-2} \\ &= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = a_n (-1)^{n-2}. \end{aligned}$$

Na última igualdade foi usada o Fórmula do Determinante (2.2.2).

Logo,

$$C_n - C_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-2}}{q_n q_{n-2}}.$$

■

Vamos, agora, demonstrar um resultado fundamental sobre os convergentes de frações contínuas simples infinitas.

Teorema 2.2. *Os convergentes de ordem par, C_{2n}, de uma fração contínua simples infinita formam uma sequência numérica crescente, enquanto que os convergentes de ordem ímpar, C_{2n+1}, formam uma sequência decrescente e todo convergente de ordem par é menor do que qualquer convergente de ordem ímpar. Além disso, cada convergente C_n, $n \geq 2$, está entre os convergentes C_{n-1} e C_{n-2}. Os termos da sequência $\{C_n\}$ satisfazem*

$$C_0 < C_2 < C_4 < \ldots < C_{2n} < \ldots < C_{2n+1} < \ldots < C_5 < C_3 < C_1. \tag{2.5.4}$$

Demonstração: Lembrando que $a_n > 0$ para $n \geq 1$ e $q_n > 0$ para $n \geq 0$, então, de (2.5.3), temos

$$C_{2n} - C_{2n-2} = \frac{a_{2n}(-1)^{2n-2}}{q_{2n}q_{2n-2}} > 0 \implies C_{2n-2} < C_{2n}, \tag{2.5.5}$$

$$C_{2n+1} - C_{2n-1} = \frac{a_{2n+1}(-1)^{2n-1}}{q_{2n+1}q_{2n-1}} < 0 \implies C_{2n+1} < C_{2n-1}, \tag{2.5.6}$$

e, de (2.5.2), temos

$$C_{2n} - C_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1}}{q_{2n}q_{2n-1}} < 0 \implies C_{2n} < C_{2n-1}, \tag{2.5.7}$$

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n+1}q_{2n}} > 0 \implies C_{2n} < C_{2n+1}. \tag{2.5.8}$$

De (2.5.5) e (2.5.6) concluímos, respectivamente, que $\{C_{2n}\}$ é uma sequência crescente e que $\{C_{2n+1}\}$ é uma sequência decrescente. De (2.5.5), (2.5.8) e (2.5.6) podemos escrever

$$C_{2n-2} < C_{2n} < C_{2n+1} < C_{2n-1}. \tag{2.5.9}$$

Portanto, C_n está entre C_{n-1} e C_{n-2}.

Em (2.5.9), fazendo

- $n = 1$, otemos $C_0 < C_2 < C_3 < C_1$.

- $n = 2$, temos $C_2 < C_4 < C_5 < C_3$. Portanto, $C_0 < C_2 < C_4 < C_5 < C_3 < C_1$.
- $n = 3$, obtemos $C_4 < C_6 < C_7 < C_5$. Logo, $C_0 < C_2 < C_4 < C_6 < C_7 < C_5 < C_3 < C_1$.

Continuando desta forma, obtemos

$$C_0 < C_2 < \ldots < C_{2n-2} < C_{2n} < \ldots < C_{2n+1} < C_{2n-1} < \ldots < C_3 < C_1,$$

que é o resultado desejado. ■

Além do resultado anterior, é possível mostrar que

Teorema 2.3. *Toda fração contínua simples infinita é convergente e seu limite l é dado por*

$$l = \lim_{n\to\infty} C_{2n} = \lim_{n\to\infty} C_{2n+1}.$$

Demonstração: Sabemos que $\{C_{2n}\}$ é uma sequência crescente e que $\{C_{2n+1}\}$ é decrescente. De (2.5.4), podemos, ainda, notar que

$$C_{2n} \to l_U, \quad \text{pois } \{C_{2n}\} \text{ é limitada superiormente por } c_1$$

e

$$C_{2n+1} \to l_L, \quad \text{pois } \{C_{2n+1}\} \text{ é limitada inferiormente por } c_0.$$

Mostremos que $l_U = l_L$. Sabemos que $C_{2n} - C_{2n-1} = \dfrac{-1}{q_{2n}q_{2n-1}}$. Assim,
$C_{2n} - C_{2n-1} \longrightarrow 0$, pois os valores q_n são inteiros, positivos e $q_{n+1} < q_n$, uma vez que $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty}(C_{2n} - C_{2n-1}) = 0,$$

ou seja, $l_L - l_U = 0$. Portanto, $l_L = l_U$, o que demonstra o teorema. ■

Vamos, agora, mostrar o resultado a seguir.

Teorema 2.4. *A sequência dos convergentes* $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge para um número irracional.*

Demonstração: Suponhamos que $\lim_{n\to 0} C_n = l = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{p}{q}.$$

Do Teorema 2.2,

$$C_{2n} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p}{q} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = C_{2n+1}, \quad n \geq 0.$$

Daí,

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p}{q} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{p_{2n+1}q - pq_{2n+1}}{q_{2n+1}q} > 0.$$

Mas, $p_{2n+1}q - pq_{2n+1} \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \neq \dfrac{p}{q}$. Logo, $p_{2n+1}q - pq_{2n+1} \geq 1$. Dividindo ambos os lados por $q_{2n+1}q$, obtemos

$$\frac{p_{2n+1}q - pq_{2n+1}}{q_{2n+1}q} \geq \frac{1}{q_{2n+1}q},$$

ou seja, $\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \dfrac{p}{q} \geq \dfrac{1}{q_{2n+1}q}$. Mas,

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p}{q} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}},$$

ou seja, $\dfrac{1}{q_{2n+1}q} < \dfrac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$.

Portanto, $q_{2n} < q$ para todo $n \geq 1$. Contradição, pois $\{q_n\}$ é uma sequência crescente. ■

Definição 2.1. *Considere a fração contínua* $x = [a_0; a_1, ..., a_n, ...]$. *Definimos como cauda de ordem* n *da fração contínua* x *a fração contínua*

$$x_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, ...] \,. \tag{2.5.10}$$

É fácil verificar que $x = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, x_n]$ e $x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}$. Logo, $a_n < x_n < a_n + 1$ e

$$x = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Podemos, agora, demonstrar o importante resultado a seguir.

Teorema 2.5. *Se um número irracional positivo x é expandido em uma fração contínua simples infinita $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, então*

$$\lim_{n\to\infty} C_n = x,$$

onde $\{C_n\}$ é a sequência dos convergentes da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Demonstração: Seja

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}}.$$

Logo,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}},$$

onde x_n é a cauda definida por (2.5.10).

$$\text{Como} \quad x_{n+1} > a_{n+1} \Longrightarrow \begin{cases} x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}} < a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}, \\[2ex] a_n < x_n < a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}, \end{cases}$$

ou, então,

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{x_n} > \frac{1}{a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}}\ .$$

Observe que

- $C_0 = a_0 < x_0 < a_0 + \dfrac{1}{a_1} = C_1 \implies C_0 < x < C_1.$

- $C_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1} > x = a_0 + \dfrac{1}{x_1} > a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}} = C_2.$

  Logo, $C_2 < x < C_1$.

- $x = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{x_3}}} < a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_3}}} \implies x < C_3.$

  Portanto, $C_2 < x < C_3$.

Continuando desta forma, podemos concluir que

$$C_{2n} < x < C_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Como, pelo Teorema 2.3,

$$\lim_{n\to\infty} C_{2n} = \lim_{n\to\infty} C_{2n+1} = l \implies l = x.$$

■

Desses resultados, podemos concluir que o limite dos convergentes da fração contínua (2.5.1) é $\sqrt{2}$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \sqrt{2}$.

Teorema 2.6. *Seja x um irracional qualquer e $\{C_n\}$ a sequência dos convergentes da fração contínua simples associada a x. Então,*

$$|x - C_k| < |x - C_{k-1}|, \qquad k \geq 1.$$

Demonstração: Seja $x = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, x_{k+1}]$, com $x_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, \ldots]$. Sabemos que

$$x = \frac{x_{k+1}p_k + p_{k-1}}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}}.$$

Daí, obtemos

$$x(x_{k+1}q_k + q_{k-1}) = x_{k+1}p_k + p_{k-1},$$

que, para $k \geq 1$, pode ser escrita como

$$x_{k+1}(xq_k - p_k) = -q_{k-1}\left(x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right).$$

Dividindo-se a última equação por $x_{k+1}q_k$ e calculando-se o valor absoluto, obtemos

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|\frac{q_{k-1}}{x_{k+1}q_k}\right| \left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|.$$

Como $x_{k+1} > 1$ para $k \geq 1$ e, além disso, $q_k > q_{k-1} > 0$, segue que

$$0 < \frac{q_{k-1}}{x_{k+1}q_k} < 1.$$

Assim,

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|, \quad k \geq 1,$$

o que mostra o resultado. ■

Teorema 2.7. *Seja x um irracional qualquer e $\{C_n\}$ a sequência dos convergentes da fração contínua simples associada a x. Então,*

$$\frac{1}{2q_kq_{k+1}} < |x - C_k| < \frac{1}{q_kq_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2}, \quad k \geq 1. \tag{2.5.11}$$

Demonstração: Temos que

$$C_{k+1} - C_k = \frac{(-1)^k}{q_{k+1}q_k}, \quad k \geq 1$$

e, portanto,

$$|C_{k+1} - C_k| = \frac{1}{q_{k+1}q_k}, \quad k \geq 1. \qquad (2.5.12)$$

Logo, do teorema anterior, segue que

$$\begin{aligned} |x - C_k| &= |x - C_{k+1} + C_{k+1} - C_k| \geq |C_{k+1} - C_k| - |x - C_{k+1}| \\ &> |C_{k+1} - C_k| - |x - C_k| = \frac{1}{q_{k+1}q_k} - |x - C_k|. \quad (2.5.13) \end{aligned}$$

Como, do Teorema 2.2 e de (2.5.12), $C_k < x < C_{k+1}$ ou $C_{k+1} < x < C_k$, segue, imediatamente, que $|x - C_k| < |C_{k+1} - C_k| = \dfrac{1}{q_{k+1}q_k}$.

Portanto, da última desigualdade e de (2.5.13), obtemos

$$\frac{1}{2q_kq_{k+1}} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_kq_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2},$$

pois $q_{k+1} > q_k$. ■

A seguir daremos um resultado sobre a convergência de frações contínuas de um tipo especial, ou seja, da forma

$$1 - \frac{\beta_1}{1} \, \frac{\beta_2}{- \, 1} \, \frac{\beta_3}{- \, 1} \, \frac{\beta_4}{- \, 1} \, - \ldots \, ,$$

onde $\beta_n = (1 - g_{n-1})g_n$, $0 \leq g_0 < 1$ e $0 < g_n < 1$, $n \geq 1$. Para isso, mostraremos, primeiramente, dois lemas.

Lema 2.1. *Seja $m_0 = 0$. Então, o $n-$ésimo denominador parcial da fração contínua*

$$1 - \frac{1}{1 -} \, \frac{(1 - m_0)m_1}{1} \, - \, \frac{(1 - m_1)m_2}{1} \, - \, \frac{(1 - m_2)m_3}{1} \, - \ldots$$

é

$$q_n = (1 - m_0)(1 - m_1) \cdots (1 - m_{n-1}), \quad n \geq 1. \qquad (2.5.14)$$

Demonstração: Usando as fórmulas de Wallis (1.1.4) e sabendo que $m_0 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} q_{N+1} &= q_N - (1 - m_{N-1})m_N q_{N-1} \\ &= (1 - m_0)(1 - m_1) \cdots (1 - m_{N-1})(1 - m_N). \end{aligned}$$

Assim, (2.5.14) vale para $n \leq N$. Como $B_1 = 1 = 1 - m_0$ então, pelo princípio de indução finita, (2.5.14) vale para todo $n \geq 1$. ∎

Lema 2.2. *Seja* $\alpha_n = (1 - m_{n-1})m_n$, *onde* $m_0 = 0$, $0 < m_n < 1$ *para* $n \geq 1$. *Então, a fração contínua*

$$1 - \frac{\alpha_1}{1} \, \frac{\alpha_2}{-\,1} \, \frac{\alpha_3}{-\,1} \, \frac{\alpha_4}{-\,1} \, -\, \ldots$$

converge para $(1 + L)^{-1}$, *onde*

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{(1 - m_1)(1 - m_2) \cdots (1 - m_n)}.$$

Demonstração: Seja p_n/q_n o n-ésimo convergente da fração contínua dada e considere p^*_{n+1}/q^*_{n+1} o $(n + 1)$-ésimo convergente da fração contínua

$$1 - \frac{1}{1} \, \frac{\alpha_1}{-\,1} \, \frac{\alpha_2}{-\,1} \, \frac{\alpha_3}{-\,1} \, -\, \ldots \, .$$

Logo,

$$\frac{p^*_{n+1}}{q^*_{n+1}} = 1 - \frac{1}{\dfrac{p_n}{q_n}} = 1 - \frac{1}{1 -} \, \frac{\alpha_1}{1} \, \frac{\alpha_2}{-\,1} \, -\, \ldots \, \frac{\alpha_n}{-\,1}.$$

Pelo Lema 2.1, $q^*_{n+1} = (1 - m_0)(1 - m_2) \cdots (1 - m_n) > 0$ e, assim, usando (1.1.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{p^*_{n+1}}{q^*_{n+1}} &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_k}{q^*_k q^*_{k+1}} \qquad (\alpha_0 = 1) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k}{(1 - m_0)^2 (1 - m_1)^2 \cdots (1 - m_{k-1})^2 (1 - m_k)} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{m_1 m_2 \cdots m_k}{(1 - m_1)(1 - m_2) \cdots (1 - m_k)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 - \dfrac{p^*_{n+1}}{q^*_{n+1}}} = \frac{1}{1 + L}.$$

■

Teorema 2.8. *Seja* $\beta_n = (1 - g_{n-1})g_n$, *onde* $0 \leq g_0 < 1$ *e* $0 < g_n < 1$, *para* $n \geq 1$. *Então,*

$$1 - \frac{\beta_1}{1} - \frac{\beta_2}{1} - \frac{\beta_3}{1} - \ldots = g_0 + \frac{1 - g_0}{1 + G}, \tag{2.5.15}$$

onde

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n)}.$$

Demonstração: O caso $g_0 = 0$ é dado pelo Lema 2.2. Consideraremos, então, $g_0 > 0$. Seja C_n o n-ésimo convergente de (2.5.15) e seja C_n^* o n-ésimo convergente da fração contínua

$$1 - \frac{g_0}{1} - \frac{\beta_1}{1} - \frac{\beta_2}{1} - \ldots \quad .$$

De acordo com o Lema 2.2, $\{C_n^*\}$ converge para $\dfrac{1}{1 + L}$, onde

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_0 g_1 \cdots g_n}{(1 - g_0)(1 - g_1) \cdots (1 - g_n)} \\ &= \frac{g_0}{1 - g_0} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 \cdots g_n}{(1 - g_1) \cdots (1 - g_n)} \right] = \frac{g_0}{1 - g_0}(1 + G). \end{aligned}$$

Como $C_{n+1}^* = 1 - g_0/C_n$, segue que $\{C_n\}$ converge para $g_0(1 + 1/L)$, o que demonstra (2.5.15). ■

2.6 Frações contínuas periódicas

Quando a sequência dos valores a_i apresenta repetição, ou seja, apresenta algum "período", como nos Exemplos 2.2 e 2.4, a fração contínua simples é chamada de *fração contínua periódica* e pode ser denotada por

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+n-1}}],$$

onde $a_{k+n} = a_k$ e os valores $a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+n-1}$ formam o período que se repete. A fração contínua

$$[\overline{a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}}]$$

é chamada *fração contínua puramente periódica.*

Chamamos *irracional quadrático* um número irracional x que é raiz da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b, c são inteiros e $b^2 - 4ac > 0$ não é um quadrado perfeito.

Há dois resultados fundamentais sobre frações contínuas periódicas e números irracionais quadráticos, os teoremas de Euler e de Lagrange, que demonstraremos a seguir.

Teorema 2.9. *Se x é um fração contínua periódica, isto é, se*

$$x = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+n-1}}],$$

então x é um número irracional quadrático.

Demonstração: De fato, tomemos $x = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k]$, onde $x_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots]$, um número irracional. Assim,

$$x_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}, x_k]$$

e, então,

$$x_k = \frac{x_k\tilde{p} + \hat{p}}{x_k\tilde{q} + \hat{q}},$$

ou seja,

$$\tilde{q}x_k^2 + (\hat{q} - \tilde{p})x_k - \hat{p} = 0, \tag{2.6.1}$$

onde $\dfrac{\hat{p}}{\hat{q}}$ e $\dfrac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ são os dois últimos convergentes de $[a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}]$.

Mas, como

$$x = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}},$$

então
$$x_k = \frac{p_{k-2} - q_{k-2}x}{q_{k-1}x - p_{k-1}}.$$
Substituindo-se esse valor de x_k em (2.6.1) e simplificando-se, obtemos
$$ax^2 + bx + c = 0,$$
onde
$$\begin{aligned} a &= \tilde{q}q_{k-2}^2 - (\hat{q} - \tilde{q})q_{k-2}q_{k-1} - \hat{p}q_{k-1}^2, \\ b &= 2(\hat{p}p_{k-1}q_{k-1} - \tilde{q}p_{k-2}q_{k-2}) + (\hat{q} - \tilde{p})(p_{k-2}q_{k-1} + q_{k-2}p_{k-1}), \\ c &= \tilde{q}p_{k-2}^2 - (\hat{q} - \tilde{p})p_{k-2}p_{k-1} - \hat{p}p_{k-1}^2. \end{aligned}$$
Observe que a, b e c são números inteiros. Como x é irracional, então $b^2 - 4ac > 0$. ■

Teorema 2.10. *A fração contínua que representa um número irracional quadrático x é periódica.*

Demonstração: Sabemos que um número irracional quadrático satisfaz a uma equação quadrática com coeficientes inteiros, que pode ser escrita como
$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{2.6.2}$$
Se $x = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k, ...]$, tomando-se $x_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots]$, então $x = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k]$. Além disso,
$$x = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}.$$
Substituindo-se o valor acima em (2.6.2), obtemos
$$D_k x_k^2 + E_k x_k + F_k = 0, \tag{2.6.3}$$
onde
$$\begin{aligned} D_k &= ap_{k-1}^2 + bp_{k-1}q_{k-1} + cq_{k-1}^2, \\ E_k &= 2ap_{k-1}p_{k-2} + b(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}) + 2cq_{k-1}q_{k-2}, \\ F_k &= ap_{k-2}^2 + bp_{k-2}q_{k-2} + cq_{k-2}^2. \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

Se $D_k = 0$, isto é, $ap_{k-1}^2 + bp_{k-1}q_{k-1} + cq_{k-1}^2 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} p_{k-1} &= \frac{-bq_{k-1} \pm \sqrt{(b^2-4ac)q_{k-1}^2}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\, q_{k-1}. \end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Então, a equação (2.6.2) tem um número racional $\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ como raiz, o que é impossível, pois x é irracional. Portanto, $D_k \neq 0$ e a equação quadrática

$$D_k y^2 + E_k y + F_k = 0,$$

tem x_k como uma de suas raízes.

De (2.6.4) e da Fórmula do Determinante, obtemos

$$\begin{aligned} E_k^2 - 4D_kF_k &= [2ap_{k-1}p_{k-2} + b(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}) + 2cq_{k-1}q_{k-2}]^2 \\ &\quad -4(ap_{k-1}^2 + bp_{k-1}q_{k-1} + cq_{k-1}^2)(ap_{k-2}^2 + bp_{k-2}q_{k-2} + cq_{k-2}^2) \\ &= (b^2-4ac)(p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1})^2 \\ &= b^2 - 4ac. \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

Pelo Teorema 2.7, temos que $xq_{k-1} - p_{k-1} > -\dfrac{1}{q_k}$. Logo, existe um número δ_{k-1}, com $|\delta_{k-1}| < 1$, tal que

$$p_{k-1} = xq_{k-1} + \frac{\delta_{k-1}}{q_{k-1}}.$$

Substituindo a equação anterior na expressão de D_k em (2.6.4), obtemos

$$\begin{aligned} D_k &= a\left(xq_{k-1} + \frac{\delta_{k-1}}{q_{k-1}}\right)^2 + bq_{k-1}\left(xq_{k-1} + \frac{\delta_{k-1}}{q_{k-1}}\right) + cq_{k-1}^2 \\ &= (ax^2+bx+c)q_{k-1}^2 + 2ax\delta_{k-1} + a\frac{\delta_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} + b\delta_{k-1}. \end{aligned}$$

De (2.6.2), obtemos

$$D_k = 2ax\delta_{k-1} + a\frac{\delta_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} + b\delta_{k-1}.$$

Logo, para todo k,

$$|D_k| < 2|ax| + |a| + |b|.$$

Mas, como $F_k = D_{k-1}$, temos que

$$|F_k| < 2|ax| + |a| + |b|.$$

De (2.6.5), obtemos

$$\begin{aligned} E_k^2 &\leq 4|D_kF_k| + |b^2 - 4ac| \\ &< 4(2|ax| + |b| + |c|)^2 + |b^2 - 4ac|. \end{aligned}$$

Observe que os valores absolutos de D_k, E_k e F_k são menores do que números que não dependem de k. Como D_k, E_k e F_k são números inteiros, existe apenas um número finito de triplas (D_k, E_k, F_k) diferentes entre si. Logo, podemos encontrar uma tripla (D, E, F) que ocorre pelo menos 3 vezes, digamos $(D_{k_1}, E_{k_1}, F_{k_1})$, $(D_{k_2}, E_{k_2}, F_{k_2})$ e $(D_{k_3}, E_{k_3}, F_{k_3})$. Portanto, de (2.6.3), x_{k_1}, x_{k_2} e x_{k_3} são raízes de

$$Dy^2 + Ey + F = 0.$$

É claro que pelo menos duas delas são iguais, por exemplo, x_{k_1} e x_{k_2}. Então,

$$a_{k_2} = a_{k_1}, \quad a_{k_2+1} = a_{k_1+1}, \quad a_{k_2+2} = a_{k_1+2}, ...$$

e a fração contínua é periódica. ■

Observações:

1. Dos Exemplos 2.2 e 2.4 observamos que a fração contínua para $\sqrt{N}$, onde N não é um quadrado perfeito, é periódica e o período começa em a_1 e vai até $a_k = 2a_0$, isto é,

   $$\sqrt{N} = [a_0; \overline{a_1, a_2, ..., a_{k-1}, 2a_0}].$$

   Além disso, $\sqrt{N} + a_0 = [\overline{2a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}}]$ é uma fração contínua puramente periódica. Veja [24] para demonstração.

2. Note, também, que as frações contínuas do Exemplo 2.6 são números transcendentais e suas expansões em frações contínuas simples não são frações contínuas periódicas.

2.6.1 Seqüência de Fibonacci

Veremos, aqui, uma fração contínua simples bastante interessante.

Exemplo 2.12. *Considere a fração contínua*

$$x = 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\ldots\ . \tag{2.6.6}$$

Podemos notar que

$$x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x},$$

ou seja,

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1.61803398874989... \\ \text{ou} \\ -0.61803398874989... \end{cases}$$

Como a fração contínua (2.6.6) produz um número positivo, temos

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989...\ .$$

Observe que

$$\frac{1}{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.61803398874989...\ ,$$

isto é,

$$\frac{1}{x} \ = \ x - 1 \ = \ \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\ldots\ .$$

O valor de x é conhecido como *número áureo* ou *seção áurea* e é denotado por $\Phi = 1.61803398874989...$. O valor $\dfrac{1}{x}$ é denotado por $\phi = 0.61803398874989...$.

De (1.1.4), temos que os convergentes da fração contínua (2.6.6) satisfazem

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} p_n & = & p_{n-1} & + & p_{n-2} \\ q_n & = & q_{n-1} & + & q_{n-2} \end{array}\right., \qquad n \geq 2, \tag{2.6.7}$$

com as condições iniciais

$$\left\{\begin{array}{ll} p_0 = 1, & p_1 = 2, \\ q_0 = 1, & q_1 = 1. \end{array}\right. \tag{2.6.8}$$

De (2.6.7) e (2.6.8), observe que a sequência dos denominadores, $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$, de (2.6.6) está relacionada com a *sequência de Fibonacci*, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, definida por

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geq 2, \tag{2.6.9}$$

onde $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$. Os primeiros números da sequência de Fibonacci são $1, 1, 2, 3, 5,\ 8, 13, 21,\ 34, 55, ...$.

A sequência de Fibonacci pode ser originada do problema "quase real" do número de coelhos em um viveiro. Para este problema, devemos supor que:

- num viveiro coloca-se um casal de coelhos recém-nascidos;
- coelhos podem reproduzir-se com 1 mês de vida;
- uma coelha dá à luz um casal de coelhos todo mês;
- a partir de seu segundo mês de vida;
- coelhos nunca morrem.

Quantos casais de coelhos haverá no início de cada mês?

A resposta a esta pergunta está na Tabela 1, que fornece o número de casais de coelhos no início de cada mês.

Comparando (2.6.7) e (2.6.8) com (2.6.9), concluímos que

$$p_n = F_{n+1} \quad \text{e} \quad q_n = F_n, \quad n \geq 0.$$

mês	nº casais	descrição	sequência de Fibonacci
1	1	primeiro casal	$F_0 = 1$
2	1	primeiro casal	$F_1 = 1$
3	2	1 + 1 que nasceu	$F_2 = 2$
4	3	2 + 1 que nasceu	$F_3 = 3$
5	5	3 + 2 que nasceram	$F_4 = 5$
6	8	5 + 3 que nasceram	$F_5 = 8$
7	13	8 + 5 que nasceram	$F_6 = 13$
8	21	13 + 8 que nasceram	$F_7 = 21$
9	34	21 + 13 que nasceram	$F_8 = 34$
10	55	34 + 21 que nasceram	$F_9 = 55$
11	89	55 + 34 que nasceram	$F_{10} = 89$
12	144	89 + 55 que nasceram	$F_{11} = 144$
13	233	144 + 89 que nasceram	$F_{12} = 233$

Tabela 2.1: Seqüência de Fibonacci, número de casais de coelhos

.

Como os convergentes $\dfrac{p_n}{q_n}$ da fração contínua convergem para o número áureo Φ, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \Phi = 1.61803398874989... \,.$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\Phi} = \phi = 0.61803398874989... \,.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{q_0} &= \frac{F_1}{F_0} = \frac{1}{1} = 1 \\ \frac{p_1}{q_1} &= \frac{F_2}{F_1} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{p_2}{q_2} & = & \frac{F_3}{F_2} & = & \frac{3}{2} & = & 1.5 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{p_6}{q_6} & = & \frac{F_7}{F_6} & = & \frac{13}{8} & = & \underline{1.6}25 \\[2ex]
\frac{p_6}{q_6} & = & \frac{F_7}{F_6} & = & \frac{21}{13} & = & \underline{1.61}5384615384615 \\[2ex]
\frac{p_7}{q_7} & = & \frac{F_8}{F_7} & = & \frac{34}{21} & = & \underline{1.61}9047619047619 \\[2ex]
\frac{p_8}{q_8} & = & \frac{F_9}{F_8} & = & \frac{55}{34} & = & \underline{1.61}7647058823529 \\[2ex]
\frac{p_9}{q_9} & = & \frac{F_{10}}{F_9} & = & \frac{89}{55} & = & \underline{1.618}181818181818 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{p_{34}}{q_{34}} & = & \frac{F_{35}}{F_{34}} & = & \frac{14930352}{9227465} & = & \underline{1.61803398874989}0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array} .
$$

Exercícios

1. Mostre que as frações contínuas abaixo são equivalentes:
$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2 +}\frac{b_3}{a_3 +}\frac{b_4}{a_4 +}\ \ldots$$
e
$$a_0 + \frac{k_1 b_1}{k_1 a_1 +}\ \frac{k_1 k_2 b_2}{k_2 a_2\ +}\ \frac{k_2 k_3 b_3}{k_3 a_3\ +}\ \frac{k_3 k_4 b_4}{k_4 a_4\ +}\ \ldots\ ,$$
onde $k_i \neq 0$.

2. Mostre que se uma fração contínua é equivalente a
$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2 +}\frac{b_3}{a_3 +}\frac{b_4}{a_4 +}\ \ldots$$

e, se $a_i \neq 0$ para todo i, então ela tem a seguinte forma

$$a_0 + \frac{k_1 b_1}{k_1 a_1} + \frac{k_1 k_2 b_2}{k_2 a_2} + \frac{k_2 k_3 b_3}{k_3 a_3} + \frac{k_3 k_4 b_4}{k_4 a_4} + \ldots\;,$$

com escolhas adequadas para k_i.

3. Mostre que a fração contínua

$$\frac{\lambda_1}{x - c_1} - \frac{\lambda_2}{x - c_2} - \frac{\lambda_3}{x - c_3} - \frac{\lambda_4}{x - c_4} - \ldots$$

é equivalente a

$$\frac{\alpha_0(x)}{1} - \frac{\alpha_1(x)}{1} - \frac{\alpha_2(x)}{1} - \frac{\alpha_3(x)}{1} - \ldots\;,$$

onde

$$\alpha_0(x) = \frac{\lambda_1}{x - c_1}, \quad \alpha_n(x) = \frac{\lambda_{n+1}}{(c_n - x)(c_{n+1} - x)}, \quad n \geq 1.$$

4. Mostre que se

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4} + \ldots = K \neq 0,$$

então

$$a_{-1} + \frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \ldots = a_{-1} + \frac{b_0}{K}.$$

5. Mostre que se a fração contínua

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots$$

converge, então seu valor é $(1 + \sqrt{5})/2$.

6. Sejam $b_{i+1} \geq 1$, $a_i \geq 1$ para $i \geq 0$. Mostre que

$$p_n \geq f_{n+1} \quad \text{e} \quad q_n \geq f_n,$$

onde $\{f_n\}$ é a sequência de Fibonacci: $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$.

7. Mostre que se $a_i \geq 1$ para $i \geq 1$, então a fração contínua

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \frac{1}{a_4 + \ldots} \; ,$$

converge.

8. Sejam a_i números inteiros positivos tais que a fração contínua

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \frac{1}{a_4 + \ldots} \; ,$$

converge para o limite x.
a) Mostre que $a_0 = \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro que não excede x.
b) Mostre que duas frações contínuas distintas da forma dada acima, onde os a_i são inteiros positivos, convergem para limites distintos.

9. Sejam $a_i > 0$ e $b_i > 0$. Mostre que

$$\left\{ \frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{q_{n-1} q_n} \right\}$$

é uma sequência decrescente. Como conseqüência, mostre que (1.1.2) converge se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_1 b_2 \cdots b_n a_n}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^2} = 0.$$

10. Sejam $a_i > 0$ e $b_i > 0$. Mostre que $\{C_{2n}\}$, a subseqüência dos convergentes de ordem par, é crescente e convergente. Mostre que $\{C_{2n+1}\}$, a subseqüência dos convergentes de ordem ímpar, é decrescente e convergente.

11. Considere a fração contínua $\quad a_0 + \dfrac{1}{a_1 +} \dfrac{1}{a_2 +} \dfrac{1}{a_3 +} \dfrac{1}{a_4 + \ldots} \; .$

a) Mostre que $|p_n| \leq M \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + |a_k|)$, $M = max(1, |a_0|)$.

b) Mostre que se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k}|$ converge, então $\{p_{2n}\}$ converge.

c) Mostre que se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, então $\{p_{2n}\}$, $\{p_{2n+1}\}$, $\{q_{2n}\}$ e $\{q_{2n+1}\}$ convergem.

d) Mostre que se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, então a fração contínua dada acima diverge.

12. Use o Teorema 2.8 para mostrar que $1 - \frac{a}{1-}\frac{a}{1-}\frac{a}{1-}\dots$ converge para $(1+\sqrt{1-4a})/2$ quando $0 < 4a < 1$.

13. Faça $\beta_1 = 1/2$ e $\beta_n = (n-1)/(n(n-1)), n \geq 2$ em (2.5.15) e mostre que
$$1 - \frac{1}{2-}\frac{1}{3-}\frac{2}{4-}\frac{3}{5-}\frac{4}{6-}\dots = \frac{1}{e}.$$

14. Mostre que
$$1 - \frac{1}{5-}\frac{2(4)}{8\ -}\frac{2(9)}{11\ -}\dots\frac{2(n^2)}{-3n+2-}\dots = \frac{1}{2ln(2)}.$$

Capítulo 3

Polinômios Ortogonais e Frações Contínuas

Entre os polinômios associados à relação de recorrência de três termos estão os polinômios ortogonais. As aplicações de tais polinômios à Análise Aplicada são muitas e novas aplicações surgem a todo momento. Veja, por exemplo, Gautschi [15] e Bracciali, Li e Sri Ranga [9].

As aplicações dos polinômios ortogonais associados às chamadas medidas clássicas, como as de Jacobi, Hermite e Laguerre, têm, particularmente, papel fundamental em muitos problemas das ciências e das engenharias. Ao contrário do que gostaríamos, os polinômios ortogonais associados às medidas não clássicas ainda não gozam de semelhante privilégio. Isto se deve, em parte, às restrições encontradas para gerá-los.

3.1 Polinômios ortogonais

Sejam (a, b) um intervalo real, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, e $\phi(x)$ uma função real, limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento em (a, b).

Se os momentos definidos por

$$\mu_r = \int_a^b x^r d\phi(x) \tag{3.1.1}$$

existem para $r = 0, 1, 2, \ldots$, então $d\phi(x)$ é chamada distribuição em (a, b).

Se $d\phi(x) = w(x)dx$, então $w(x) \geq 0$ em (a, b), mas não identicamente nula, e é chamada função peso.

Consideraremos, daqui por diante, apenas o caso em que $d\phi(x) = w(x)dx$.

Definição 3.1. *Dizemos que a sequência de polinômios* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso* $w(x)$ *no intervalo* (a, b) *se*

(*i*) $P_n(x)$ *é de grau exatamente* n, $\quad n \geq 0$;

(*ii*) $$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x) P_m(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & se\ n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & se\ n = m. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Quando $\rho_n = 1$ dizemos que a sequência de polinômios ortogonais é uma sequência de polinômios ortonormais e denotaremos por $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Notação: Representaremos os polinômios ortogonais $P_n(x)$ por

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i} x^i, \quad a_{n,n} \neq 0.$$

Quando $a_{n,n} = 1$ dizemos que os polinômios são mônicos e os denotaremos por $\left\{\hat{P}_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$.

3.1.1 Propriedades

Daremos, agora, algumas interessantes propriedades dos polinômios ortogonais.

Como, pela definição, os polinômios de uma sequência de polinômios ortogonais têm graus diferentes, obtemos, imediatamente, o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Sejam $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_m(x)$ pertencentes a uma sequência de polinômios ortogonais. Então, eles são linearmente independentes.*

O teorema acima nos diz que os polinômios ortogonais $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n, $\mathbb{P}_n$.

Teorema 3.2. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios e $w(x)$ uma função peso no intervalo (a, b). Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso $w(x)$ em (a, b).*

(b) $\langle P_n, \pi \rangle = 0, \quad \forall\ \pi(x)$ *de grau* $\leq n - 1$.

(c) $\langle x^m, P_n \rangle = \displaystyle\int_a^b x^m P_n(x) w(x) dx \begin{cases} = 0, & se\ m < n, \\ \neq 0, & se\ m = n. \end{cases}$

Demonstração: $(a) \Longrightarrow (b)$ Seja $\pi(x)$ um polinômio de grau $\leq n - 1$. Como $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais, pelo Teorema 3.1 $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ formam uma base para $\mathbb{P}_{n-1}$. Assim,

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x).$$

Logo, por definição,

$$\langle P_n, \pi \rangle = \left\langle P_n, \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x) \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \underbrace{\langle P_n, P_k \rangle}_{=0,\ k \neq n} = 0.$$

$(b) \Longrightarrow (c)$ Temos, por hipótese, que $\langle P_n, \pi \rangle = 0 \quad \forall\ \pi(x)$ de grau $\leq n - 1$. Assim, $\langle P_n, x^m \rangle = 0$ se $m < n$.

Consideremos, agora, $m = n$. Então, $\pi(x) = x^n \in \mathbb{P}_n$. Logo,

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P_j(x), \quad \alpha_n \neq 0$$

e

$$\langle P_n, x^n \rangle = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \underbrace{\langle P_n, P_j \rangle}_{=0,\ j \neq n} = \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle \neq 0. \tag{3.1.3}$$

$(c) \Longrightarrow (a)$ i) Consideremos $m < n$ ($m > n$, análogo). Seja

$$P_m(x) = a_{m,0} + a_{m,1}x + \ldots + a_{m,m}x^m, \quad a_{m,m} \neq 0.$$

Por hipótese,

$$\langle P_m, P_n \rangle = \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} \underbrace{\left\langle x^k, P_n \right\rangle}_{=0,\ k \neq n} = 0.$$

ii) Seja $m = n$. Então, de (3.1.3),

$$\langle P_n, P_n \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \left\langle x^k, P_n \right\rangle = a_{n,n} \langle x^n, P_n \rangle = a_{n,n}\alpha_n \langle P_n, P_n \rangle \neq 0.$$

■

Corolário 3.1. *Sejam $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ duas seqüências de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à função peso $w(x)$. Então,*

$$Q_j(x) = c_j P_j(x), \quad j = 0, 1, \ldots,$$

onde c_j é uma constante que depende apenas de j.

Demonstração: Seja $Q_j(x) \in \{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Como $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_j(x)$ formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq j$, podemos escrever $Q_j(x)$ como uma combinação linear desses polinômios. Então,

$$Q_j(x) = \sum_{i=0}^{j} c_i P_i(x), \qquad (c_j \neq 0).$$

Mas, $\langle Q_j, \pi \rangle = 0 \;\; \forall \; \pi(x)$ de grau $\leq j-1$. Logo,

$$\langle Q_j, P_0 \rangle = \langle Q_j, P_1 \rangle = \cdots = \langle Q_j, P_{j-1} \rangle = 0.$$

Assim, para $k = 0, \ldots, j-1$,

$$0 = \langle Q_j, P_k \rangle = \sum_{i=0}^{j} c_i \langle P_i, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle .$$

Como $\langle P_k, P_k \rangle > 0$, então $c_k = 0$, $k = 0, \ldots, j-1$. Portanto,

$$Q_j(x) = c_j P_j(x).$$

■

Teorema 3.3. *Seja $P_n(x)$, $n \geq 1$, uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à função peso $w(x)$. Então, os zeros de $P_n(x)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b).*

Demonstração: Suponhamos que $P_n(x)$ não tenha raízes em (a, b). Logo, $P_n(x) > 0$ ou $P_n(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$. Mas, por (3.1.2),

$$\int_a^b P_n(x)w(x)dx = \int_a^b 1.P_n(x)w(x)dx = 0. \tag{3.1.4}$$

Sabemos que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b P_n(x)w(x)dx > 0, & \text{se } P_n(x) > 0, \\ \\ \displaystyle\int_a^b P_n(x)w(x)dx < 0, & \text{se } P_n(x) < 0. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Por (3.1.4) e (3.1.5) temos um absurdo. Logo, P_n muda de sinal em (a, b). Assim, existe pelo menos uma raiz real de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b).

Suponhamos que $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,r}$ $(r < n)$ sejam as raízes de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b). Então,

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \ldots (x - x_{n,r})Q(x),$$

onde $Q(x)$ é um polinômio de grau $(n-r)$ que tem somente raízes complexas ou reais de multiplicidade par em (a,b). Logo, $Q(x)$ não muda de sinal em (a,b). Assim,

$$\int_a^b (x-x_{n,1})(x-x_{n,2})\dots(x-x_{n,r})P_n(x)w(x)dx \tag{3.1.6}$$
$$= \int_a^b (x-x_{n,1})^2(x-x_{n,2})^2\dots(x-x_{n,r})^2 Q(x)w(x)dx \neq 0.$$

Mas, pelo Teorema 3.2,

$$\int_a^b \underbrace{(x-x_{n,1})(x-x_{n,2})\dots(x-x_{n,r})}_{grau\ \ r<n} P_n(x)w(x)dx = 0. \tag{3.1.7}$$

Por (3.1.6) e (3.1.7) temos um absurdo. Assim, $P_n(x)$ tem $r \geq n$ raízes de multiplicidade ímpar em (a,b). Logo, $r=n$ pois $P_n(x)$ é um polinômio de grau n. Deste modo, $P_n(x)$ tem n raízes de multiplicidade ímpar em (a,b),

$$P_n(x) = (x-x_{n,1})^{i_1}(x-x_{n,2})^{i_2}\dots(x-x_{n,n})^{i_n}.$$

Como $i_1, i_2, \dots, i_n$ são índices ímpares e $i_1+i_2+\dots+i_n = n$, temos que $i_1 = i_2 = \dots = i_n = 1$. ■

Teorema 3.4. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a,b) relativamente à função peso $w(x)$. Então, os polinômios desta sequência satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos:*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{3.1.8}$$

com $P_0(x) = 1,\ \ P_{-1}(x) = 0,\ \ \alpha_{n+1},\ \beta_n,\ \gamma_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1,$ *e*

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1}\frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle}, \quad n \geq 0, \tag{3.1.9}$$
$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle} \neq 0, \quad n \geq 1.$$

Demonstração: Temos que $P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{n,1}x + a_{n,0}$. Como $xP_n(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, então

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x).$$

Igualando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima, obtemos $a_{n,n} = b_{n+1}a_{n+1,n+1}$. Daí, $b_{n+1} = \dfrac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}$.

Porém, $\langle xP_n, P_j \rangle = \displaystyle\int_a^b P_n(x)xP_j(x)w(x)dx = 0$ para $j \leq n-2$.

Mas, $\langle xP_n, P_j \rangle = \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = b_j \langle P_j, P_j \rangle = 0$ para $j \leq n-2$.

Logo, $b_j = 0$ se $j \leq n-2$. Assim,

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_{n+1}}xP_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}}P_n(x),$$

ou seja,

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x),$$

com $\gamma_{n+1} = \dfrac{1}{b_{n+1}}$, $\beta_{n+1} = \dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ *e* $\alpha_{n+1} = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n+1}}$. Como

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}, \quad \text{temos} \quad \gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}.$$

Calculemos, agora, os valores de α_{n+1} e β_{n+1}. De

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x),$$

obtemos

$$0 = \langle P_{n+1}, P_n \rangle = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_n \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_n \rangle .$$

Daí,

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1}\frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_{n-1} \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_{n-1} \rangle \\ &\quad -\alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle . \end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Mas, como

$$P_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n) P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x)$$

obtemos

$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{\gamma_n} P_n(x) + \frac{\beta_n}{\gamma_n} P_{n-1}(x) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} P_{n-2}(x).$$

Porém,

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \int_a^b P_n(x) x P_{n-1}(x) w(x) dx = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle$$

e, então,

$$\langle P_n, xP_{n-1} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle + \beta_n \langle P_n, P_{n-1} \rangle + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-2} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle .$$

Portanto,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}, \; n \geq 1.$$

■

Para os polinômios mônicos, a relação de recorrência é da forma

$$\hat{P}_{n+1}(x) = \left(x - \hat{\beta}_{n+1} \right) \hat{P}_n(x) - \hat{\alpha}_{n+1} \hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{3.1.10}$$

com $\hat{P}_{-1}(x) = 0$, $\hat{P}_0(x) = 1$ e

$$\hat{\beta}_n = \frac{\left\langle x\hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \right\rangle}{\left\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \right\rangle} \;\text{ e }\; \hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\left\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \right\rangle}{\left\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \right\rangle}, \;\; n \geq 1. \tag{3.1.11}$$

Para os polinômios ortonormais, temos

$$P^*_{n+1}(x) = (\gamma^*_{n+1}x - \beta_{n+1})P^*_n(x) - \alpha^*_{n+1}P^*_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \qquad (3.1.12)$$

com $P^*_{-1}(x) = 0$, $P^*_0(x) = 0$, $\gamma^*_n = \dfrac{a^*_{n,n}}{a^*_{n-1,n-1}}$, $\beta^*_n = \gamma^*_n \left\langle xP^*_{n-1}, P^*_{n-1}\right\rangle$ e $\alpha^*_{n+1} = \dfrac{\gamma^*_{n+1}}{\gamma^*_n}$, $n \geq 1$.

A relação (3.1.10) pode também ser escrita como

$$x\hat{P}_n(x) = \hat{\alpha}_{n+1}\hat{P}_{n-1}(x) + \hat{\beta}_{n+1}\hat{P}_n(x) + \hat{P}_{n+1}(x). \qquad (3.1.13)$$

Fazendo $n = 0, 1, 2, ..., m-1$ na equação (3.1.13), obtemos, respectivamente,

$$\begin{array}{rcl} x\hat{P}_0(x) & = & \hat{\beta}_1\hat{P}_0(x) + \hat{P}_1(x) \\ x\hat{P}_1(x) & = & \hat{\alpha}_2\hat{P}_0(x) + \hat{\beta}_2\hat{P}_1(x) + \hat{P}_2(x) \\ x\hat{P}_2(x) & = & \hat{\alpha}_3\hat{P}_1(x) + \hat{\beta}_3\hat{P}_2(x) + \hat{P}_3(x) \\ \vdots & & \vdots \\ x\hat{P}_{m-1}(x) & = & \hat{\alpha}_m\hat{P}_{m-2}(x) + \hat{\beta}_m\hat{P}_{m-1}(x) + \hat{P}_m(x), \end{array}$$

ou, na forma matricial,

$$x\begin{pmatrix} \hat{P}_0(x) \\ \hat{P}_1(x) \\ \hat{P}_2(x) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x) \\ \hat{P}_{m-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\beta}_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\beta}_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\alpha}_m & \hat{\beta}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{P}_0(x) \\ \hat{P}_1(x) \\ \hat{P}_2(x) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x) \\ \hat{P}_{m-1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{P}_m(x) \end{pmatrix}.$$

Sejam $x_{m,k}$, $1 \leq k \leq m$, as raízes do polinômio $\hat{P}_m(x)$. Então, como $\hat{P}_m(x_{m,h}) = 0$, obtemos

$$x_{m,k} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{P}_0(x_{m,k}) \\ \hat{P}_1(x_{m,k}) \\ \hat{P}_2(x_{m,k}) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x_{m,k}) \\ \hat{P}_{m-1}(x_{m,k}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{m,k}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\beta}_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\beta}_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\alpha}_m & \hat{\beta}_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}_m}$$
$$\times \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{P}_0(x_{m,k}) \\ \hat{P}_1(x_{m,k}) \\ \hat{P}_2(x_{m,k}) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x_{m,k}) \\ \hat{P}_{m-1}(x_{m,k}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{m,k}}.$$

Logo,

$$x_{m,k}\mathbf{v}_{m,k} = \mathbf{G}_m\mathbf{v}_{m,k}, \quad k = 1, 2, ..., m.$$

Como, pelo Teorema 3.6, $P_{m-1}(x_{m,k}) \neq 0$, o vetor $\mathbf{v}_{m,k}$ é não-nulo. Então, $x_{m,k}$ é auto-valor da matriz G_m e $\mathbf{v}_{m,k}$ é o correspondente auto-vetor.

Observe que a relação de recorrência para os polinômios ortonormais pode ser dada por:

$$xP_n^*(x) = \lambda_{n+1}^* P_{n+1}^*(x) + \tau_{n+1}^* P_{n+}^*(x) + \lambda_n^* P_{n-1}^*(x),$$

onde $\lambda_{n+1}^* = 1/\gamma_{n+1}^*$, $\tau_{n+1}^* = \beta_{n+1}^*/\gamma_{n+1}^*$.

Como podemos escrever $\hat{P}_n(x) = \dfrac{P_n^*(x)}{a_{n,n}^*}$, de (3.1.11), temos

$$\hat{\alpha}_{n+1} = (\lambda_n^*)^2 \text{ e } \hat{\beta}_{n+1} = \tau_{n+1}^*.$$

Assim, $xP_n^*(x) = \sqrt{\hat{\alpha}_{n+1}}P_{n-1}^*(x) + \hat{\beta}_{n+1}P_n^*(x) + \sqrt{\hat{\alpha}_{n+2}}P_{n+1}^*(x)$.

Procedendo da mesma forma que para os polinômios ortogonais mônicos, obtemos

$$x_{m,k}\underbrace{\begin{pmatrix} P_0^*(x_{m,k}) \\ P_1^*(x_{m,k}) \\ P_2^*(x_{m,k}) \\ \vdots \\ P_{m-2}^*(x_{m,k}) \\ P_{m-1}^*(x_{m,k}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_{m,k}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 & \sqrt{\hat{\alpha}_2} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\hat{\alpha}_2} & \hat{\beta}_2 & \sqrt{\hat{\alpha}_3} & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\hat{\alpha}_3} & \hat{\beta}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\hat{\alpha}_m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\beta}_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}_m}$$

$$\times \underbrace{\begin{pmatrix} P_0^*(x_{m,k}) \\ P_1^*(x_{m,k}) \\ P_2^*(x_{m,k}) \\ \vdots \\ P_{m-2}^*(x_{m,k}) \\ P_{m-1}^*(x_{m,k}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_{m,k}}, \qquad (3.1.14)$$

isto é,

$$x_{m,k}\mathbf{u}_{m,k} = \mathbf{J}_m\mathbf{u}_{m,k}, \quad k = 1, 2, ..., m.$$

Portanto, $x_{m,k}$ é também auto-valor da matriz $\mathbf{J}_m$, conhecida como matriz de Jacobi de ordem m.

Teorema 3.5. *Seja $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortonormais. Então, eles satisfazem à seguinte identidade*

$$\sum_{k=0}^{n} P_k^*(x)P_k^*(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*}\frac{P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(x)P_{n+1}^*(y)}{x - y}, \qquad (3.1.15)$$

conhecida como Identidade de Christoffel-Darboux.

Demonstração: Da relação de recorrência de três termos, temos que

$$\begin{aligned} P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) \; - \; & P_n^*(x)P_{n+1}^*(y) \\ = \; & [(\gamma_{n+1}^* x - \beta_{n+1}^*)P_n^*(x) - \alpha_{n+1}^* P_{n-1}^*(x)]P_n^*(y) \\ & -P_n^*(x)[(\gamma_{n+1}^* y - \beta_{n+1}^*)P_n^*(y) - \alpha_{n+1}^* P_{n-1}^*(y)] \\ = \; & (x-y)\gamma_{n+1}^* P_n^*(x)P_n^*(y) + \{P_n^*(x)P_{n-1}^*(y) \\ & -P_{n-1}^*(x)P_n^*(y)\}\alpha_{n+1}^*. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(x)P_{n+1}^*(y) \;\; = \;\; & (x-y)\gamma_{n+1}^* P_n^*(x)P_n^*(y) + \alpha_{n+1}^* \\ & \times \left\{ P_n^*(x)P_{n-1}^*(y) - P_{n-1}^*(x)P_n^*(y) \right\}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\alpha_{n+1}^* = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*} \frac{\langle P_n^*, P_n^* \rangle}{\left\langle P_{n-1}^*, P_{n-1}^* \right\rangle} = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(x)P_{n+1}^*(y) \;\; = \;\; & \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*}\left\{ P_n^*(x)P_{n-1}^*(y) - P_{n-1}^*(x)P_n^*(y) \right\} \\ & +(x-y)\gamma_{n+1}^* P_n^*(x)P_n^*(y). \qquad (3.1.16) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} P_n^*(x)P_{n-1}^*(y) - P_{n-1}^*(x)P_n^*(y) \;\; = \;\; & \frac{\gamma_n^*}{\gamma_{n-1}^*}\{P_{n-1}^*(x)P_{n-2}^*(y) \\ & -P_{n-2}^*(x)P_{n-1}^*(y)\} \qquad (3.1.17) \\ & +(x-y)\gamma_n^* P_{n-1}^*(x)P_{n-1}^*(y). \end{aligned}$$

Substituindo (3.1.17) em (3.1.16), obtemos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) \; - \; & P_n^*(x)P_{n+1}^*(y) \\ = \; & \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*}\left\{ \frac{\gamma_n^*}{\gamma_{n-1}^*}\left[P_{n-1}^*(x)P_{n-2}^*(y) - P_{n-2}^*(x)P_{n-1}^*(y)\right] \right. \\ & \left. +(x-y)\gamma_n^* P_{n-1}^*(x)P_{n-1}^*(y) \right\} + (x-y)\gamma_{n+1}^* P_n^*(x)P_n^*(y) \\ = \; & \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_{n-1}^*}\left[P_{n-1}^*(x)P_{n-2}^*(y) - P_{n-2}^*(x)P_{n-1}^*(y)\right] \\ & +\gamma_{n+1}^*(x-y)[P_{n-1}^*(x)P_{n-1}^*(y) + P_n^*(x)P_n^*(y)]. \end{aligned}$$

Continuando, temos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) &- P_n^*(x)P_{n+1}^*(y) \\ &= \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_1^*}[P_1^*(x)P_0^*(y) - P_0^*(x)P_1^*(y) \\ &\qquad + \gamma_1^*(x-y)\sum_{k=1}^{n} P_k^*(x)P_k^*(y)]. \qquad (3.1.18) \end{aligned}$$

Mas, $P_1^*(x) = a_{1,1}^*(x) + a_{1,0}^*$ e $P_0^*(x) = a_{0,0}^*$. Então,

$$P_0^*(y)P_1^*(x) - P_0^*(x)P_1^*(y) = a_{0,0}^* a_{1,1}^*(x-y).$$

Substituindo em (3.1.18), obtemos

$$\begin{aligned} &P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(x)P_{n+1}^*(y) \\ &\qquad = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_1^*}\left[a_{0,0}^* a_{1,1}^* + \gamma_1^* \sum_{k=1}^{n} P_k^*(x)P_k^*(y)\right](x-y). \end{aligned}$$

Como $\gamma_1^* = \dfrac{a_{1,1}^*}{a_{0,0}^*}$ e $P_0^*(x) = P_0^*(y) = a_{0,0}^*$, chegamos ao resultado desejado. ■

Se somarmos e subtrairmos $P_{n+1}^*(x)P_n^*(x)$ ao numerador da Identidade de Christoffel-Darboux (3.1.15), obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} P_k^*(x)P_k^*(y) = \frac{P_n^*(x)\left[P_{n+1}^*(x) - P_{n+1}^*(y)\right] - P_{n+1}^*(x)\left[P_n^*(x) - P_n^*(y)\right]}{\gamma_{n+1}^*\,(x-y)}.$$

Fazendo $y \longrightarrow x$ em ambos os membros da igualdade acima, chegamos à seguinte identidade, válida para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(P_k^*(x)\right)^2 = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*}\left[P_n^*(x)\left(P_{n+1}^*(x)\right)' - P_{n+1}^*(x)\left(P_n^*(x)\right)'\right] > 0. \tag{3.1.19}$$

Lembramos que $f'(x) = \lim_{y \to x} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ e $\sum_{k=0}^{n} (P_k^*(x))^2 > 0$, pois $P_0(x) \neq 0$.

Teorema 3.6. *Seja $\{P_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau n, $P_n(x)$, existe somente um zero de $P_{n+1}(x)$.*

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que os polinômios $P_j(x)$ sejam ortonormais com $a_{j,j} > 0$. Sejam $x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,n}$ os zeros de $P_n(x)$ em ordem crescente. Tomemos $x_{n,k}$ e $x_{n,k+1}$, $k = 1, 2, ..., n-1$, dois zeros consecutivos de $P_n(x)$. Substituindo esses zeros em (3.1.19), obtemos

$$P_{n+1}(x_{n,k})P_n'(x_{n,k}) < 0 \ \text{ e } \ P_{n+1}(x_{n,k+1})P_n'(x_{n,k+1}) < 0.$$

Como $P_n'(x_{n,k})$ e $P_n'(x_{n,k+1})$ têm sinais opostos, então $P_{n+1}(x_{n,k})$ e $P_{n+1}(x_{n,k+1})$ também. Logo, existe pelo menos um ponto no intervalo $(x_{n,k}, x_{n,k+1})$ onde $P_{n+1}(x)$ muda de sinal. Portanto, existe pelo menos um zero de $P_{n+1}(x)$ entre $x_{n,k}$ e $x_{n,k+1}$.

Dois zeros de $P_{n+1}(x)$ estão em $(a, x_{n,1})$ e $(x_{n,n}, b)$, respectivamente. Como $a_{j,j} > 0$, $j = 0, 1, \ldots$, temos que $P_j(b) > 0$. Logo, $P_n'(x_{n,n}) > 0$. De (3.1.19), $P_{n+1}(x_{n,n}) < 0$. Portanto, $P_{n+1}(x)$ muda de sinal entre $x_{n,n}$ e b. De modo análogo mostramos que existe uma raiz de $P_{n+1}(x)$ entre a e $x_{n,1}$. Basta lembrar que $sinal[P_j(a)] = (-1)^j$. Como $P_{n+1}(x)$ tem $n+1$ zeros, o resultado está demonstrado. ∎

3.1.2 Polinômios associados aos ortogonais

Definição 3.2. *Dada uma sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, definimos o polinômio associado a $\hat{P}_n(x)$ por*

$$Q_n(x) = \int_a^b \frac{\hat{P}_n(t) - \hat{P}_n(x)}{t - x} \, w(t)dt, \ n \geq 0. \tag{3.1.20}$$

Podemos mostrar facilmente que $Q_n(x)$ é um polinômio de grau $n-1$, cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a μ_0.

Como consequência da relação de recorrência (3.1.8) e da definição acima, podemos demonstrar que os polinômios associados $Q_n(x)$ satisfazem à mesma relação de recorrência dos polinômios ortogonais $\hat{P}_n(x)$, ou seja:

$$Q_{n+1}(x) = (x - \hat{\beta}_{n+1})Q_n(x) - \hat{\alpha}_{n+1}Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \qquad (3.1.21)$$

mas com condições iniciais $Q_0(x) = 0$ e $Q_1(x) = \mu_0$.

Além disso,

$$\hat{P}_{n+1}(x)Q_n(x) - \hat{P}_n(x)Q_{n+1}(x) = -\mu_0\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_3 \cdots \hat{\alpha}_{n+1} \neq 0. \qquad (3.1.22)$$

3.2 Frações contínuas e polinômios ortogonais

Iniciaremos esta seção com dois exemplos sobre a ligação entre frações contínuas e polinômios ortogonais.

3.2.1 Polinômios de Tchebyshev de 2ª espécie

Os polinômios de Tchebyshev de segunda espécie $U_n(x)$ podem ser definidos por

$$U_n(x) = \frac{sen[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1,1], \quad n = 0,1,2,\ldots .$$

Facilmente encontramos que

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_2(x) &= 2^2x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 2^3x^3 - 4x. \end{aligned}$$

Vamos, primeiramente, determinar duas propriedades:

a) a relação de recorrência de três termos;

b) que são ortogonais no intervalo $[-1,1]$ com relação à função peso $w(x) = \sqrt{1-x^2}$.

a) Usando a relação trigonométrica

$$sen[(n+2)\theta] + sen(n\theta) = 2\cos\theta sen[(n+1)\theta],$$

para $x = \cos\theta$ encontramos

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),$$

válida para $n \geq 0$ se tomarmos $U_{-1}(x) = 0$.

b) De

$$\int_0^\pi sen(k\theta)sen(j\theta)d\theta = 0$$

para k e j inteiros e $k \neq j$, obtemos

$$\int_0^\pi \frac{sen[(n+1)\theta]}{sen\theta} \; \frac{sen[(m+1)\theta]}{sen\theta} \; sen^2\theta d\theta$$
$$= \int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = 0,$$

para $m \neq n$. Para $m = n$ a integral acima é igual a $\pi/2$.

Uma conexão natural desses polinômios com frações contínuas é através da relação de recorrência, de onde segue que $U_n(x)$ é o denominador do $n-$ésimo convergente da fração contínua

$$\frac{-1}{2x} \; + \frac{-1}{2x} \; + \frac{-1}{2x} \; + \cdots + \frac{-1}{2x} \; + \cdots \; .$$

O polinômio $U_n(x)$ é de grau n e o coeficiente do termo de maior grau é 2^{-n}. Assim, o polinômio de Tchebyshev mônico pode ser escrito como

$$\hat{U}_n(x) = 2^{-n}U_n(x), \qquad n \geq 0.$$

Logo,,

$$\hat{U}_0(x) = 1, \qquad \hat{U}_1(x) = x$$

e, em geral, se $\hat{U}_{-1}(x) = 0$, temos

$$\hat{U}_{n+1}(x) = x\hat{U}_n(x) - \frac{1}{4}\;\hat{U}_{n-1}(x), \quad n \geq 0.$$

Os polinômios de Tchebyshev mônicos são, então, os denominadores dos convergentes da fração contínua

$$\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \cdots + \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \cdots . \tag{3.2.1}$$

Ainda temos válida a ortogonalidade, pois

$$\int_{-1}^{1} \hat{U}_n(x)\ \hat{U}_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}\ 2^{-(m+n)}\delta_{mn}.$$

O símbolo δ_{mn} é o delta de Kronecker que tem o valor 0 se $m \neq n$ e 1 se $m = n$.

3.2.2 Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre $P_n(x)$ são dados por

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x$$

e, em geral,

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

para $n \geq 0$, se $P_{-1}(x) = 0$. Facilmente encontramos os primeiros polinômios

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \\ P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Os polinômios de Legendre são ortogonais no intervalo $[-1,1]$ com relação à função peso $w(x) = 1$. Na verdade, temos

$$\int_{1}^{1} P_m(x)\ P_n(x)dx = \frac{n}{n+1}\ \delta_{mn}.$$

A relação de recorrência de três termos pode ser escrita como

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x). \tag{3.2.2}$$

Se, na fração contínua (1.1.2), tomarmos $a_0 = 0$, $b_1 \neq 0$ arbitrário,

$$b_{n+1} = -\frac{n}{n+1}, \qquad a_n = \frac{2n-1}{n} x, \qquad n \geq 1,$$

obtemos

$$\frac{b_1}{x} \, + \, \frac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{2}x} \, + \, \frac{-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{5}{3}x} \, + \, \frac{-\dfrac{3}{4}}{\dfrac{7}{4}x} \, + \cdots + \, \frac{-\dfrac{n}{n+1}}{\dfrac{2n+1}{n+1}x} \, + \cdots \; . \tag{3.2.3}$$

A relação de recorrência (3.2.2) é exatamente a relação de recorrência para os numeradores $p_n = p_n(x)$ e denominadores $q_n = q_n(x)$ dos convergentes $C_n = C_n(x)$, $n \geq 1$, da fração contínua acima. Como $q_0(x) = P_0(x) = 1$ e $q_1 = P_1(x) = x$, então a sequência $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ é a sequência dos denominadores dos convergentes da fração contínua (3.2.3).

Se multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração por um fator diferente de zero, não alteramos o valor da fração. Faremos isso com a fração contínua acima. Usando o termo 2/3 para o numerador e denominador da segunda fração, 5/3 para a terceira e, assim por diante, obteremos a fração contínua, equivalente a (3.2.3),

$$\frac{b_1}{x} \, + \, \frac{-\dfrac{1^2}{1\,.\,3}}{x} \, + \, \frac{-\dfrac{2^2}{3\,.\,5}}{x} \, + \, \frac{-\dfrac{3^2}{5\,.\,7}}{x} \, + \cdots \; . \tag{3.2.4}$$

A relação de recorrência para os denominadores é dada por

$$\hat{P}_{n+1}(x) = x\hat{P}_n(x) - \frac{n^2}{4n^2-1}\hat{P}_{n-1}(x)$$

e os valores iniciais são

$$\hat{P}_0(x) = 1, \qquad \hat{P}_1(x) = x.$$

Facilmente encontramos que

$$\begin{aligned}
\hat{P}_2(x) &= x^2 - \frac{1}{3}, \\
\hat{P}_3(x) &= x^3 - \frac{5}{3}x, \\
\hat{P}_4(x) &= x^4 - \frac{6}{6}x^2 + \frac{3}{35}
\end{aligned}$$

e, em geral,

$$\hat{P}_n(x) = x^n + \text{ termos com potências menores do que } n \text{ em } x,$$

isto é, $\hat{P}_n(x)$ é um polinômio mônico. A ortogonalidade, é claro, é preservada. Assim,

$$\int_{-1}^{1} \hat{P}_m(x)\hat{P}_n(x)dx = 0, \qquad m \neq n.$$

3.2.3 Caso Geral

Consideremos, agora, os polinômios ortogonais mônicos $\hat{P}_n(x)$ com relação a uma função peso $w(x)$ em um intervalo (a, b). Consideremos, também, a fração contínua dada por

$$\frac{\mu_0}{x - \hat{\beta}_1 -} \frac{\hat{\alpha}_2}{x - \hat{\beta}_2 -} \frac{\hat{\alpha}_3}{x - \hat{\beta}_3 -} \cdots - \frac{\hat{\alpha}_n}{x - \hat{\beta}_n -} \cdots , \tag{3.2.5}$$

onde $\hat{\beta}_n$ e $\hat{\alpha}_{n+1}$, $n \geq 1$, são os coeficientes da relação de recorrência para os polinômios ortogonais na forma mônica, dados por (3.1.11).

O $n-$ésimo convergente da fração contínua (3.2.5) é dado por

$$C_n = \frac{\mu_0}{x - \hat{\beta}_1 -} \frac{\hat{\alpha}_2}{x - \hat{\beta}_2 -} \frac{\hat{\alpha}_3}{x - \hat{\beta}_3 -} \cdots - \frac{\hat{\alpha}_n}{x - \hat{\beta}_n} = \frac{p_n}{q_n}, \quad n \geq 1, \tag{3.2.6}$$

e $C_0 = 0$.

Observe que, neste caso, $C_n = C_n(x)$, ou seja, $\dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{p_n(x)}{q_n(x)}$.

Utilizando as fórmulas de Wallis (1.1.4), obtemos

$$C_n(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = \frac{(x-\hat{\beta}_n)p_{n-1}(x) - \hat{\alpha}_n p_{n-2}(x)}{(x-\hat{\beta}_n)q_{n-1}(x) - \hat{\alpha}_n q_{n-2}(x)}, \quad n \geq 1,$$

onde $\hat{\alpha}_1 = -\mu_0$, $p_{-1}(x) = 1$, $p_0(x) = 0$, $q_{-1}(x) = 0$ e $q_0(x) = 1$.

Observe que a relação de recorrência de $q_n(x)$ é exatamente a mesma que a do polinômio associado ao ortogonal $Q_n(x)$, $n \geq 2$. Além disso, $q_0(x) = Q_0(x) = 0$ e $q_1(x) = Q_1(x) = \mu_0$. Logo, $q_n(x) = Q_n(x), n \geq 0$.

Do mesmo modo, concluímos que $p_n(x) = \hat{P}_n(x)$, $n \geq -1$. Assim, o $n-$ésimo convergente da fração contínua (3.2.5) é dado por

$$\frac{Q_n(x)}{\hat{P}_n(x)} = \frac{\mu_0}{x-\hat{\beta}_1} - \frac{\hat{\alpha}_2}{x-\hat{\beta}_2} - \frac{\hat{\alpha}_3}{x-\hat{\beta}_3} - \cdots - \frac{\hat{\alpha}_n}{x-\hat{\beta}_n}, \quad n \geq 0.$$

A fração contínua (3.2.5) é conhecida como fração contínua de Jacobi ou J-fração (ver Chihara [11]) devido à sua conexão com as matrizes de Jacobi dadas em (3.1.14).

Observe que as frações contínuas (3.2.1) e (3.2.4) são J-frações.

Exercícios

1. Os polinômios de Tchebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ e são definidos por

   $$T_n(x) = cos(n\theta), \quad x = cos(\theta), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \;, 0 < \theta < \pi \;.$$

   Mostre que eles satisfazem às seguintes identidades:

   a) $$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\,\delta_{mn}, & \text{se } n > 0 \\ \pi, & \text{se } m = n = 0. \end{cases}$$

   b) $$\int T_0(x)\; dx = T_1(x).$$

c) $\displaystyle\int T_1(x)\ dx = \frac{1}{4}\ T_2(x).$

d) $\displaystyle\int T_n(x)\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right], \quad n > 1.$

2. Os polinômios de Hermite $H_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$ com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$. Pela Fórmula de Rodrigues, são definidos por:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right], \quad n \geq 0.$$

Mostre que eles satisfazem à seguinte equação diferencial de 2ª ordem:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

3. Os polinômios de Legendre $P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso $w(x) = 1$. Podem ser definidos, através da Fórmula de Rodrigues, por:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n\right], \quad n \geq 0.$$

Usando a fórmula acima e integração por partes, mostre que eles satisfazem

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1}. \quad n \geq 0.$$

4. Demonstre as relações (3.1.21) e (3.1.22) para o polinômios associados aos ortogonais $Q_n(x)$.

5. Seja $P_n(x) = x^n$, $n \geq 0$. Mostre que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ não é uma sequência de polinômios ortogonais.

6. Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) com relação a uma função peso $w(x)$. Então,

$$\int_a^b P_n^2(x) w(x) dx < \int_a^b |\pi(x)|^2 w(x) dx,$$

para todo polinômio $\pi(x) \neq P_n(x)$ de grau n.

7. Seja $\pi(x)$ um polinômio tal que

$$\int_a^b \pi(x)x^k w(x)dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Então, $\pi(x) \equiv 0$.

8. Para os polinômios de Tchebyshev de primeira espécie $T_n(x)$, obtenha a seguinte fórmula de recorrência:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.

9. Considere os polinômios de Legendre $P_n(x)$. Mostre que

$$P_{n+1}(x) + P_n(x) = \frac{1 \ . \ 3 \ \dots \ (2n+1)}{(n+1)!}(x+1)\tilde{P}_n(x),$$

onde $\left\{\tilde{P}_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ denota a sequência de polinômios ortogonais mônicos em $(-1, 1)$ com relação à função peso $w(x) = 1 + x$.

10. Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) com relação à função peso $w(x)$. Denotemos por $x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}$ os zeros de $P_n(x)$ e $y_{n-1,1} < y_{n-1,2} < \cdots < y_{n-1,n-1}$ os zeros do polinômios associado $Q_n(x)$ de grau $n-1$, $n \geq 2$, em ordem crescente. Mostre que

$$x_{n,k-1} < y_{n-1,k-1} < x_{n,k}, \qquad k = 2, 3, \dots, n.$$

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Expansão de funções em frações contínuas

Muitas das funções especiais que ocorrem em aplicações da Matemática são definidas por processos infinitos, tais como séries, integrais, iterações. A fração contínua é um desses processos infinitos. Para mais informações sobre esses assuntos, referimo-nos a Abramowitz e Stegun [1], Khovanskii [20], Kincaid e Cheney [21], Perron [25] e Wall [38].

Um exemplo de expansão de funções em frações contínuas, que não é única, é o da função exponencial dada por

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} \, \frac{}{-} \, \frac{x}{2} \, \frac{}{+} \, \frac{x}{3} \, \frac{}{-} \, \frac{x}{2} \, \frac{}{+} \, \frac{x}{5} \, \frac{}{-} \, \frac{x}{2} \, \frac{}{+} \, \frac{x}{7} \, \frac{}{-} \, \frac{x}{2} \, \frac{}{+} \, \dots \; .$$

Euler obteve a seguinte expansão para a função exponencial

$$e^x = 0 + \frac{1}{1} \, \frac{}{+} \, \frac{-2x}{2+x} \, \frac{}{+} \, \frac{x^2}{6} \, \frac{}{+} \, \frac{x^2}{10} \, \frac{}{+} \, \frac{x^2}{14} \, \frac{}{+} \, \frac{x^2}{18} \, \frac{}{+} \, \dots \; . \tag{4.1.1}$$

Os primeiros convergentes são dados por

$$\begin{aligned}
\frac{p_0}{q_0} &= \frac{0}{1}\\
\frac{p_1}{q_1} &= \frac{1}{1}\\
\frac{p_2}{q_2} &= \frac{(2+x)p_1+(-2x)p_0}{(2+x)q_1+(-2x)q_0} = \frac{2+x}{2-x}\\
\frac{p_3}{q_3} &= \frac{6p_2+x^2p_1}{6q_2+x^2q_1} = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}\\
\frac{p_4}{q_4} &= \frac{10p_3+x^2p_2}{10q_3+x^2q_2} = \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}\\
\frac{p_5}{q_5} &= \frac{14p_4+x^2p_3}{14q_4+x^2q_3} = \frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Note que os convergentes são funções racionais que podem aproximar valores para a função e^x. Podemos, por exemplo, aproximar o valor de e^{-1} através desses convergentes. Vamos compará-los com os valores obtidos pela expansão em série de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots . \tag{4.1.2}$$

Vamos aproximar o valor $e^{-1} = 0.367879441171...$. Fazendo $x = -1$, obtemos os seguintes valores:

nº termos	convergentes	Taylor
1	0	1
2	1	0
3	$\underline{0.3}333333333$	0.5000000000
4	$\underline{0.36}84210526$	$\underline{0.3}333333333$
5	$\underline{0.367875}6477$	$\underline{0.3}750000000$
6	$\underline{0.36787944}561$	$\underline{0.36}66666667$

A fração contínua

$$e^x = 1 + \frac{x}{1-}\,\frac{x/2}{1\;+}\,\frac{x/6}{1\;-}\,\frac{x/2}{1\;+}\,\frac{x/10}{1\;-}\,\frac{x/2}{1\;+}\,\frac{x/14}{1\;-}\,\frac{x/2}{1\;+}\cdots \tag{4.1.3}$$

também é uma expansão da função exponencial.

Definição 4.1. *Dizemos que uma fração contínua corresponde a uma série de potências se os convergentes de ordem $n+1$ da fração contínua, quando expandidos em série de potências, coincidem com os n primeiros termos da série.*

Por exemplo, a fração contínua (4.1.3) corresponde à série (4.1.2), pois

$$\begin{aligned}
\frac{p_0}{q_0} &= \frac{1}{1} = 1\\
\frac{p_1}{q_1} &= 1 + \frac{x}{1} = \frac{1+x}{1} = 1 + x\\
\frac{p_2}{q_2} &= \frac{p_1 + (-x/2)p_0}{q_1 + (-x/2)q_0} = \frac{1 + (1/2)x}{1 - (1/2)x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \cdots\\
\frac{p_3}{q_3} &= \frac{p_2 + (x/6)p_1}{q_2 + (x/6)q_1} = \frac{1 + (2/3)x + (1/6)x^2}{1 - (1/3)x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2\\
&= +\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{18}x^4 + \cdots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Observe que, para $n \geq 3$, os convergentes de ordem n da fração contínua (4.1.1), quando expandidos em série de potências, coincidem com $2n-1$ termos da série (4.1.2), uma vez que

$$\begin{aligned}
\frac{p_2}{q_2} &= \frac{2+x}{2-x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \cdots \\
\frac{p_3}{q_3} &= \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{144}x^5 + \cdots \\
\frac{p_4}{q_4} &= \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 \\
&\quad + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{4800}x^7 + \cdots \\
\frac{p_5}{q_5} &= \frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \\
&\quad + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{23}{8467200}x^9 + \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Para calcular a expansão de uma função em fração contínua, podemos também utilizar substituições sucessivas.

Seja f uma função. Calculamos $T_1, T_2, ..., T_{n+1}, ...$, tais que

$$\begin{aligned}
f &= a_0 + T_1, \\
T_1 &= \frac{b_1}{a_1 + T_2}, \\
T_2 &= \frac{b_2}{a_2 + T_3}, \\
&\vdots \\
T_i &= \frac{b_i}{a_i + T_{i+1}}, \quad 2 \le i \le n,
\end{aligned}$$

onde b_0, a_i, b_i são escolhidos arbitrariamente e podem ser funções dos argumentos de f. Deste modo, temos que

$$f = a_0 + T_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + T_2} = a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\,\frac{b_2}{a_2 +}\,\ldots\,\frac{b_{n-1}}{+\,a_{n-1} +}\,\frac{b_n}{a_n + T_{n+1}}.$$

Continuando este processo de substituições sucessivas, obtemos a fração contínua.

Exemplo 4.1. *Considere a expansão em série de Taylor em torno de* $x_0 = 0$
da função e^x,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \cdots\ .$$

Tomando $a_0 = 1$, obtemos

$$e^x = a_0 + T_1 = 1 + T_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = e^x - 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T_1 &= x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \cdots\right) \\ &= \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \cdots\right)^{-1}} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right. &+ \left.\frac{x^5}{720} + \cdots\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \cdots}, \end{aligned}$$

fazendo essa divisão, obtemos

$$T_1 = \frac{x}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \cdots} = \frac{x}{1 - x + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \cdots\right)}.$$

Portanto, $T_1 = \dfrac{b_1}{a_1 + T_2}$, onde escolhemos $b_1 = x$, $a_1 = 1 - x$ e $T_2 = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^4}{720} + \cdots$. Mas,

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{x}{2}\left(1 + \frac{x}{6} - \frac{x^3}{360} + \cdots\right) = \frac{x}{2}\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{6} - \frac{x^3}{360} + \cdots\right)^{-1}} \\ &= \frac{x}{2}\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{36} - \frac{x^3}{540} + \cdots\right)} \\ &= \frac{x}{2 - x + \left(\frac{2x}{3} + \frac{x^2}{18} - \frac{x^3}{270} + \cdots\right)}. \end{aligned}$$

Logo, $T_2 = \dfrac{b_2}{a_2 + T_3}$, onde escolhemos $b_2 = x$, $a_2 = 2 - x$ e $T_3 = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{x^2}{18} - \dfrac{x^3}{270} + \cdots$. Porém, podemos escrever T_3 como

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{2}{3}x\left(1 + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{180} + \cdots\right) = \frac{2}{3}x\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{180} + \cdots\right)^{-1}} \\ &= \frac{2}{3}x\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{12} + \frac{x^2}{80} + \cdots\right)} = \frac{2x}{3 - x + \left(\frac{3x}{4} + \frac{3x^2}{80} + \cdots\right)}. \end{aligned}$$

Assim, $T_3 = \dfrac{b_3}{a_3 + T_4}$, onde $b_3 = 2x$, $a_3 = 3 - x$ e

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{3}{4}x\left(1 + \frac{x}{20} + \cdots\right) = \frac{3}{4}x\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{20} + \cdots\right)^{-1}} \\ &= \frac{3}{4}x\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{20} + \cdots\right)} = \frac{3x}{4 - x + \left(\frac{4x}{5} + \cdots\right)}. \end{aligned}$$

Portanto, $T_4 = \dfrac{b_4}{a_4 + T_5}$, onde $b_4 = 3x$, $a_4 = 4 - x$ e $T_5 = \dfrac{4}{5}x(1 + \cdots)$.

Se continuarmos deste modo, encontraremos $b_i = (i-1)x$, $a_i = i - x$ e

$$T_{i+1} = \frac{ix}{i+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_k x^k\right),$$

o que novamente sugere escolhermos $b_{i+1} = ix$ e $a_{i+1} = (i+1) - x$. Logo,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1 - x +}\,\frac{x}{2 - x +}\,\frac{2x}{3 - x +}\,\frac{3x}{4 - x +}\,\frac{4x}{5 - x + \ldots}.$$

Exemplo 4.2. *Considere a expansão em série de Taylor em torno da origem da função* $ln(1+x)$*,*

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots .$$

Fazendo $a_0 = 0$ e procedendo de maneira análoga ao exemplo anterior, obtemos a seguinte expansão em fração contínua para esta série

$$ln(1+x) = \frac{x}{1 +}\,\frac{x/2}{1 +}\,\frac{x/6}{1 +}\,\frac{x/3}{1 + \ldots}.$$

Um outro exemplo de expansão de funções em frações contínuas, devido a Lambert, é o seguinte:

$$tg^{-1}(x) = \frac{x}{1 +}\,\frac{x^2}{3 +}\,\frac{4x^2}{5 +}\,\frac{9x^2}{7 +}\,\frac{16x^2}{9 + \ldots}, \quad |x| < 1. \qquad (4.1.4)$$

Para $n \geq 2$ note que o $n-$ésimo convergente desta fração contínua é dado por

$$C_n(x) = \frac{x}{1 +}\,\frac{x^2}{3 +}\,\frac{4x^2}{5 +} \ldots + \frac{(n-1)^2x^2}{2n-1}$$

e, além disso, $C_0(x) = 0$ e $C_1(x) = x$. Assim,

$$\begin{aligned}
C_0(x) &= \frac{0}{1}\\
C_1(x) &= \frac{x}{1}\\
C_2(x) &= \frac{3x}{x^2+3}\\
C_3(x) &= \frac{4x^3}{9x^2+15}\\
C_4(x) &= \frac{55x^3+105x}{9x^4+90x^2+105}\\
C_5(x) &= \frac{64x^5+735x^3+945x}{225x^4+1050x^2+945}\\
C_6(x) &= \frac{2207x^5+12180x^3+12285x}{225x^6+5175x^4+16275x^2+12285}\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

A equação (4.1.4) é definida por meio de

$$tg^{-1}(x) = \lim_{n\to\infty} C_n(x), \quad |x| < 1. \tag{4.1.6}$$

Se considerarmos que esta equação é válida, obtemos, então, um método alternativo para calcular valores da função $tg^{-1}(x)$. Se o método é prático, depende de quão rapidamente a equação (4.1.6) acima irá convergir.

Para verificarmos isto numericamente, vamos calcular $tg^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6 \approx 0.5235987756$ usando a sequência $C_n(1/\sqrt{3})$ para $n \geq 2$ e comparar com os valores obtidos pela série de Taylor para a função $arctg(x)$

$$tg^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\ . \tag{4.1.7}$$

Fazendo $x = 1/\sqrt{3}$ em (4.1.5) e em (4.1.7), obtemos os seguintes valores:

nº termos	convergentes	Taylor
1	$\underline{0.5}77350269$	$\underline{0.5}77350269$
2	$\underline{0.5}19615242$	$\underline{0.5}13200239$
3	$\underline{0.523}891910$	$\underline{0.52}6030245$
4	$\underline{0.523}577450$	$\underline{0.52}2975481$
5	$\underline{0.523}600319$	$\underline{0.523}767457$
6	$\underline{0.523598}903$	$\underline{0.523}551464$

Esta tabela mostra que obtivemos seis casas decimais de precisão no sexto convergente e apenas quatro na série de Taylor com seis termos.

Daremos, agora, um outro procedimento pelo qual uma fração contínua pode ser obtida a partir de uma série.

Teorema 4.1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_1 -}\,\frac{x_1^2}{x_1 + x_2 -}\,\frac{x_2^2}{x_2 + x_3 -}\,\frac{x_3^2}{x_3 + x_4 -}\,\ldots\,\frac{x_{n-1}^2}{-\,x_{n-1} + x_n -}\,\ldots \tag{4.1.8}$$

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser feita por indução e a deixamos como exercício para o leitor. ■

Para ilustrar como este teorema pode ser usado, vamos construir a fração contínua de $tg^{-1}(x)$ a partir de sua série, isto é,

$$\begin{aligned}
tg^{-1}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \\
&= \frac{1}{x^{-1}} + \frac{1}{-3x^{-3}} + \frac{1}{5x^{-5}} + \frac{1}{-7x^{-7}} + \cdots \\
&= \frac{1}{x^{-1} -}\,\frac{(x^{-1})^2}{x^{-1} + (-3x^{-3}) -}\,\frac{(-3x^{-3})^2}{(-3x^{-3}) + (5x^{-5})} \\
&\quad -\,\frac{(5x^{-5})^2}{(5x^{-5}) + (-7x^{-7}) -}\,\ldots \\
&= \frac{x}{1 +}\,\frac{-x^2}{x^2 - 3 +}\,\frac{-9x^2}{-3x^2 + 5 +}\,\frac{-25x^2}{5x^2 - 7 -}\,\ldots\ .
\end{aligned}$$

Observe que a fração contínua de Lambert (4.1.4) para $tg^{-1}(x)$ não é a mesma que a obtida acima a partir de sua série. Além disso, o algoritmo para se calcular aproximações para $tg^{-1}(x)$ a partir desta fração contínua é bem mais complicado do que aquele baseado no cálculo das somas parciais da série e produz a mesma sequência de aproximações. Fica a cargo do leitor verificar esta afirmação.

4.1.1 Avaliação de uma função racional

Considere a função racional

$$R(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

onde a_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, e b_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, são números complexos e, além disso, $m \leq n$. Para avaliarmos esta função em um dado ponto x, observe que precisamos executar $\dfrac{m(m+1)}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ multiplicações.

Podemos usar o algoritmo de Horner para diminuir o número de operações de multiplicação na avaliação de $R(x)$, ou seja, podemos escrever $R(x)$ da forma

$$R(x) = \frac{(\cdots(a_m x + a_{m-1})x + \cdots + a_1)x + a_0}{(\cdots(b_n x + b_{n-1})x + \cdots + b_1)x + b_0}$$

e, assim, executar apenas $m + n + 1$ multiplicações.

Porém, o uso de frações contínuas pode diminuir ainda mais essa quantidade de multiplicações. Um função racional pode ser expandida em diferentes frações contínuas. Vejamos isso com um exemplo. Seja

$$R(x) = \frac{3x^3 + 10x^2 + 12}{3x^3 - 2x^2 + 12}. \tag{4.1.9}$$

Assim,

$$\begin{aligned} R(x) &= 1+\cfrac{4}{x-\cfrac{2}{3}+\cfrac{4}{x^2}} && (4.1.10)\\ &= 1+\cfrac{1}{\cfrac{x}{4}-\cfrac{1}{6}+\cfrac{1}{x^2}} && (4.1.11)\\ &= 1+\cfrac{12}{3x-2+\cfrac{12}{x^2}}. && (4.1.12) \end{aligned}$$

A fração contínua em (4.1.10) é conhecida como mônica, pois os polinômios envolvidos são mônicos, a (4.1.11) como simples, pois os numeradores parciais são iguais a 1 e a (4.1.12) é chamada de regular, pois os coeficientes das potências de x são números inteiros.

Para obtermos a fração contínua simples para uma função racional, podemos usar o Algoritmo de Euclides, procedendo da mesma forma que para números racionais na Seção 2.3.

Seja, então, $R(x) = \dfrac{p_{n_0}(x)}{p_{n_1}(x)}$, com $p_{n_0} \in \mathbb{P}_{n_0}$, $p_{n_1} \in \mathbb{P}_{n_1}$ e $n_0 \geq n_1$. Suponhamos que p_{n_1} não divide exatamente p_{n_0}. Assim, podemos escrever

$$\frac{p_{n_0}(x)}{p_{n_1}(x)} = \alpha_0(x) + \frac{p_{n_2}(x)}{p_{n_1}(x)} = \alpha_0(x) + \cfrac{1}{\cfrac{p_{n_1}(x)}{p_{n_2}(x)}},$$

onde $p_{n_2}(x) \in \mathbb{P}_{n_2}$ e $n_1 > n_2$. Analogamente,

$$\frac{p_{n_1}(x)}{p_{n_2}(x)} = \alpha_1(x) + \frac{p_{n_3}(x)}{p_{n_2}(x)},$$

onde $p_{n_3}(x) \in \mathbb{P}_{n_3}$ e $n_2 > n_3$. Logo,

$$\frac{p_{n_0}(x)}{p_{n_1}(x)} = \alpha_0(x) + \cfrac{1}{\alpha_1(x) + \cfrac{p_{n_3}(x)}{p_{n_2}(x)}}.$$

Continuando, obtemos a fração contínua finita

$$\frac{p_{n_0}(x)}{p_{n_1}(x)} = \alpha_0(x) + \frac{1}{\alpha_1(x)\ +}\ \frac{1}{\alpha_2(x)\ +}\ \ldots\ \frac{1}{+\ \alpha_{n_k}(x)},$$

onde $\alpha_{n_k}(x) = \dfrac{p_{n_k}(x)}{p_{n_{k+1}}(x)}$ e $p_{n_{k+1}}(x)$ é um polinômio de grau 1 ou divide exatamente $p_{n_k}(x)$, uma vez que $n_0 \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_k > n_{k+1}$.

Para obtermos o número de operações de multiplicação necessárias para avaliar esta fração contínua, tomemos a função racional (4.1.9). Usando o algoritmo de Horner para fazer as avaliações dos polinômios do numerador e do denominador, vamos executar 07 operações de multiplicação no total, ao passo que usando a fração contínua (4.1.10), obtida pelo algoritmo de Euclides, necessitaremos de apenas 03.

Utilizando a forma (4.1.11) serão necessárias 04 multiplicações.

4.2 Aproximações racionais para números irracionais

Notamos que os convergentes das frações contínuas simples (2.5.1) e (2.6.6) formam aproximações racionais para os valores irracionais $\sqrt{2}$ e Φ, respectivamente. Nesta seção, consideraremos o problema de encontrar aproximações racionais para números irracionais.

Definição 4.2. *Chamamos o número racional $\dfrac{a}{b}$ (irredutível) de melhor aproximação racional para o número irracional x se*

$$|bx - a| < |qx - p|, \tag{4.2.1}$$

para qualquer racional $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{a}{b}$, tal que $0 < q \leq b$.

É fácil ver que (4.2.1) implica em

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|. \tag{4.2.2}$$

De fato,

$$q < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{q} \Rightarrow \left|\frac{1}{b}(bx-a)\right| < \left|\frac{1}{q}(qx-p)\right| \Rightarrow \left|x-\frac{a}{b}\right| < \left|x-\frac{p}{q}\right|.$$

Por outro lado, (4.2.2) não implica em (4.2.1). Por exemplo,

$$\left|\pi - \frac{179}{57}\right| < \left|\pi - \frac{22}{7}\right|,$$

mas $|57\pi - 179| > |7\pi - 22|$.

Parece mais natural utilizar (4.2.2) para definir melhor aproximação, mas utilizamos a Definição 4.2 por ser mais fácil para caracterizá-la. Por exemplo, vamos mostrar que qualquer melhor aproximação para x é um convergente da fração contínua simples associada a x e, como uma exceção trivial, qualquer convergente da fração contínua associada a x é uma melhor aproximação para x, definida pela Definição 4.2. Por outro lado, se utilizarmos (4.2.2), uma melhor aproximação pode ou não ser um convergente.

Para simplificar, denotemos por d_k a k-ésima diferença

$$d_k = q_k x - p_k, \quad k \geq 1, \tag{4.2.3}$$

com $d_{-1} = -1$ e $d_0 = x - a_0 = \{x\}$, onde $\{x\}$ significa a parte fracionária de x.

Primeiramente, vamos investigar as relações entre x, os convergentes $\dfrac{p_k}{q_k}$ e $d_k = q_k x - p_k$.

Como p_k e q_k satisfazem às relações de recorrência (1.1.4), segue que

$$d_{k+1} = a_{k+1} d_k - d_{k-1}, \quad k \geq 0. \tag{4.2.4}$$

Tomando $x = [a_0; a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}]$, então $x_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, \ldots]$ e, assim,

$$x = \frac{x_{k+1} p_k + p_{k-1}}{x_{k+1} q_k + q_{k-1}}, \quad k \geq 1. \tag{4.2.5}$$

Portanto,

$$x - \frac{p_k}{q_k} = \frac{-(-1)^{k-1}}{q_k(q_k x_{k+1} + q_{k-1})}.$$

Assim, o k-ésimo convergente aproxima x com erro

$$x - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k^2\left(x_{k+1} + \dfrac{q_{k-1}}{q_k}\right)}. \tag{4.2.6}$$

Logo, da equação (4.2.6), temos que

$$d_k = q_k x - p_k = \frac{(-1)^k}{q_k x_{k+1} + q_{k-1}}. \tag{4.2.7}$$

Como $x_{k+1} = a_{k+1} + \dfrac{1}{x_{k+2}}$, da equação acima obtemos

$$d_k = \frac{(-1)^k}{a_{k+1}q_k + q_{k-1} + \dfrac{q_k}{x_{k+2}}} = x_{k+2}\frac{(-1)^k}{q_{k+1}x_{k+2} + q_k}$$

e, de (4.2.7),

$$d_{k+1} = -\frac{d_k}{x_{k+2}}. \tag{4.2.8}$$

Assim, a sequência $\{d_k\}$ tem sinais alternantes e a sequência $\{|d_k|\}$ tende para zero monotonicamente. Como $a_{k+1} < x_{k+1}$, de (4.2.7) temos que

$$|d_k| = \left|\frac{(-1)^k}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}}\right| < \frac{1}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} = \frac{1}{q_{k+1}} \leq \frac{1}{2}, \quad k \geq 1, \tag{4.2.9}$$

pois $q_2 = a_1a_2 + 1 \geq 2$. Note que esta propriedade é análoga a (2.5.11).

Além disso, como $x_{k+1} < a_{k+1} + 1$, obtemos

$$|d_k| = \left|\frac{(-1)^k}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}}\right| > \frac{1}{q_k(a_{k+1} + 1) + q_{k-1}} = \frac{1}{q_k + q_{k+1}}. \tag{4.2.10}$$

Veremos, agora, resultados sobre os convergentes da expansão de x em fração contínua simples e aproximações racionais para x.

Teorema 4.2. *Seja x um número real. Qualquer melhor aproximação racional de x, definida pela Definição 4.2, é um convergente da expansão de x em fração contínua simples.*

Demonstração: Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Se x é racional, exigimos que $a_n \geq 2$, onde a_n é o denominador do último quociente parcial. Como os convergentes são aproximações de x alternadamente por cima e por baixo (Teorema 2.2), podemos observar que

$$a_0 = \frac{p_0}{q_0} \; < \; \frac{p_2}{q_2} \; < \; \cdots \; < \; x \; < \; \cdots \; < \; \frac{p_3}{q_3} \; < \; \frac{p_1}{q_1} \; < \; a_0 + 1.$$

Suponhamos, por absurdo, que a melhor aproximação $\dfrac{a}{b}$ não seja um convergente. Primeiramente, consideremos $\dfrac{a}{b} < \dfrac{p_0}{q_0}$. Então,

$$|bx - a| = b\left|x - \frac{a}{b}\right| \geq \left|x - \frac{a}{b}\right| > |x - a_0|,$$

o que contradiz o fato de $\dfrac{a}{b}$ ser uma melhor aproximação.

Agora, suponhamos $\dfrac{a}{b} > \dfrac{p_1}{q_1}$. Como $\dfrac{p_1}{q_1} > x$, temos que

$$|bx - a| = b\left|x - \frac{a}{b}\right| \geq b\left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b}\right| \geq b\frac{1}{q_1 b} = \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1}.$$

Mas, como $|x - a_0| < \dfrac{1}{a_1}$, chegamos novamente a uma contradição.

Finalmente, se $\dfrac{a}{b}$ está entre $\dfrac{p_0}{q_0}$ e $\dfrac{p_1}{q_1}$ e não é um convergente, então deve estar entre dois convergentes de valores consecutivos, digamos os de ordem k e $k+2$, ou seja,

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} < \cdots < x < \cdots < \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} < \frac{a}{b} < \frac{p_k}{q_k} < \cdots < \frac{p_1}{q_1}.$$

Assim, de (1.1.5) e das desigualdades acima, temos

$$\frac{1}{q_k q_{k+1}} = \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| > \left|\frac{a}{b} - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k b},$$

e, então, $b > q_{k+1}$. Mas,

$$|bx - a| = b\left|x - \frac{a}{b}\right| > b\left|\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{a}{b}\right| \geq b\frac{1}{q_{k+2} b} = \frac{1}{q_{k+2}}.$$

Como, por (4.2.9), $|q_{k+1}x - p_{k+1}| < \dfrac{1}{q_{k+2}}$, $\dfrac{a}{b}$ não pode ser uma melhor aproximação e o teorema está demonstrado. ∎

Vamos, agora, mostrar que todo convergente é uma melhor aproximação, com uma exceção. Suponhamos que x seja um número do tipo $x = a_0 + 1/2$. Então, $|x - (a_0 + 1)| = |x - a_0|$ e, neste caso, seu convergente não é uma melhor aproximação. Temos, então, o seguinte resultado

Teorema 4.3. *Seja x diferente da forma $a_0 + 1/2$. Então, todo convergente da expansão de x em fração contínua simples é uma melhor aproximação para x.*

Demonstração: Consideremos q_n dado e B um valor para b tal que $0 < b \leq q_n$ e $|bx - a|$ é minimizado (se há várias escolhas para B, então tomamos a menor delas). Seja A o correspondente valor para a e suponhamos que A seja único. Nessas condições, $\dfrac{A}{B}$ é uma melhor aproximação e, pelo Teorema 4.2, é um convergente $\dfrac{p_k}{q_k}$, para algum $k \leq n$. Se $k < n$, sabemos, de (4.2.10), que

$$|q_k x - p_k| > \frac{1}{q_k + q_{k+1}} \geq \frac{1}{q_{n-1} + q_n},$$

enquanto que $|q_n x - a_n| < \dfrac{1}{q_{n+1}}$. Mas, se $|q_k x - a_k|$ são menores do que $|q_n x - a_n|$, devemos ter $q_{n+1} < q_n + q_{n-1}$, o que é impossível. Assim, $k = n$ e $\dfrac{A}{B}$ é o convergente $\dfrac{p_n}{q_n}$.

Agora, consideremos a situação em que A não é único. Então, Bx deve ser do tipo $A + \dfrac{1}{2}$, onde A é um inteiro positivo. Logo, $Bx - A = \dfrac{1}{2}$ e, então, $x = \dfrac{1 + 2A}{2B}$. Observe que se $\dfrac{1 + 2A}{2B} = 2$, teremos $A = \dfrac{4B - 1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Logo, se $(1 + 2A, 2B) = m > 1$, então $(1 + 2A, 2B)$ não pode ser 2 e, neste caso, $(2B/m)t - (1 + 2A)/m = 0$, o que contradiz a definição de B.

Assim, o racional $x = \dfrac{1+2A}{2B}$ tem uma expansão em fração contínua simples que termina quando $x = \dfrac{p_n}{q_n}$, com $p_n = 1+2A$ e $q_n = 2B = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, onde $a_n \geq 2$. Se $n = 1$ e $a_n > 2$, ou se $n > 1$, temos $q_{n-1} < B$. Logo,

$$|q_{n-1}x - p_{n-1}| = \left| q_{n-1}\frac{p_n}{q_n} - p_{n-1} \right| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2B} \leq |Bx - A| = \frac{1}{2},$$

o que contradiz a definição de B. Como excluímos o caso em que $n = 1$ e $a_n = 2$, a demonstração está completa. ■

Exemplo 4.3. *Considere a expansão de π em fração contínua simples*

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{292+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{14+}\,\ldots\,.$$

Seus primeiros convergentes são dados por

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1} && = 3 && = 3\\
c_1 &= \frac{p_1}{q_1} = 3 + \frac{1}{7} && = \frac{22}{7} && = \underline{3.14}2857142857\\
c_2 &= \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2p_1 + p_0}{a_2q_1 + q_0} = \frac{15\cdot 22 + 3}{15\cdot 7 + 1} && = \frac{333}{106} && = \underline{3.1415}09433962\\
c_3 &= \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3p_2 + p_1}{a_3q_2 + q_1} = \frac{1\cdot 333 + 22}{1\cdot 106 + 7} && = \frac{355}{113} && = \underline{3.141592}920354\\
c_4 &= \frac{p_4}{q_4} = \frac{a_4p_3 + p_2}{a_4q_2 + q_2} = \frac{292\cdot 355 + 333}{292\cdot 113 + 106} && = \frac{103993}{33102} && = \underline{3.141592653}012
\end{aligned}$$

Observe que $\pi = 3.141592653589...$.

Temos, então, que $\dfrac{355}{113}$ é a melhor aproximação racional para π com denominador menor do que 113, isto é, $|113\pi - 355| < |q\pi - p|$ para $q < 113$.

Além disso, é possível mostrar o seguinte resultado

Teorema 4.4. *Seja* $\frac{p}{q} \neq \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$*, com* $0 < q \leq q_{k+1}$*. Então,*

$$|q_{k+1}x - p_{k+1}| < |q_k x - p_k| \leq |qx - p|.$$

Demonstração: A primeira desigualdade é conseqüência de (4.2.8).

Para mostrar a segunda desigualdade, consideremos a equação

$$\begin{aligned} qx - p &= m(q_{k+1}x - p_{k+1}) + n(q_k x - p_k) \\ &= (mq_{k+1} + nq_k)x - (mp_{k+1} + np_k). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau em x, obtemos duas equações lineares nas incógnitas m e n:

$$\begin{cases} p = mp_{k+1} + np_k \\ q = mq_{k+1} + nq_k \end{cases},$$

cujo determinante da matriz dos coeficientes é $p_{k+1}q_k - q_{k+1}p_k = (-1)^k$. Logo, m e n devem ser números inteiros. Como $\frac{p}{q} \neq \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, n não pode ser zero. Se $m = 0$, então

$$|qx - p| = |n(q_k x - p_k)| = |n||q_k x - p_k| \geq |q_k x - p_k|.$$

Suponhamos, agora, que $m \neq 0$. Como $q < q_{k+1}$ por hipótese, m e n devem ter sinais opostos. Mas, $q_{k+1}x - p_{k+1}$ e $q_k x - p_k$ também têm sinais opostos. Logo,

$$|qx - p| = |m(q_{k+1}x - p_{k+1})| + |n(q_k x - p_k)| \geq |q_k x - p_k|.$$

E assim o resultado está demonstrado. ∎

Portanto, do exemplo anterior, podemos observar que $\frac{355}{113}$ é a melhor aproximação racional para π com denominador menor do que 33102, isto é, $|113\pi - 355| < |q\pi - p|$ para $q < 33102$.

Consideremos, agora, o problema de encontrar uma aproximação racional $\dfrac{a}{b}$ para um número real x, tal que $|bx - a| < \frac{1}{2}$ e cujo denominador b satisfaça $b < q_{N+1}$, onde q_{N+1} é o denominador do convergente c_{N+1}, para algum $N \geq 0$. Vejamos alguns resultados preliminares.

Algoritmo de Ostrowski

Embora nossas observações sobre melhor aproximação sejam verdadeiras para números racionais e irracionais, suponhamos, por simplicidade, que x é irracional.

Sabemos que a sequência $\{q_k\}$ satisfaz

$$1 = q_0 < q_1 < q_2 < q_3 < \cdots .$$

Logo, para qualquer número natural m, há um índice N tal que $q_N \leq m < q_{N+1}$. Escrevendo m da forma $m = \lfloor m/q_N \rfloor q_N + R$, o resto R satisfaz $0 \leq R < q_N$. Se $R > 0$, como $R < q_N$, então $q_k \leq R < q_{k+1}$, com $k < N$.

Assim, podemos escrever R como

$$R = \lfloor R/q_k \rfloor q_k + R_1, \quad \text{com} \quad 0 \leq R_1 < q_k.$$

Se $R_1 = 0$, então $m = \lfloor m/q_N \rfloor q_N + \lfloor R/q_k \rfloor q_k$. Caso contrário, repetimos o procedimento anterior até que o resto seja igual a zero.

Este processo de decomposição é conhecido como *algoritmo de Ostrowski* e nos permitirá expressar um inteiro m como uma soma de múltiplos dos elementos q_k para $0 \leq k \leq N$, que chamaremos de representação de Ostrowski de m:

$$m = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} q_k. \tag{4.2.11}$$

Note que a construção de α_{k+1} mostra que eles são únicos e satisfazem $0 \leq \alpha_{k+1} \leq a_{k+1}$, para $k > 1$ e $0 \leq \alpha_1 < a_1$, pois $q_0 = 1$ e $q_1 = a_1$.

Exemplo 4.4. *Considere a expansão de π em fração contínua simples*

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{292+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{14+\ \ldots}\ .$$

Escreva $m = 2000$ *como soma de múltiplos dos denominadores* q_k *dos convergentes da fração contínua acima, utilizando o algoritmo de Ostrowski.*

Os primeiros convergentes são

k	0	1	2	3	4
$\frac{p_k}{q_k}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{333}{106}$	$\frac{355}{113}$	$\frac{103993}{33102}$

Como $2000 < q_4 = 33102$ então escrevemos $2000 = 17 \cdot 113 + 79$. Agora, observe que $79 < q_2 = 106$ então escrevemos $79 = 11 \cdot 7 + 2$ e, assim

$$2000 = 17 \cdot 113 + 0 \cdot 106 + 11 \cdot 7 + 2 \cdot 1,$$

ou seja,

$$2000 = 17 \cdot q_3 \;\; + 0 \cdot q_2 \;\; + 11 \cdot q_1 + 2 \cdot q_0.$$

Vamos, agora, analisar $||mx||$, onde $||x||$ significa a distância ao inteiro mais próximo de x. Como a distância ao inteiro mais próximo não muda por translação inteira, tomando

$$m = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} q_k \quad \text{e} \quad A = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} p_k,$$

como $d_k = q_k x - p_k$, temos

$$||mx|| = ||mx - A|| = \left|\left| \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} q_k x - \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} p_k \right|\right| = \left|\left| \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k \right|\right|.$$

Se a última soma (envolvendo os valores d_k) é suficientemente pequena (menor do que $1/2$), então a distância ao inteiro mais próximo é o valor absoluto da expressão.

Para analisar o valor de $||mx||$, precisamos ainda do resultado a seguir.

Lema 4.1. *Seja α_{n+1} o primeiro coeficiente $\alpha_{k+1} \neq 0$ em* (4.2.11)*, tal que $0 \leq n \leq N$. Então,*

$$|(\alpha_{n+1}-1)d_n - d_{n+1}| < \left|\sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k\right| < |\alpha_{n+1} d_n - d_{n+1}|.$$

Demonstração: De (4.2.8) sabemos que d_k alterna de sinal. Então, se retirarmos todos os termos $d_{n+2}, d_{n+4}, \ldots$ com o mesmo sinal que d_n e incluirmos os maiores múltiplos possíveis para os termos com sinal contrário, obtemos

$$\begin{aligned} |\alpha_{n+1}d_n + \alpha_{n+2}d_{n+1} + \cdots + \alpha_{N+1}d_N| \quad > \quad & |\alpha_{n+1}d_n + (a_{n+2}-1)d_{n+1} \\ & +a_{n+4}d_{n+3} + \cdots|. \end{aligned}$$

Mas, de (4.2.4), podemos escrever cada termo $a_{k+1}d_k$ como uma diferença. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k\right| \quad & > \quad |\alpha_{n+1}d_n - d_{n+1} + (d_{n+2} - d_n) + (d_{n+4} - d_{n+2}) + \cdots| \\ & = \quad |(\alpha_{n+1}-1)d_n - d_{n+1}|, \end{aligned}$$

como esperado. Para encontrar o limitante superior, procedemos de maneira similar e obtemos

$$\left|\sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k\right| < |\alpha_{n+1}d_n + a_{n+3}d_{n+2} + a_{n+5}d_{n+4} + \cdots|,$$

o que conclui o resultado. ■

Teorema 4.5. *Seja x um número irracional e $m > 1$ um inteiro positivo. Considere a representação de Ostrowski de m dada por* (4.2.11)*, com $\alpha_{k+1} = 0$ para $0 \leq k < n \leq N$ e $\alpha_{n+1} > 0$. Então,*

1. se $n \geq 2$, $\quad ||mx|| = \left|\sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k\right|$;

2. se $\{x\} < 1/2$,

a) $||mx|| = \left|\sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k\right|$, *se* $\alpha_1 = 0$ *e* $\alpha_2 > 0$;

b) $||mx|| > |d_1|$, *se* $\alpha_1 > 0$;

3. se $\{x\} > 1/2$, $\alpha_1 = 0$ *para qualquer* m *e*

a) $||mx|| = ||x||$, *se* $\alpha_2 > 1$;

b) $||mx|| > d_2$, *se* $\alpha_2 = 1$.

Demonstração: Para simplificar, denotemos por S a soma $\left|\sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k\right|$.

1. Do Lema 4.1 e de (4.2.9), obtemos

$$S < |\alpha_{n+1} d_n - d_{n+1}| \leq |a_{n+1} d_n - d_{n+1}| = | - d_{n-1}| \leq | - d_1| < \frac{1}{2}.$$

Assim, $||mx|| = S$.
2. a) Para demonstrar este item, vemos que

$$S < |\alpha_2 d_1 - d_2| \leq |a_2 d_1 - d_2| = | - d_0| = x - a_0 < \frac{1}{2}$$

e, novamente, $||mx|| = S$.
2. b) Como $\alpha_1 < a_1$, temos que

$$\begin{aligned} | - d_1| < |(\alpha_1 - 1)d_0 - d_1| < S < |\alpha_1 d_0 - d_1| &\leq |(a_1 - 1)d_0 - d_1| \\ &= | - d_{-1} - d_0| < 1. \end{aligned}$$

Mas, $d_0 = \{x\}$ e, assim, $1 - a_1\{x\} < ||mx|| < 1 - \{x\}$, de onde segue o resultado.
3. a) Como $a_1 = 1$, então $\alpha_1 = 0$ e

$$|d_1| < |d_1 - d_2| < S < |\alpha_2 d_1 - d_2| \leq |a_2 d_1 - d_2| = | - d_0| < 1.$$

Assim, $1 - \{x\} < S < \{x\}$, como esperávamos.
3. b) Novamente, $a_1 = 1$ e, então, $\alpha_1 = 0$. Do Lema 4.1,

$$| - d_2| < S < |d_1 - d_2|.$$

Como $|-d_2| = d_2$ e $|d_1 - d_2| = d_2 - d_1$, o resultado é válido se $1 - (d_2 - d_1) > d_2$, o que equivale a $1 + d_1 > 2d_2$.

Note que $x = [a_0; 1, x_2]$ e $x_2 < 2a_2$. Assim, $x < [a_0; 1, 2a_2]$ e $2a_2 > (2a_2 + 1)(x - a_0)$. Como $d_0 = x - a_0$ e $d_1 = (x - a_0) - 1$, obtemos $1 - 2d_0 > (2a_2 - 1)d_1$ e, então

$$1 + d_1 > 2a_2 d_1 + 2d_0 = 2d_2,$$

que demonstra o resultado. ■

Note que, da demonstração do Teorema 4.5, pode-se concluir que $|mx - A| < 1$, onde $m = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} q_k$ e $A = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} p_k$.

Vamos utilizar esses resultados para encontrar uma aproximação racional $\frac{a}{b}$ para um número real x, com $|bx - a| < \frac{1}{2}$ e cujo denominador b satisfaz $b < q_{N+1}$, onde q_{N+1} é o denominador do convergente c_{N+1}, para algum $N \geq 0$.

Vimos que existe uma única representação de Ostrowski para b, dada por

$$b = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} q_k$$

e o número A, definido como

$$A = A(b) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} p_k,$$

pela demonstração do Teorema 4.5, satisfaz

$$|bx - A| < 1.$$

Assim, o número inteiro a definido por

$$a = a(b) = \begin{cases} A, & \text{se } |bx - A| \leq 1/2, \\ A + 1, & \text{se } bx - A > 1/2, \\ A - 1, & \text{se } bx - A < -1/2, \end{cases}$$

satisfaz $|bx - a| \leq 1/2$. Desta maneira encontramos a aproximação racional $\dfrac{a}{b}$ para um número real x, com $|bx - a| < \frac{1}{2}$ e $b \neq q_k$, para todo $k \geq 0$.

Exemplo 4.5. *Considere a expansão de π em fração contínua simples*

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+} \frac{1}{15+} \frac{1}{1+} \frac{1}{292+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{3+} \frac{1}{1+} \frac{1}{14+} \dots .$$

Encontre a melhor aproximação racional $\dfrac{a}{b}$ para π com $b = 57$.

Os primeiros convergentes são

k	0	1	2	3	4
$\dfrac{p_k}{q_k}$	$\dfrac{3}{1}$	$\dfrac{22}{7}$	$\dfrac{333}{106}$	$\dfrac{355}{113}$	$\dfrac{103993}{33102}$

Como $b = 57$, pelo algoritmo de Ostrowski obtemos

$$b = 8 \cdot q_1 + 1 \cdot q_0 = 8 \cdot 7 + 1 \cdot 1 = 57$$

e, então,

$$A = 8 \cdot p_1 + 1 \cdot p_0 = 8 \cdot 22 + 1 \cdot 3 = 179,$$

que satisfaz $|b\pi - A| < 1/2$ e, assim, $a = 179$. Logo, a melhor aproximação racional $\dfrac{a}{b}$ para π, com $b = 57$, é $\dfrac{179}{57}$.

4.2.1 Modelo para construção de calendário

A construção de um calendário anual cotado em dias, que dependem da rotação da Terra em torno de seu eixo, deve determinar, o mais precisamente possível, as estações, que dependem da revolução da Terra em torno do Sol e é conhecido como *ano tropical*. A duração do ano tropical é de aproximadamente 365.24219878125 dias, ou ainda, aproximadamente 365 dias, 05h, 48m e 46s.

No ano 46 A.C., Júlio César reformou o calendário romano para uniformizar os diferentes calendários usados pelos territórios ocupados pelos romanos. Introduziu o que hoje é conhecido como *calendário juliano*, de doze meses e com anos de 365 dias, no qual, um ano a cada quadro é de 366 dias, chamado ano bissexto. Assim, o ano juliano tinha em média 365.25 dias = $365\frac{1}{4}$ dias. Para acertar o calendário com a primavera, foram adicionados 67 dias àquele ano. Além disso, o primeiro dia do mês de março de 45 A.C. no calendário romano, passou a ser primeiro de janeiro no calendário juliano. Este ano ficou conhecido como ano da confusão.

Como o calendário juliano usou a aproximação $365\frac{1}{4}$ dias para um ano, depois de 16 séculos de uso, havia uma grande diferença entre o calendário juliano e o movimento real da Terra em torno do Sol. Os fenômenos astronômicos como, por exemplo, a ocorrência do equinócio da primavera, estavam ocorrendo 10 dias após a data prevista. No equinócio, a duração da noite é a mesma que a duração do dia, aproximadamente 12h cada.

Em 1582, o Papa Gregório XIII proclamou uma revisão do calendário baseada na aproximação do ano por $365\frac{97}{400}$ dias = 365.2425 dias. O novo calendário é equivalente a considerar 97 anos bissextos a cada 400 anos e foi implementado de modo a omitir anos bissextos a cada século exceto em séculos múltiplos de 400, ou seja, os anos seculares (com final 00) seriam bissextos somente de 4 em 4 séculos. Por exemplo, 1600, 2000, 2400 são bissextos, mas não o são 1700, 1800, 1900, 2100, 2200 e 2300. Este calendário é conhecido como *calendário gregoriano* e é usado até os dias de hoje.

Para que o equinócio da primavera, que estava atrasado em relação ao calendário, voltasse a ocorrer em 21 de março, foi publicado um decreto no qual o dia após 04 de outubro de 1582 deveria ser 15 de outubro de 1582. Esse ano ficou com apenas 354 dias. Países católicos (como Portugal, Espanha, Itália e Polônia) passaram a utilizá-lo imediatamente. Mas, a Inglaterra, por ser protestante, resistiu por quase dois séculos. O Japão o introduziu em 1873, quando se abriu para o Ocidente. China, Bulgária, Rússia, Romênia e Grécia só adotaram o calendário gregoriano no início do século XX.

O ano civil gregoriano ainda é maior que o ano tropical. Mas, a diferença será de mais 1 dia depois de cerca de 3300 anos. No momento, isso ainda não tem importância prática.

No ano de 1956, a Conferência Internacional de Pesos e Medidas definiu o segundo da efeméride como 1/31556925.9747 do tempo que a Terra necessitou para dar uma volta completa ao redor do Sol, começando às 12h00 de 4 de janeiro de 1900.

Usando o valor de 1/31556925.9747 do tempo que a Terra necessitou para dar uma volta completa ao redor do Sol para o segundo da efeméride, e como um dia tem 86400 segundos, concluí-se que o ano tropical tem, aproximadamente,

$$\frac{31556925.9747}{86400} = 365.24219878125 \text{ dias.}$$

Assim, para a construção de um calendário, é necessário obter uma aproximação apropriada para

$$\begin{aligned} c &= 0.24219878125 = \frac{31556925.9747}{86400} - 365 = \frac{7750361}{32000000} \\ &= \frac{1}{4+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Os primeiros convergentes de c são:

k	0	1	2	3	4	5
$\frac{p_k}{q_k}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{29}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{31}{128}$	$\frac{163}{673}$

Podemos, então, observar que o calendário juliano é a implementação do primeiro convergente de c. Mas, não há evidências de que foram utilizadas frações contínuas na construção dos calendários juliano ou gregoriano.

Para construir um calendário baseado em um ciclo b diferente do denominador de um convergente de c, precisamos encontrar a quantidade a de anos bissextos que devemos incluir durante o ciclo de modo que $|bc - a|$ seja o menor possível. Para isso utilizamos o mesmo raciocínio do Exemplo 4.5.

No caso do calendário gregoriano, $b = 400$ torna-se

$$b = 3 \cdot q_4 + 0 \cdot q_3 + 0 \cdot q_2 + 4 \cdot q_1 + 0 \cdot q_0$$

e

$$A = 3 \cdot p_4 + 0 \cdot p_3 + 0 \cdot p_2 + 4 \cdot p_1 + 0 \cdot p_0 = 3 \cdot 31 + 4 \cdot 1 = 97,$$

que satisfaz $|bc - A| < 1/2$ e, assim, $a = 97$ como esperávamos. O erro resultante é

$$c - \frac{97}{400} \simeq -0.00030121875$$

o que significa um ganho de 3 dias a cada dez mil anos. Observemos que o calendário gregoriano é aproximação de c por $\frac{97}{400}$ dias.

Utilizando $b = 300$, encontramos

$$b = 2 \cdot q_4 + 1 \cdot q_3 + 0 \cdot q_2 + 2 \cdot q_1 + 3 \cdot q_0$$

e

$$A = 2 \cdot p_4 + 1 \cdot p_3 + 0 \cdot p_2 + 2 \cdot p_1 + 3 \cdot p_0 = 2 \cdot 31 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 72.$$

Logo, $bc - A \simeq 0.6596 > 1/2$ e, assim, $a = A + 1 = 73$. O erro resultante é

$$c - \frac{73}{300} \simeq -0.00113455,$$

ganho de 1 dia a cada mil anos, obviamente, maior do que com $b = 400$.

Tomando $b = 500$, obtemos

$$b = 3 \cdot q_4 + 3 \cdot q_3 + 0 \cdot q_2 + 4 \cdot q_1 + 1 \cdot q_0,$$

$$A = 3 \cdot p_4 + 3 \cdot p_3 + 0 \cdot p_2 + 4 \cdot p_1 + 1 \cdot p_0 = 3 \cdot 31 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 121$$

e $|bc - A| < 1/2$. Logo, $a = 121$. O erro resultante é

$$c - \frac{121}{500} \simeq 0.000198781,$$

que equivale a uma perda de 2 dias em 10 mil anos. O erro é melhor do que com $b = 400$, mas um calendário com 121 anos bissextos a cada 500 anos é mais complicado de ser modelado do que o atual calendário com 97 anos bissextos a cada 400 anos.

Exercícios

1. Mostre que
$$\sqrt{x} = 1 + 2\left(\frac{v}{1+}\frac{v}{1+}\frac{v}{1+}\dots\right),$$
onde $v = \frac{1}{4}(x-1)$.

2. Para a fração contínua dada acima, mostre que o convergente
$$C_n = \frac{vp_n}{p_{n+1}}.$$

3. Se
$$f_n(x) = \frac{2}{1+}\frac{4}{2+}\frac{6}{3+}\dots\ +\frac{2n}{n+x},$$
como podemos obter $f_{n+1}(x)$ a partir de $f_n(x)$?

4. Suponha que a fração contínua
$$\frac{1}{2x+}\frac{1}{2x+}\frac{1}{2x+}\frac{1}{2x+}\dots$$
convirja. Obtenha uma expressão para ela em termos de x.

5. Seja $R(x) = \dfrac{12x^4+12x^3+5x^2+12}{4x^4-2x^3+3x^2+12}$. Obtenha a fração contínua simples para esta função racional.

6. Usando a série de Taylor da função $cos(x)$, obtenha a correspondente fração contínua.

7. Construa aproximações racionais para o valor $365,24219878125$ com denominador igual a 800. Como se define um calendário neste caso?

8. Construa a melhor aproximação para π com denominador igual a 201.

Bibliografia

[1] M. Abramowitz, I.A.Stegun, "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables", National Bureau of Standards, Dover Publ., New York, 1964.

[2] R.P. Agawal, G.V. Milovanović, Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, **128** (2002), 151–166.

[3] E.X.L. Andrade, "Sobre Polinômios Similares aos Ortogonais Associados a uma Classe Especial de Distribuições", Tese de doutorado, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, 1995.

[4] E.X.L. Andrade, J.H. McCabe, Some consequences of symmetry in the coefficients of two series when constructing continued fractions that correspond to the two series, *Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions*, **10** (2002), 5–12.

[5] E.X.L. Andrade, J.H. McCabe, A. Sri Ranga, The Q-D algorithm for transforming series expansions into corresponding continued fraction: An extension to cope with zero coefficients, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **156** (2003), 487–497.

[6] A.C. Berti, C.F. Bracciali, A. Sri Ranga, Orthogonal polynomials associated with related measures and Sobolev orthogonal polynomials, *Numerical Algorithms*, **34** (2003), 203–216.

[7] C.F. Bracciali, "Some Consequences of Symmetry in Strong Stieltjes Distributions", Tese de doutorado, University of St Andrews, St Andrews, Escócia, 1998.

[8] C.F. Bracciali, J.H. McCabe, , Some extensions of M-fractions related to strong Stieltjes distributions, *Acta Applicandae Mathematicae*, **61** (2000), 65–80.

[9] C.F. Bracciali, X. Li, A. Sri Ranga, Real orthogonal polynomials in frequency analysis, *Mathematics of Computation*, **74** (2005), 341-362.

[10] C. Brezinski, " History of Continued Fractions and Padé Approximants", Springer Series in Computational Mathematics, vol. 12, Spring-Verlag, New York, 1991.

[11] T.S. Chihara, "An Introduction to Orthogonal Polynomials", Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.

[12] P.J. Davis, P. Rabinowitz, "Methods of Numerical Integrations", Academic Press, New York, 1975.

[13] W. Gautschi, A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae, em "E.B. Christoffel - The influence of his work in mathematics and physical science", (Butzer, P.L., Fehér, F., eds.), pp. 72–147, Birkhäuser Verlag, Basel, 1981.

[14] W. Gautschi, On generating orthogonal polynomials, *SIAM Journal of Sci. Stat. Comput.*, **3** (1982), 289–317.

[15] W. Gautschi, Orthogonal polynomials - constructive theory and applications, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **12** e **13** (1985), 61–76.

[16] G.H. Hardy, E.M. Wright, "An Introduction to the Theory of Numbers", 5th Edition, Oxford Science Publications, Claredon Press, Oxford, 1979.

[17] W.B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron, Orthogonal Laurent polynomials and a strong Hamburger moment problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **98** (1984), 528–554.

[18] W.B. Jones, W.J. Thron, "Continued Fractions: Analytic Theory and Applications", Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 11, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980.

[19] A.Y. Khinchin, "Continued Fractions", Dover Publ., New York, 1964.

[20] A.N. Khovanskii, "The Application of Continued Fractions and their Generalizations to Problems in Approximation Theory", Noordhoff, Groningen, 1963.

[21] D.R.Kincaid, E.W. Cheney, "Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing", Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1991.

[22] V.I. Krylov, "Approximate Calculation of Integrals", Macmillan, New York, 1962.

[23] L. Lorentzen, H. Waadeland, "Continued Fractions with Applications", Studies in Computational Mathematics, vol. 3, North Holland, Amsterdam, 1992.

[24] C.D. Olds, "Continued Fractions", New Mathematical Library Series, Random House and The L.W. Springer Company, New York, 1963.

[25] O. Perron, "Die Lehre von Kettenbrüchen Leipzig", Chelsea, Teubner/New York, 1929.

[26] G.M. Phillips, "Two Millennia of Mathematics: from Archimedes to Gauss", CMS Books in Mathematics Series, Springer, New York, 2000.

[27] A.M. Rockett, P. Szüsz, "Continued Fractions", World Scientific Publ. Co., Singapore, 1992.

[28] J.P.O. Santos, "Introdução à Teoria dos Números", Coleção Matemática Universitária, 2ª ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[29] D.E. Smith, "History of Mathematics", vols. I e II, Dover Publ., New York, 1958.

[30] A. Sri Ranga, *Polinômios Ortogonais e Similares*, Tese de livre-docência, ICMC, USP, São Carlos, SP, 1990.

[31] A. Sri Ranga, Another quadrature rule of highest degree of precision, *Numerishe Mathematik*, **68** (1994), 283–294.

[32] A. Sri Ranga, Symmetric orthogonal polynomials and the associated orthogonal L-polynomials, *Proceedings of American Mathematics. Society*, **123** (1995), 3135–3141.

[33] A. Sri Ranga, E.X.L. Andrade, Zeros of polynomials which satisfy a certain three term recurrence relation, *Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions*, **1** (1992), 61–65.

[34] A. Sri Ranga, E.X.L. Andrade, Avaliação numérica de uma classe de integrais, *Revista de Matemática e Estatística*, UNESP, **11** (1993), 165–172.

[35] A. Sri Ranga, E.X.L. Andrade, J.H. McCabe, Some consequences of a symmetry in strong distributions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **193** (1995), 158–168.

[36] A.H. Stroud, D. Secrest, "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.

[37] G. Szegő, "Orthogonal Polynomials", American Math. Society, Colloq. Publ., New York, 23, 1939.

[38] H.S. Wall, "Analytic Theory of Continued Fractions", The University Series in Higher Mathematics, vol. 1, Van Nostrand, New York, 1948.

Índice