

**Editado por**

**Eliana X.L. de Andrade**

Universidade Estadual Paulista - UNESP

São José do Rio Preto, SP, Brasil

**Rubens Sampaio**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro -

Rio de Janeiro, RJ, Brasil

**Geraldo N. Silva**

Universidade Estadual Paulista - UNESP

São José do Rio Preto, SP, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7)**, as figuras em **eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página  
<http://www.sbmac.org.br/notas.php>



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2012

# PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR EM DOIS NÍVEIS - APLICAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Ana Friedlander  
friedlan@ime.unicamp.br

Departamento de Matemática Aplicada  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Universidade Estadual de Campinas

Suzana L. C. Castro  
suzana.castro@metrocamp.com.br

Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas  
Faculdades Integradas Metropolitanas de Campinas

Eduardo A. Fancello  
fancello@grante.ufsc.br

GRANTE - Grupo de Análise e Projeto Mecânico x  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Santa Catarina



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil  
2012

Coordenação Editorial: Sandra Augusta Santos

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 by A. Friedlander, S. L. C. Castro e E. A. Fancello. Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP**  
**Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

Friedlander, Ana

Programação não linear em dois níveis: aplicação em engenharia mecânica  
- São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 71 p.; 20,5cm  
- (Notas em Matemática Aplicada; v. 30)

e-ISBN 978-85-86883-93-4

1. Programação não linear. 2. Dois níveis. 3. Otimização paramétrica.  
I. Friedlander, Ana. II. Castro, Suzana Lima de Campos.  
III. Fancello, Eduardo A. IV. Título. V. Série

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2007 nesta mesma série pela SBMAC.

# Agradecimentos

Ao CNPq, Fapesp e Faperj pelo auxílio concedido durante a realização deste trabalho através dos projetos Pronex-Optimização (PRONEX-CNPq-Faperj E-26 / 171.164/2003-AQ1 , E-26/171.510/2006) e processos FAPESP 01-04597-4, 05-56773-1, 06/53768-0.



# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>9</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>11</b>
1.1 Definição do problema . . . . .	11
1.2 Exemplos de problemas em dois níveis . . . . .	12
1.3 Exercício . . . . .	16
<b>2 Otimização paramétrica</b>	<b>17</b>
2.1 Idéias básicas e exemplos . . . . .	17
2.2 Condições de otimalidade . . . . .	19
<b>3 Algoritmo de restauração inexata</b>	<b>21</b>
3.1 Introdução . . . . .	21
3.2 O Algoritmo . . . . .	21
3.3 Resultados de convergência . . . . .	25
<b>4 Restauração inexata para problemas em dois níveis</b>	<b>27</b>
4.1 Introdução . . . . .	27
4.2 O Algoritmo . . . . .	27
4.2.1 Fase da restauração . . . . .	31
4.2.2 Estimadores dos multiplicadores de Lagrange . . . . .	31
4.2.3 Fase da minimização . . . . .	32
4.3 Resultados de convergência . . . . .	32
4.4 Considerações . . . . .	34
4.5 Exercícios . . . . .	35
<b>5 Aplicações em Engenharia Mecânica</b>	<b>37</b>
5.1 Introdução . . . . .	37
5.2 O problema de contato . . . . .	38
5.3 Discretização do problema de contato através do método dos Elementos Finitos . . . . .	40
5.4 Otimização de Forma em problemas de contato sem fricção . . . . .	42
5.4.1 Exemplos . . . . .	43
5.5 Otimização Topológica em problemas de contato . . . . .	55

5.5.1 Um sistema de treliças . . . . . 56

**Bibliografia** . . . . . **65**



# Prefácio

A programação matemática em dois níveis é um problema bastante difícil, tanto do ponto de vista teórico como prático. Situações que envolvem relações hierárquicas entre dois níveis de decisão são frequentes em planejamento econômico, desenho de estruturas em engenharia mecânica, problemas de transportes e podem ser muitas vezes modeladas através de programação matemática em dois níveis. O objetivo deste curso é introduzir o problema, discutir as suas dificuldades, analisar uma estratégia de resolução proposta pelos autores e sua aplicação a problemas de otimização do desenho de estruturas mecânicas.

Campinas, 05 de maio de 2007.

Ana Friedlander  
Suzana Lima de Campos Castro  
Eduardo Alberto Fancello



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Definição do problema

O problema de otimização que estudaremos é:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F(x, y) \\ & \text{s.a.} \left\{ \begin{array}{l} x \in X, \text{ onde} \\ y \text{ é solução de} \\ \text{Minimizar} & f(x, y) \\ & \text{s.a.} \left\{ \begin{array}{l} y \in Y \\ h(x, y) = 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \quad (1.1.1)$$

$X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$  são conjuntos convexos e fechados,  $F$ ,  $f$  são funções de  $\mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^p$ . O problema de otimização parametrizado por  $x$  que define as restrições em  $y$  é denominado problema do segundo nível (PSN). Na definição da região viável do problema (1.1.1) reside a principal diferença com os problemas clássicos de otimização. Em geral, não é possível expressar esta região através de um conjunto finito de equações e/ou inequações.

Definimos para cada  $x \in X$ ,  $D(x) \equiv \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \geq 0 \text{ e } h(x, y) = 0\}$ , portanto  $D(x)$  é a região viável do problema do segundo nível parametrizado por  $x$ . O conjunto de soluções globais do problema do segundo nível parametrizado por  $x$ , denotado por  $M(x)$ , verifica

$$M(x) = \{y \in D(x) \mid f(x, y) \leq f(x, z) \forall z \in D(x)\},$$

e a região de viabilidade do problema (1.1.1), chamada região induzida (RI) é

$$RI \equiv \{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y \in M(x)\}.$$

O problema que segue é chamado problema de primeiro nível

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F(x, y) \\ & \text{s.a. } (x, y) \in RI \end{array}$$

Escrito desta forma o problema (1.1.1) aparenta ser um problema padrão de otimização. A diferença reside em que geralmente, RI não admite a representação através de um conjunto de equações e/ou inequações para a qual os algoritmos de programação não linear estão desenhados. Na próxima seção ilustramos este fato.

## 1.2 Exemplos de problemas em dois níveis

Consideremos o seguinte problema descrito em Vicente [41]:

**Exemplo 1.1.**

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & x - 2y \\ & \text{s.a. } \left\{ \begin{array}{l} -x + 3y - 4 \leq 0 \\ y = \underset{y}{\operatorname{argmin}} x + y \\ \text{s.a. } \left\{ \begin{array}{l} x - y \leq 0 \\ -x - y \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \quad (1.2.2)$$

Para (1.2.2), o conjunto viável e o conjunto de soluções do segundo nível são

$$D(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq |x|\},$$

$$M(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = |x|\},$$

e a região induzida de (1.2.2) é

$$\begin{aligned} RI &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + 3y - 4 \leq 0, y \in M(x)\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x, -1 \leq x \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x, 0 \leq x \leq 2\} \end{aligned}$$

Na figura 1.2 está a região viável do segundo nível e na Figura 1.2 estão representadas as restrições, o conjunto viável e a região induzida do problema (1.2.2).

Podemos observar que o problema (1.2.2) possui um minimizador local em (2, 2) e um minimizador global em (-1, 1).

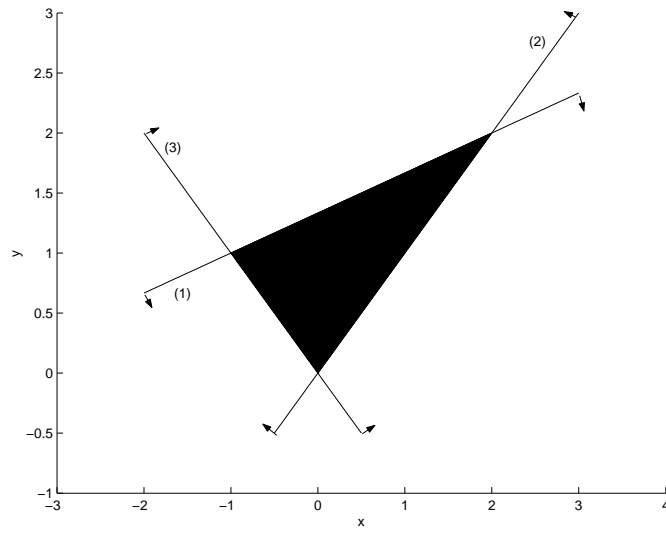


Figura 1.1: Região viável do problema do segundo nível em (1.2.2)

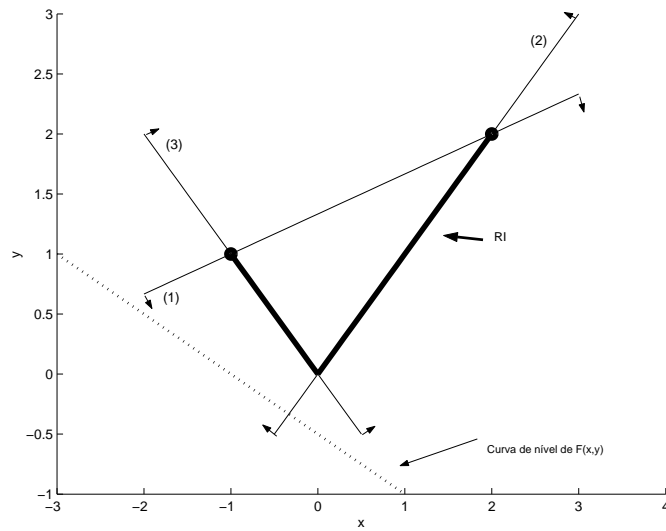


Figura 1.2: Geometria do problema (1.2.2)

Tanto no primeiro como no segundo nível só temos funções lineares e a região induzida não é convexa.

O seguinte problema é descrito em Shimizu et al. [36]:

**Exemplo 1.2.**

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar}_{x,y} \quad (x-5)^2 + (2y+1)^2 \\ \text{s.a} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y = \underset{y}{\operatorname{argmin}} \quad (y-1)^2 - 1.5xy \\ \text{s.a} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \geq 0 \\ -3x + y \leq -3 \\ x + y \leq 7 \\ x - 0.5y \leq 4 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \quad (1.2.3)$$

Para (1.2.3), o conjunto viável é o conjunto de soluções do segundo nível são:

$$M(x) = \begin{cases} y = 3x - 3, & \text{se } 1 \leq x \leq \frac{16}{9} \\ y = 1 + \frac{3}{4}x, & \text{se } \frac{16}{9} \leq x \leq \frac{24}{7} \\ y = 7 - x, & \text{se } \frac{24}{7} \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} 0 \leq y \leq 3x - 3, & \text{se } 1 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 0 \leq y \leq 7 - x, & \text{se } \frac{5}{2} \leq x \leq 4 \\ 2x - 8 \leq y \leq 7 - x, & \text{se } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Neste caso, a região induzida de (1.2.3) é:

$$\begin{aligned} RI &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in M(x)\} = \\ & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x - 3, 1 \leq x \leq \frac{16}{9}\} \cup \\ & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 + \frac{3}{4}x, \frac{16}{9} \leq x \leq \frac{24}{7}\} \cup \\ & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 7 - x, \frac{24}{7} \leq x \leq 5\} \end{aligned}$$

Na Figura 1.2 estão representadas as restrições, o conjunto viável e a região induzida do problema (1.2.3).

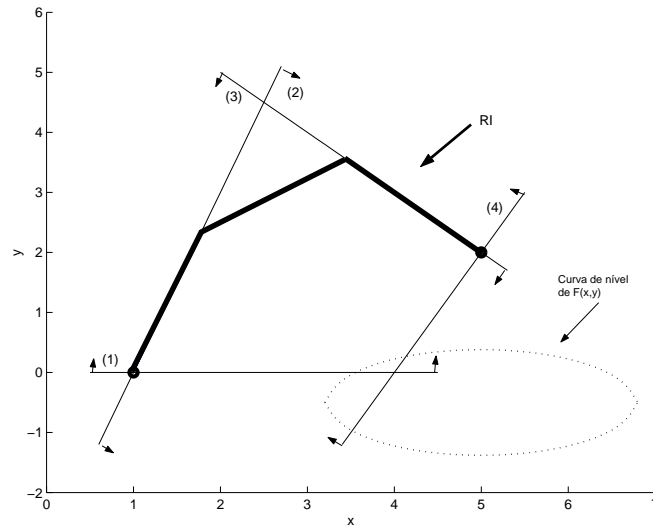


Figura 1.3: Geometria do problema (1.2.3)

O problema (1.2.3) possui um minimizador local em  $(5, 2)$  e um minimizador global em  $(1, 0)$ .

De novo notamos que a região induzida não é convexa.

O seguinte problema de três variáveis está no livro de Bard [3]:

**Exemplo 1.3.**

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar}_{x,y} && \frac{1}{2}(x - \frac{4}{5})^2 + \frac{1}{2}(x_2 - \frac{1}{5})^2 + \frac{1}{2}(y - 1)^2 \\
 & \text{s.a} && \begin{cases} 0 \leq x_1, x_2 \leq 1 \\ y = \underset{y}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}y^2 + y - x_1y + 2x_2y \\ \text{s.a} \quad 0 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (1.2.4)
 \end{aligned}$$

A região induzida para este problema é a união dos seguintes conjuntos:

$$\{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq 1, x_2 \geq 0, -x_1 + 2x_2 \leq 0, y = 1\},$$

$$\{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + 2x_2 + y = 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$\{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \leq 1, -x_1 + 2x_2 \geq 1, y = 0\}.$$

O minimizador global é  $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 1)$ .

Analisemos agora o seguinte problema descrito em Dempe [18]:

**Exemplo 1.4.**

$$\begin{array}{l}
\text{Minimizar}_{x,y} \quad -y_2 - 10x_1 - 10x_2 \\
\text{s.a} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_1, x_2 \leq 1 \\ y = \operatorname{argmin}_y \quad -y_1x_1 - y_2x_2 \\ \text{s.a} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \geq 0 \\ y_1 + y_2 \leq 3 \\ -y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 - y_2 \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.2.5)
\end{array}$$

A região induzida é a união dos seguintes conjuntos

$$\{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leq x_2 < x_1 \leq 1, y_1 = 2, y_2 = 1\},$$

$$\{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leq x_1 < x_2 \leq 1, y_1 = 1, y_2 = 2\},$$

$$\{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid (y_1, y_2) = \lambda(2, 1) + (1-\lambda)(1, 2), 0 \leq \lambda \leq 1, 0 < x_1 = x_2 \leq 1\},$$

$$\{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid (y_1, y_2) \in M(0, 0), x_1 = 0, x_2 = 0\}.$$

$M(0, 0)$  coincide neste caso com a região viável do problema do nível inferior.

Os exemplos ilustram bem as dificuldades que aparecem quando as restrições de um problema de otimização consistem em outro problema de otimização. A região de viabilidade do problema do primeiro nível não pode em geral ser descrita pela intersecção de um conjunto finito de equações ou inequações. Nos exemplos podemos ver que  $RI$  é uma união de conjuntos representáveis daquela forma. Por exemplo, se  $F, f, h$  são funções lineares e  $X$  é poliedral, a região  $RI$  é em geral linear por partes. Resolver esse problema equivale a resolver vários problemas de programação linear e quase sempre haverá vários minimizadores locais.

**1.3 Exercício**

1. Analise o problema:

$$\begin{array}{l}
\text{Minimizar}_{x,y} \quad x - 2y \\
\text{s.a} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq -3 \\ y = \operatorname{argmin}_y \quad x + y \\ \text{s.a} \quad \left\{ \begin{array}{l} x - y \leq 0 \\ -x - y \leq 0 \\ y \leq 2 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.3.6)
\end{array}$$



## Capítulo 2

# Otimização paramétrica

### 2.1 Idéias básicas e exemplos

O problema de otimização do segundo nível (PSN) está parametrizado pela variável  $x$  do primeiro nível. É importante analisar como variam as soluções de PSN quando  $x$  varia. Vamos analisar o caso em que para cada  $x \in X$  exista um único minimizador global  $y^*$  de PSN, ou seja, podemos escrever  $y^* = y(x)$ .

#### Exemplo 2.1.

Dado  $x \in R$ ,

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{y \in R} f(x, y) &= (y_1 - x)^2 + (y_2 + 1)^2 \\ \text{s. a} \quad y_2 &\geq y_1. \\ y_2 &\geq -y_1. \end{aligned}$$

A solução analítica deste problema é

$$y(x) = \begin{cases} ((1+x)/2, -(1+x)/2), & \text{se } x < -1 \\ (0, 0), & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ ((x-1)/2, (x-1)/2), & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

A função  $y(x)$  é linear por partes, contínua e diferenciável salvo em  $x = \pm 1$ . Para estes valores de  $x$ , a solução de PSN não é regular, os gradientes das restrições ativas na solução são linearmente dependentes.

#### Exemplo 2.2.

Dados  $x \geq 0$  e  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_y f(x, y) &= \frac{1}{2}y^2 - xy \\ \text{s. a} \quad y &\geq a. \end{aligned}$$

A solução analítica deste problema é

$$y(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < a \\ a & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

Esta função é contínua, linear por partes e diferenciável para todo  $x \neq a$ . Quando  $y(x) = a$ , a única restrição do problema está ativa e a solução é regular para todo  $x \geq 0$ . As condições de otimalidade do problema são

$$\begin{aligned} y - x - \lambda &= 0 \\ y &\geq a \\ \lambda &\geq 0 \\ (y - a)\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Para  $x = a$  temos que  $y = a$  e  $\lambda = 0$ . Ou seja, não se verifica a complementaridade estrita.

### Exemplo 2.3.

$$\underset{y}{\text{Minimizar}} f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^2 + y_-^4$$

onde

$$\begin{aligned} y_- &= 0 & \text{se } y \geq 0 \\ y_- &= -y & \text{se } y \leq 0. \end{aligned}$$

O mínimo global de  $f(x, y)$  é 0. Este valor é assumido se  $x^2 - y^2 = 0$  e  $y_-^4 = 0$ , ou seja, se  $y_- = 0$  e  $y \geq 0$ . Portanto, a solução do problema parametrizado por  $x$  é dada por  $y(x) = |x|$ , que é não diferenciável no ponto  $(0, 0)$ . Neste caso como não há restrições, nem a regularidade nem a complementaridade estrita falham. A não diferenciabilidade ocorre porque a derivada de segunda ordem em relação a  $y$  da função objetivo é nula.

Estes exemplos mostram que a função  $y(x)$  em geral não é diferenciável.

A regularidade de  $y(x)$  para qualquer  $x \in X$  implica a existência e unicidade de vetores  $\mu(x) \in \mathbb{R}^p$  e  $\gamma(x) \in \mathbb{R}^m$  tais que

$$\begin{aligned} \nabla_y f(x, y(x)) + \sum_{j=1}^p \nabla_y h_j(x, y) \mu_j(x) - \gamma(x) &= 0 \\ h(x, y(x)) &= 0 \\ \gamma(x)^T y(x) &= 0 \\ y(x) &\geq 0 \\ \gamma(x) &\geq 0. \end{aligned}$$

A condição suficiente de segunda ordem se verifica em  $y(x)$  se

$$\begin{aligned} z^T \nabla_y^2 L(x, y(x), \mu(x), \gamma(x)) z &\geq 0 \text{ para todo } z \neq 0 \text{ tal que} \\ \nabla_y h(x, y(x))^T z &= 0 \\ z_i &\geq 0 \text{ se } y_i(x) = 0 \\ z_i &= 0 \text{ se } \gamma_i(x) > 0. \end{aligned}$$

A complementaridade estrita se verifica se

$$y_i(x) = 0 \implies \gamma_i(x) > 0.$$

Definimos para cada  $x \in X$  o Lagrangiano do problema do segundo nível associado como

$$L(x, y(x), \mu(x), \gamma(x)) = f(x, y(x)) + \sum_{j=1}^p \mu_j(x) h_j(x, y(x)) - \sum_{i=1}^m \gamma_i(x) y_i(x)$$

A seguir enunciamos o teorema básico de sensibilidade de Fiacco cuja demonstração está em [23].

**Teorema 2.1.** *Seja  $(x, y(x))$  um par tal que  $y(x)$  é uma solução de  $PSN(x)$ . Se as funções que definem  $PSN(x)$  são duas vezes continuamente diferenciáveis em  $y$  em uma vizinhança de  $(x, y(x))$ , os vetores  $\nabla h_j(x, y(x))$  para todos os índices  $j$ , e os vetores  $e_i$  (1 na  $i$ -ésima componente, 0 nas outras) para  $i$  tal que  $y_i(x) = 0$ , são linearmente independentes (regularidade), as condições suficientes de segunda ordem para ter um minimizador local se verificam em  $y(x)$  com os multiplicadores de Lagrange associados  $\gamma(x)$  e  $\mu(x)$  e  $\gamma_i(x) > 0$  se  $y_i(x) = 0$  (complementaridade estrita), então*

1.  $y(x)$  é um minimizador local isolado do problema  $PSN(x)$  e os multiplicadores de Lagrange associados  $\gamma(x)$  e  $\mu(x)$  são únicos,
2. existe uma vizinhança  $V$  de  $x$  onde é possível definir uma única função continuamente diferenciável  $w(s) = (y(s), \mu(s), \gamma(s))$ , tal que  $y(s)$  satisfaz a condição suficiente de segunda ordem para um minimizador local isolado do problema  $PSN(s)$  com multiplicadores associados  $\gamma(s)$  e  $\mu(s)$ , e que verifica  $w(x) = (y(x), \mu(x), \gamma(x))$ ,
3. O conjunto de restrições ativas em  $y(s)$  é o mesmo para todo  $s \in V$ , portanto  $y(s)$  é regular para todo  $s \in V$ . Mais ainda,  $\gamma(s) + y(s) > 0$  para todo  $s \in V$ .

## 2.2 Condições de otimalidade

Os exemplos dados na seção anterior mostram que sem as hipóteses do teorema não é possível assegurar a diferenciabilidade de  $y(x)$ . Estas hipóteses restringem o conjunto de funções para as quais é fácil obter condições de otimalidade do problema de otimização em dois níveis. No caso em que a função  $y(x)$  é diferenciável podemos reduzir o problema ao seguinte problema de um nível:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{Minimizar}} F(x, y(x)) \\ & \text{s. a } x \in X \end{aligned}$$

Se  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_i \leq x_i \leq u_i \forall i\}$  as condições de otimalidade deste problema são

$$F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x))y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } l_i < x_i < u_i \\ \geq 0 & \text{se } x_i = l_i \\ \leq 0 & \text{se } x_i = u_i \end{cases}$$

Portanto, para testar a otimalidade precisamos conhecer  $y(x)$  e  $y'(x)$ . Para obter  $y(x)$  é preciso resolver o problema do segundo nível PSN( $x$ ). Para obter  $y'(x)$ , precisamos calcular os multiplicadores  $\gamma(x)$  e  $\mu(x)$  e resolver o sistema não linear

$$T(x)s(x) = N(x)$$

onde

$$T(x) = \begin{bmatrix} \nabla L_{yy}^2 & (h_1)'_y & \cdots & (h_p)'_y & I_m \\ (h_1)'_y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ (h_p)'_y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \text{diag}(\gamma) & 0 & \cdots & 0 & \text{diag}(y) \end{bmatrix},$$

$$s(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ \mu'(x) \\ \gamma'(x) \end{pmatrix}$$

e

$$N(x) = \begin{pmatrix} \nabla L_{xy}^2 \\ -(h_1)'_x \\ \vdots \\ -(h_p)'_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Todas as funções na matriz e nos vetores estão avaliadas em  $x$  ou  $(x, y(x))$ . Idéias de algoritmos baseados neste resultado se encontram em [23]. Quando a função  $y(x)$  não é diferenciável, encontrar condições de otimalidade é complicado. A maioria dos resultados publicados relaxam a complementaridade estrita e a regularidade, mas impõem condições mais fortes de segunda ordem. Em lugar da regularidade se pede que as soluções do segundo nível verifiquem alguma qualificação das restrições, mais fraca que a regularidade, que assegure que essas soluções satisfaçam as condições de Karush- Kuhn- Tucker (KKT). Verificar as condições de otimalidade do problema de dois níveis envolve o cálculo de derivadas direccionais ou gradientes generalizados e outros conceitos relacionados com otimização não diferenciável. O leitor interessado pode encontrar material sobre o caso não diferenciável nos livros [3, 18, 36].

## Capítulo 3

# Algoritmo de restauração inexata

### 3.1 Introdução

O Algoritmo de Restauração Inexata foi proposto por Martínez em [29]. É um método de programação não linear que trata a viabilidade e a otimalidade em fases distintas, a cada iteração. O termo restauração é devido à importância da fase de melhoria da viabilidade.

A melhoria na viabilidade e na otimalidade é controlada por funções de mérito e assumindo hipóteses adequadas, é possível garantir a convergência global do Algoritmo de Restauração Inexata.

Uma das vantagens desta técnica, é a liberdade na escolha dos métodos de realização das fases, permitindo que as características e as propriedades de cada problema sejam exploradas. Além disso, durante o processo, os subproblemas podem ser resolvidos inexatamente.

### 3.2 O Algoritmo

Na descrição do algoritmo será considerado o seguinte problema de programação não linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{s.a} & \begin{cases} x \in \Omega \\ C(x) = 0 \end{cases} \end{array} \quad (3.2.1)$$

onde  $\Omega$  é convexo e fechado,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são tais que  $\nabla f(x)$  e  $C'(x)$  existem e são contínuas.

Usaremos as notações  $|v|$ ,  $\|v\|$ ,  $\|v\|_\infty$  para uma norma arbitrária, a norma euclidiana e a norma supremo de um vetor  $v$ , respectivamente.

A medida da viabilidade de um ponto  $x \in \Omega$ , é dada pelo valor de  $|C(x)|$ . Como medida de otimalidade, utiliza-se a norma do gradiente projetado no espaço tangente às restrições,  $\|d_{tan}^k(x)\|$ .

Cada iteração do algoritmo consiste em calcular uma nova aproximação  $x^{k+1}$ , a partir de  $x^k$ , através de duas fases principais. Na primeira, que é a Fase da Restauração, o objetivo é calcular um ponto  $y^k \in \Omega$  mais viável que  $x^k$ .

Na segunda fase, a da Otimização, busca-se, a partir de  $y^k$ , um ponto  $z^k$  que melhore o valor da função Lagrangeana no espaço formado pela intersecção do espaço tangente às restrições com uma região de confiança.

Usamos a função de mérito:

$$\theta L(x, \lambda) + (1 - \theta)|C(x, \lambda)|$$

que combina valores relacionados à viabilidade e à otimalidade, para decidir se o ponto  $z^k$  é aceito ou rejeitado como a nova aproximação  $x^{k+1}$ .

Dados  $x^0 \in \Omega$ , uma aproximação inicial para a solução do problema e os parâmetros  $\eta > 0$ ,  $r \in (0, 1)$ ,  $\beta > 0$ ,  $M > 0$ ,  $\theta_{-1} \in (0, 1)$ ,  $\delta_{min} > 0$ ,  $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$  e  $w_k$  tal que  $\sum_{k=0}^{\infty} w_k < \infty$ , os passos para obter  $x^{k+1}$  a partir de  $x^k$  estão descritos a seguir:

---

**Algoritmo 3.2: Restauração Inexata**

---



---

*Passo 1.*

---

Definir

$$\theta_k^{min} = \min\{1, \theta_{k-1}, \dots, \theta_{-1}\},$$

$$\theta_k^{large} = \min\{1, \theta_k^{min} + w_k\},$$

$$\theta_{k,-1} = \theta_k^{large}$$

---

*Passo 2: Fase da Restauração.*

---

Calcular  $y^k \in \Omega$  tal que

$$|C(y^k)| \leq r|C(x^k)| \tag{3.2.2}$$

e

$$\|y^k - x^k\| \leq \beta|C(x^k)| \tag{3.2.3}$$

---

*Passo 3: Cálculo da direção tangente de Cauchy.*

---

Calcular

$$d_{tan}^k = P_k [y^k - \eta \nabla L(y^k, \lambda^k)] - y^k,$$

onde  $P_k(z)$  é a projeção ortogonal de  $z$  em  $\Pi_k$  e

$$\Pi_k = \{z \in \Omega | C'(y^k)(z - y^k) = 0\}$$

é uma aproximação linear do conjunto viável que passa por  $y^k$  (denominado Espaço Tangente Aproximado).

Se  $y^k = x^k$  (ou seja  $C(x^k) = C(y^k)$ ) e  $d_{tan}^k = 0$ , terminar a execução do algoritmo e retornar  $x^k$  como a solução.

Senão, fazer  $i = 0$ , escolher  $\delta_{k,0} \geq \delta_{min}$  e continuar.

---

*Passo 4:* Fase da Minimização no Espaço Tangente Aproximado.

---

Se  $d_{tan}^k = 0$ , definir  $z^{k,0} = y^k$ . Senão, calcular  $z^{k,i} \in \Pi_k$  tal que

$$L(z^{k,i}, \lambda^k) \ll L(y^k, \lambda^k) \quad (3.2.4)$$

e

$$\|z^{k,i} - y^k\| \leq \delta_{k,i} \quad (3.2.5)$$

onde  $L(x, \lambda) = f(x) + C(x)^T \lambda$  é a função Lagrangeana e  $\delta_{k,i}$  é o raio da região de confiança.

---

*Passo 5:* Atualização dos multiplicadores.

---

Se  $d_{tan}^k = 0$  definir,  $\lambda^{k+1} = \lambda^k$ .

Senão, calcular  $\lambda_{atual}^{k,i} \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\|\lambda_{atual}^{k,i}\| \leq M$ .

---

*Passo 6:* Cálculo da redução Prevista.

---

Definir, para todo  $\theta \in [0, 1]$ ,

$$Pred_{k,i}(\theta) = \theta \left[ L(x^k, \lambda^k) - L(z^{k,i}, \lambda^k) - \langle C(y^k), \lambda_{atual}^{k,i} - \lambda^k \rangle \right] + (1 - \theta) [|C(x^k)| - |C(y^k)|] \quad (3.2.6)$$

Calcular  $\theta_{k,i}$ , o máximo dos elementos  $\theta \in [0, \theta_{k,i-1}]$  que verifica

$$Pred_{k,i}(\theta) \geq 1/2 [|C(x^k)| - |C(y^k)|]$$

Definir

$$Pred_{k,i} = Pred_{k,i}(\theta_{k,i})$$

---

*Passo 7:* Comparação da redução real e da prevista.

---

Calcular

$$Ared_{k,i} = \theta_{k,i} \left[ L(x^k, \lambda^k) - L(z^{k,i}, \lambda_{atual}^{k,i}) \right] + (1 - \theta_{k,i}) [|C(x^k)| - |C(z^{k,i})|] \quad (3.2.7)$$

Se  $Ared_{k,i} \geq 0.1Pred_{k,i}$  definir

$$x^{k+1} = z^{k,i},$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda_{atual}^{k,i},$$

$$\theta_k = \theta_{k,i},$$

$\delta_k = \delta_{k,i}$ ,  $Ared_k = Ared_{k,i}$ ,  $Pred_k = Pred_{k,i}$  e terminar a iteração  $k$ .

Senão, escolher  $\delta_{k,i+1} \in [0.1\delta_{k,i}, 0.9\delta_{k,i}]$ , fazer  $i = i + 1$  e voltar para o Passo 4.

---

Fim

A condição (3.2.2) garante que a redução da viabilidade no ponto restaurado  $y^k$  seja proporcional à inviabilidade de  $x^k$ . Na prática, esta condição permite terminar o Passo 2 em um ponto inviável, diminuindo muito o esforço computacional nas iterações iniciais.

A condição (3.2.3) exige que o ponto restaurado  $y^k$  seja suficientemente próximo de  $x^k$ , impondo que ele pertença a uma bola centrada em  $x^k$  e cujo raio depende do grau de inviabilidade de  $x^k$ . Na prática, esta condição força a aceitação de um ponto que é viável e evita que durante o processo, o algoritmo retorne a um ponto já explorado e cicle.

As condições (3.2.4)-(3.2.5) do Algoritmo 3.2 no passo de minimização, garantem o decréscimo da função Lagrangeana, no espaço formado pela intersecção da linearização das restrições com uma região de confiança centrada no ponto restaurado  $y^k$ . O decréscimo, denotado pelo símbolo  $\ll$ , está relacionado ao decréscimo obtido pelo ponto de Cauchy. Ver [31, 29].

As funções Ared em (3.2.7) e Pred em (3.2.6), redução real e redução prevista respectivamente, servem para decidir a aceitação do ponto obtido na fase da otimização como a nova aproximação  $x^{k+1}$ . Quando o ponto não é aceito, o algoritmo retorna ao passo 4, conservando o mesmo ponto restaurado.

No Algoritmo de Restauração Inexata, os métodos para realizar a Fase da Restauração (passo 2 do Algoritmo 3.2) e da Minimização (passo 4 do Algoritmo 3.2) podem ser livremente escolhidos permitindo explorar as características de cada problema. A eficiência e o desempenho do Algoritmo de Restauração Inexata também dependem desta escolha. Em Martínez [30] e Martínez & Pilotta [31], são apresentadas propostas de algoritmos gerais para a realização de cada uma.

Na fase da minimização, é sugerido representar as condições (3.2.4)-(3.2.5) através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \underset{z}{\text{Minimizar}} && L(z, \lambda) \\ & \text{s.a} && \begin{cases} z \in \Pi_k \\ \|z - y^k\|_\infty \leq \delta_k \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

onde  $\Pi_k = \{z \in \Omega | C'(y^k)(z - y^k) = 0\}$  e  $L(x, \lambda) = f(x) + C(x)^T \lambda$ .

As restrições de (3.2.8) são lineares e há bons algoritmos próprios para este caso.

Em Martínez & Pilotta [31] são apresentados resultados numéricos que comprovam um bom desempenho do algoritmo.



### 3.3 Resultados de convergência

Para garantir que o Algoritmo 3.2 esteja bem definido, e provar a sua convergência global, se assumem as seguintes hipóteses sobre o problema (3.2.1):

(H1)  $\Omega$  é convexo e compacto.

(H2) Existe  $L_1 > 0$  tal que, para todo  $x, y \in \Omega$ ,

$$|C'(x) - C'(y)| \leq L_1 \|x - y\|$$

(H3) Existe  $L_2 > 0$  tal que, para todo  $x, y \in \Omega$ ,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L_2 \|x - y\|$$

O resultado de convergência para o Algoritmo 3.2 é o seguinte:

**Teorema 3.1.** *Supomos que o problema (3.2.1) satisfaz as hipóteses (H1)-(H3). Se a fase da restauração (Passo 2) é completada com sucesso em cada iteração, então, a seqüência  $\{x^k\}$  gerada pelo Algoritmo 3.2 verifica que :*

(i) *A seqüência  $\{|C(x^k)|\}$  converge a 0.*

(ii) *Todo ponto limite de  $\{x^k\}$  é viável.*

(iii) *Se  $x^*$  é um ponto limite de  $\{x^k\}$  e  $\lim_{k \in K_1} x^k = x^*$ , então*

$$\lim_{k \in K_1} y^k = x^*$$

*onde  $y^k$  é o ponto obtido na fase da restauração, na iteração  $k$ .*

(iv) *Existe um conjunto infinito  $K_2 \subset \{0, 1, 2, \dots\}$  tal que*

$$\lim_{k \in K_2} d_{tan}^k = 0.$$

(v) *Existe um conjunto infinito  $K_3 \subset \{0, 1, 2, \dots\}$  e  $x^* \in \Omega$  tal que*

$$\lim_{k \in K_3} x^k = \lim_{k \in K_3} y^k = x^*,$$

$$C(x^*) = 0,$$

$$\lim_{k \in K_3} d_{tan}^k = 0.$$

*Além disso, se  $x^*$  é um ponto regular, ele satisfaz as condições KKT de otimalidade do problema (3.2.1).*

A demonstração do teorema 3.1 pode ser vista em [29]. Ele garante que, independentemente de condições sobre as restrições, existe uma subsequência da seqüência gerada pelo Algoritmo 3.2, convergente a um ponto viável e tais que a subsequência associada de vetores  $\{d_{tan}^k\}$  converge a zero.

A otimalidade dos pontos limite está relacionada às direções  $d_{tan}^k$ , que são direções de descida no espaço de minimização.

Como descrito em [32], pode-se mostrar que estes pontos limite satisfazem a condição AGP de otimalidade, proposta por Martínez & Svaiter [33], que é uma condição satisfeita por minimizadores locais de problemas de programação não linear, independentemente de hipóteses de regularidade.

Para o problema (3.2.1), o vetor AGP  $g(x)$ , avaliado em  $x \in \mathbb{R}^n$ , é definido por:

$$g(x) = P(x - \nabla f(x)) - x$$

onde  $P(z)$  é a projeção de  $z$  no espaço tangente aproximado da região viável de (3.2.1).

Um ponto  $x^*$  satisfaz a condição AGP se existe uma seqüência  $\{x^k\}$  que converge a  $x^*$  e tal que  $\{g(x^k)\}$  converge a 0.

## Capítulo 4

# Restauração inexata para problemas em dois níveis

### 4.1 Introdução

Os problemas de otimização em dois níveis se caracterizam pelo fato de que um subconjunto de suas variáveis deve resolver um problema de otimização parametrizado por outras variáveis, chamado problema do segundo nível. Esta estrutura é importante para a modelagem de diversas situações práticas envolvendo hierarquias de decisão, como em mecânica estrutural ou economia.

Resolver problemas de otimização em dois níveis é difícil, tanto do ponto de vista teórico como prático. Alguns autores reformulam o problema do segundo nível substituindo-o pelas suas condições de otimalidade e aplicam algoritmos padrão de programação não linear. Outros resolvem localmente a função implícita  $y(x)$  e utilizam técnicas de otimização não diferenciável.

A aplicação da técnica de restauração inexata na resolução de problemas em dois níveis foi proposta em [12, 13]. Este enfoque permite tratar diretamente o problema do segundo nível, sem reformulação, através de técnicas de otimização diferenciável.

O Algoritmo de Restauração Inexata para resolução de problemas em dois níveis é uma adaptação do Algoritmo 3.2, que visa explorar o fato de que um problema de otimização faz parte da descrição da região viável.

### 4.2 O Algoritmo

Para facilitar a exposição, a partir de agora consideramos o seguinte problema de programação matemática em dois níveis:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F(x, y) \\ \text{s.a} & \left\{ \begin{array}{l} y = \underset{y}{\operatorname{argmin}} f(x, y) \\ \text{s.a} \quad \left\{ \begin{array}{l} h(x, y) = 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \quad (4.2.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $F, f : \mathbb{R}^{n_x+n_y} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^{n_x+n_y} \rightarrow \mathbb{R}^p$  e tais que  $\nabla F(x, y)$ ,  $\nabla f(x, y)$  e  $h'(x, y)$  existem e são contínuas.

O problema do segundo nível em 4.2.1, denotado por  $\text{PSN}(x)$ , é:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x, y) \\ \text{s.a} & \left\{ \begin{array}{l} h(x, y) = 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad (4.2.2)$$

cujas condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) são

$$\begin{array}{rcl} \nabla_y f(x, y) + \nabla_y h(x, y)\mu - \gamma & = & 0 \\ h(x, y) & = & 0 \\ y_i \gamma_i & = & 0 \quad (i = 1, \dots, n_y) \\ y & \geq & 0 \\ \gamma & \geq & 0, \end{array} \quad (4.2.3)$$

onde  $\mu \in \mathbb{R}^p$  e  $\gamma \in \mathbb{R}^{n_y}$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições  $h(x, y) = 0$  e  $y \geq 0$ , respectivamente, e  $h'_y(x, y)$  representa a matriz jacobiana de  $h(x, y)$  em relação a  $y$ .

Através das condições 4.2.3, define-se a função  $C : \mathbb{R}^{n_x+2n_y+p} \rightarrow \mathbb{R}^{2n_y+p}$ :

$$C(x, y, \mu, \gamma) = \begin{pmatrix} \nabla_y f(x, y) + \nabla_y h(x, y)\mu - \gamma \\ h(x, y) \\ y_1 \gamma_1 \\ \vdots \\ y_{n_y} \gamma_{n_y} \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

Definimos o seguinte conjunto:

$$\Omega = \{(x, y, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^{n_x+2n_y+p}\} \quad (4.2.5)$$

Para medir a viabilidade de um ponto  $(x, y, \mu, \gamma) \in \Omega$ , é utilizado o valor de  $|C(x, y, \mu, \gamma)|$ , com  $C$  definida em (4.2.4). Para definir uma aproximação linear à região induzida usamos a variedade linear definida por  $C'((x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k))((x, y, \mu, \gamma) - (x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)) = 0$ , e como medida de otimalidade, a norma do gradiente projetado do Lagrangeano na interseção desta variedade com uma região de confiança centrada em  $(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)$ . Ou seja,  $\|d_{tan}^k(x, y, \mu, \gamma)\|$ .

O vetor  $(y, \mu, \gamma)$  define as variáveis do segundo nível e  $x$  é a variável do primeiro nível. Os passos do algoritmo são semelhantes aos do Algoritmo 3.2, apresentado no capítulo 3. Cada iteração, consiste em calcular uma nova aproximação  $(x^{k+1}, y^{k+1}, \mu^{k+1}, \gamma^{k+1})$ , a partir de  $(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)$ , em duas etapas. Na primeira, que é a Fase da Restauração, o objetivo é calcular um ponto  $(x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R) \in \Omega$  mais viável que  $(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)$ , através da resolução do problema do segundo nível  $PSN(x^k)$ . O problema do segundo nível não é reformulado. Através de algum método de otimização adequado ao problema, achamos uma aproximação da solução deste. Em seguida obtemos aproximações dos multiplicadores de Lagrange correspondentes. Aceitamos estas aproximações se  $|C(x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R)| \leq r|C(x, y, \mu, \gamma)|$

Na fase de Otimização, a partir de  $(x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R)$ , usando um algoritmo adequado, achamos um ponto  $(x^{k,i}, y^{k,i}, \mu^{k,i}, \gamma^{k,i})$  que melhora o valor da função Lagrangeana na aproximação linear do conjunto de viabilidade do problema do primeiro nível.

Dados  $(x^0, y^0)$ , uma aproximação inicial para a solução do problema 4.2.1 e  $(\mu^0, \gamma^0)$  aproximações dos multiplicadores de Lagrange associados ao  $PSN(x^0)$  e os parâmetros  $\eta > 0$ ,  $r \in (0, 1)$ ,  $M > 0$ ,  $\theta_{-1} \in (0, 1)$ ,  $\delta_{min} > 0$ ,  $\lambda^0 \in \mathbb{R}^{2n_y+p}$ ,  $w_k$  tal que  $\sum_{k=0}^{\infty} w_k < \infty$ , os passos de uma iteração para problemas em dois níveis, estão descritos a seguir:

---

**Algoritmo 4.2: Restauração Inexata para Problemas em Dois Níveis**

---



---

*Passo 1*

---

Definir

$$\begin{aligned} \theta_k^{min} &= \min\{1, \theta_{k-1}, \dots, \theta_{-1}\}, \\ \theta_k^{large} &= \min\{1, \theta_k^{min} + w_k\}, \\ \theta_{k,-1} &= \theta_k^{large} \end{aligned}$$

---

*Passo 2: Fase da Restauração.*

---

Achar  $y^R$  resolvendo inexatamente o problema do segundo nível parametrizado por  $x^k$ :

$$\begin{aligned} &\underset{y}{\text{Minimizar}} && f(x^k, y) \\ &\text{s.a} && \begin{cases} h(x^k, y) = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Estimar  $(\mu^R, \gamma^R)$ , as aproximações dos multiplicadores de Lagrange associados a  $y^R$ .

Aceitamos uma solução inexata  $(y^R, \mu^R, \gamma^R)$  de (4.2.6) se  $\gamma^R \geq 0$  e

$$|C(x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R)| \leq r|C(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)|$$

---

*Passo 3: Direção Tangente de Cauchy.*

---

Calcular

$$d_{tan}^k = P_k [(x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R) - \eta \nabla L(x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R, \lambda^k)] - (x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R)$$

onde  $P_k(x, y, \mu, \gamma)$  é a projeção ortogonal de  $(x, y, \mu, \gamma)$  em  $\Pi_k$ , com

$$\Pi_k = \{(x, y, \mu, \gamma) \in \Omega \mid C'(x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R)((x, y, \mu, \gamma) - (x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R)) = 0\}$$

e

$$L(x, y, \mu, \gamma, \lambda) = F(x, y) + C(x, y, \mu, \gamma)^T \lambda.$$

Se  $(x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R) = (x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)$  e  $d_{tan}^k = 0$ , terminar a execução do algoritmo e retornar  $(x^k, y^k)$  como a solução. Senão, fazer  $i = 0$ , escolher  $\delta_{k,0} \geq \delta_{min}$  e continuar.

---

*Passo 4: Fase da Minimização no Espaço Tangente Aproximado.*

---

Se  $d_{tan}^k = 0$  definir  $(y^{k,0}, \mu^{k,0}, \gamma^{k,0}) = (y^R, \mu^R, \gamma^R)$ .

Senão, calcular  $(x^{k,i}, y^{k,i}, \mu^{k,i}, \gamma^{k,i}) \in \Pi_k$ , resolvendo inexatamente o seguinte problema de otimização com restrições lineares:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & L(x, y, \mu, \gamma, \lambda^k) \\ \text{s.a} \quad & \begin{cases} (x, y, \mu, \gamma) \in \Pi_k(x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R) \\ \gamma^{k,i} \geq 0 \\ \|(x, y, \mu, \gamma) - (x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R)\|_\infty \leq \delta_k \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

---

*Passo 5: Atualização dos Multiplicadores.*

---

Se  $d_{tan}^k = 0$  definir  $\lambda_{atual}^{k,i} = \lambda^k$ .Senão, calcular  $\lambda_{atual}^{k,i} \in \mathbb{R}^{2n_y+p}$  tal que  $\|\lambda_{atual}^{k,i}\| \leq M$ .

---

*Passo 6: Cálculo da Redução Prevista.*

---

Definir, para todo  $\theta \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} Pred_{k,i}(\theta) = & \theta [L(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k, \lambda^k) - \\ & L(x^{k,i}, y^{k,i}, \mu^{k,i}, \gamma^{k,i}, \lambda^k) - \langle C(x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R), \lambda_{atual}^{k,i} - \lambda^k \rangle] \\ & + (1 - \theta) [|C(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)| - |C(x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R)|] \end{aligned}$$

Calcular  $\theta_{k,i}$ , o máximo dos elementos  $\theta \in [0, \theta_{k,i-1}]$  que verifica

$$Pred_{k,i}(\theta) \geq 1/2 [|C(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)| - |C(x^k, y^R, \mu^R, \gamma^R)|].$$

Definir

$$Pred_{k,i} = Pred_{k,i}(\theta_{k,i})$$

---

**Passo 7: Comparação da Redução Real e da Prevista.**


---

Calcular

$$Ared_{k,i} = \theta_{k,i} \left[ L(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k, \lambda^k) - L(x^{k,i}, y^{k,i}, \mu^{k,i}, \gamma^{k,i}, \lambda_{atual}^{k,i}) \right] \\ + (1 - \theta_{k,i}) \left[ |C(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)| - |C(x^{k,i}, y^{k,i}, \mu^{k,i}, \gamma^{k,i})| \right].$$

Se  $Ared_{k,i} \geq 0.1Pred_{k,i}$  definir

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^{k,i}, \\ y^{k+1} &= y^{k,i}, \\ \mu^{k+1} &= \mu^{k,i}, \\ \gamma^{k+1} &= \gamma^{k,i}, \\ \lambda^{k+1} &= \lambda_{atual}^{k,i}, \\ \theta_k &= \theta_{k,i}, \\ \delta_k &= \delta_{k,i}, \\ Ared_k &= Ared_{k,i}, Pred_k = Pred_{k,i} \\ &\text{e terminar a iteração } k. \end{aligned}$$

Senão, escolher  $\delta_{k,i+1} \in [0.1\delta_{k,i}, 0.9\delta_{k,i}]$ , fazer  $i = i + 1$  e voltar para o Passo 4.

---

Fim

---

#### 4.2.1 Fase da restauração

A fase da restauração, realizada pelo Passo 2 do Algoritmo 4.2, tem como objetivo a obtenção de um ponto que seja mais viável em relação ao da iteração anterior.

Este ponto,  $(y^R, \mu^R, \gamma^R)$ , é obtido na resolução, inexata, do problema de otimização do segundo nível (4.2.1), parametrizado por  $x^k$ . O ponto  $y^R$  é a solução, enquanto que  $(\mu^R, \gamma^R)$  são estimativas para os multiplicadores de Lagrange associados.

Neste caso, resolver inexatamente o problema significa utilizar como critério de parada, a desigualdade:

$$|C(x, \bar{y}, \bar{\mu}, \bar{\gamma})| \leq r|C(x, y, \mu, \gamma)| \quad (4.2.8)$$

onde a função  $C$  está definida em (4.2.4) e é utilizada como a medida de viabilidade.

Assumindo que o problema do segundo nível satisfaz uma qualificação das restrições, o sistema KKT se anula em uma solução de (4.2.2), ou seja, em um ponto viável de (4.2.1).

#### 4.2.2 Estimadores dos multiplicadores de Lagrange

Os vetores  $\mu$  e  $\gamma$  são estimativas para os multiplicadores de Lagrange associados ao par  $(x, y)$ .

É importante obter boas estimativas para estes multiplicadores, pois deles dependem tanto o critério de parada na fase da restauração, quanto a definição do espaço viável na fase da minimização, e portanto a eficiência do algoritmo. Muitos algoritmos de otimização fornecem estimadores dos multiplicadores de Lagrange a cada iteração. Quando este não for o caso, é necessário incorporar uma rotina para este fim, durante a resolução do problema do segundo nível.

### 4.2.3 Fase da minimização

A fase da minimização, realizada pelo Passo 4 do Algoritmo 4.2, consiste em determinar um ponto que diminua o valor da função Lagrangeana no espaço definido pela intersecção da linearização das restrições com uma região de confiança centrada no ponto restaurado.

O problema de minimização no Passo 4 do Algoritmo 4.2 não precisa ser resolvido exatamente. Basta pedir que a função objetivo decresa suficientemente.

O conjunto viável na minimização está definido através de  $C'$ , o jacobiano da função  $C$  associada às restrições KKT do problema do segundo nível, e depende, portanto, das derivadas de segunda ordem das funções envolvidas no problema do segundo nível. Portanto, devemos assumir que estas existem e são contínuas.

Da forma que o algoritmo está apresentado, ele está sempre bem definido, se o problema do segundo nível tem solução. Então a possibilidade de utilizá-lo para resolver problemas de dois níveis, em princípio, não possui nenhum impedimento. Foram resolvidos muitos problemas da literatura com sucesso, confirmando a robustez do método.

Se, em todas as iterações, na fase da restauração, a norma da distância entre o ponto inicial, desta fase, e o restaurado está limitada por uma constante fixa vezes a norma da viabilidade do ponto inicial

$$\|y^R, \mu^R, \gamma^R - (y^k, \mu^k, \gamma^k)\| \leq \beta |C(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)|$$

pode-se provar um teorema de convergência global.

Esta condição depende do comportamento do algoritmo e, portanto, é interessante encontrar hipóteses sobre o problema que garantam este comportamento.

## 4.3 Resultados de convergência

As seguintes hipóteses sobre o problema (4.2.1) garantem que, para todo  $k$

$$\|y^R, \mu^R, \gamma^R - (y^k, \mu^k, \gamma^k)\| \leq \beta |C(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)|$$

(H1) A região de viabilidade é uma caixa limitada.

(H2) O problema  $\text{PSN}(x)$  tem solução única  $y(x)$  para cada valor de  $x \in X$ .

(H3) Para todo par  $(x, y(x))$  com  $x \in X$  e  $y(x)$  a solução de  $\text{PSN}(x)$ , temos que  $(x, y(x))$  é regular, no sentido de que o conjunto formado pelos gradientes das restrições ativas em  $(x, y(x))$  é linearmente independente.



(H4) Para todo  $(x, y(x), \mu(x), \gamma(x))$ :

$$y^T \nabla_y^2 l(x, y(x), \mu(x), \gamma(x)) y > 0$$

para todo  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ , com  $y \neq 0$ , e onde  $l(x, y, \mu, \gamma) = f(x, y) + h(x, y)^T \mu$ .

(H5) Para todo  $y(x)$ , solução de PSN( $x$ ), temos

$$y_i(x) = 0 \implies \gamma_i(x) > 0$$

e

$$\gamma_i(x) = 0 \implies y_i(x) > 0$$

para todo  $i = 1, \dots, n_y$ . (Complementaridade estrita).

(H6) Existem  $L_1 > 0$  e  $L_2 > 0$  tais que, para todo  $(x_1, y_1, \mu_1, \gamma_1) \in \Omega$ ,  $(x_2, y_2, \mu_2, \gamma_2) \in \Omega$ , temos

$$\|\nabla F(x_1, y_1) - \nabla F(x_2, y_2)\| \leq L_1 \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$$

e

$$\|C'(x_1, y_1, \mu_1, \gamma_1) - C'(x_2, y_2, \mu_2, \gamma_2)\| \leq L_2 \|(x_1, y_1, \mu_1, \gamma_1) - (x_2, y_2, \mu_2, \gamma_2)\|$$

Assumindo as hipóteses (H1)-(H6), prova-se o teorema 4.1.

**Teorema 4.1.** *O Algoritmo 4.2 está bem definido e a seqüência gerada pelo Algoritmo 4.2,  $\{(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)\}$ , verifica que:*

- (i)  $\{C(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)\}$  converge a 0.
- (ii) Todo ponto limite  $x^*$  de  $\{(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)\}$  é viável, no sentido de que é a solução de PSN( $x^*$ ).
- (iii) Se  $(x^*, y^*, \mu^*, \gamma^*)$  é um ponto limite de  $\{(x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k)\}$  e

$$\lim_{k \in K_1} (x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k) = (x^*, y^*, \mu^*, \gamma^*)$$

então

$$\lim_{k \in K_1} (x_R^k, y_R^k, \mu_R^k, \gamma_R^k) = (x^*, y^*, \mu^*, \gamma^*)$$

onde  $(x_R^k, y_R^k, \mu_R^k, \gamma_R^k)$  é o ponto obtido na fase da restauração.

- (iv) Existe um conjunto infinito  $K_2 \subset \{0, 1, 2, \dots\}$  tal que

$$\lim_{k \in K_2} d_{tan}^k = 0$$

(v) Existe um conjunto infinito  $K_3 \subset \{0, 1, 2, \dots\}$  e  $(x^*, y^*, \mu^*, \gamma^*) \in \Omega$  tal que

$$\lim_{k \in K_3} (x^k, y^k, \mu^k, \gamma^k) = \lim_{k \in K_3} (x_R^k, y_R^k, \mu_R^k, \gamma_R^k) = (x^*, y^*, \mu^*, \gamma^*),$$

$$C(x^*, y^*, \mu^*, \gamma^*) = 0,$$

$$\lim_{k \in K_3} d_{tan}^k = 0.$$

O resultado de convergência para Algoritmo 4.2 está baseado no Teorema 3.1 de Martínez [29], que sob hipóteses adequadas, garante que a seqüência gerada possui uma subseqüência convergente a pontos viáveis e que satisfazem uma condição de otimalidade, desde que a fase da restauração possa ser completada com sucesso em todas as iterações.

## 4.4 Considerações

Para garantir que o problema em dois níveis (4.2.1) tenha solução e provar os resultados de convergência é necessário assumir algumas hipóteses. Algumas destas são usuais quando tratamos de algoritmos para resolver problemas de programação não linear. Para o problema em dois níveis hipóteses mais fortes são usadas para garantir resultados de convergência. Nos trabalhos de Dempe ([18], [19], [20]) encontram-se este assunto é discutido em profundidade. Os comentários a seguir se baseiam nos resultados apresentados nestas referências. A formulação de condições de otimalidade para problemas em dois níveis são, em geral, deduzidas a partir de uma reformulação do problema original como um problema padrão de programação matemática não diferenciável. Neste enfoque as condições necessárias de primeira ordem obtidas se baseiam no conceito de *estabilidade forte* das soluções ótimas do problema do segundo nível. Isto equivale à existência de vizinhanças  $V$  de  $x$  e  $U$  de  $y$  onde para cada  $s \in V$  há um único  $y \in U$ , portanto é possível expressar  $y = y(s)$  e tal que cada  $s \in V$  é uma solução isolada do problema PNS(s).

Se acrescentamos a hipótese de que o problema do segundo nível seja convexo para cada  $x$  fixo, é possível expressar o problema em dois níveis como um problema que, localmente, é de apenas um nível e obter condições de otimalidade, sempre que seja possível calcular uma derivada direcional. Para isto, assume-se que as restrições do problema verificam a qualificação das restrições conhecida como de Mangasarian-Fromowitz e outra que pede o posto constante da matriz associada às restrições ativas. Estas hipóteses substituíam às hipóteses de regularidade pedidas no nosso trabalho. São mais fracas que a regularidade e permitem considerar o caso em que a função  $y(x)$  não é diferenciável.

Um caso particular consiste em substituir o problema do segundo nível pelas condições KKT. Esta reformulação pode ser tratada com algoritmos tanto diferenciáveis como não diferenciáveis. Foram utilizados com sucesso algoritmos de programação quadrática seqüencial (SQP).[24]. A desvantagem desta reformulação é que ela só é equivalente ao problema original se o segundo nível é um problema

convexo. Os algoritmos SQP são incapazes de evitar a convergência a pontos não viáveis.

Para obter condições necessárias de otimalidade, além da convexidade do problema do segundo nível, é preciso pedir condições de regularidade mais fortes que as de Mangasarian-Fromowitz e posto constante, mencionadas anteriormente. O desenvolvimento de algoritmos de descida para os problemas em dois níveis introduz a necessidade de caracterizar os pontos estacionários. Para os problemas não diferenciáveis utilizam-se os pontos estacionários de Clarke e de Boulligand de modo que, os algoritmos propostos convergem a pontos estacionários nestes sentidos. Essencialmente, é preciso que o problema do segundo nível tenha solução localmente única e que esta solução verifique a condição suficiente de minimizador local, o que é similar ao nosso pedido de hessiano definido positivo.

Não entraremos em muito detalhe nesta análise já que o tema é muito complexo e as técnicas utilizadas são completamente diferentes da nossa.

O campo de pesquisa nesta área está aberto tanto do ponto de vista teórico como prático. Há muitos resultados teóricos que não sugerem algoritmos implementáveis e métodos com experimentos promissórios que não estão bem fundamentados teoricamente.

## 4.5 Exercícios

1. Considere o problema de programação matemática em dois níveis sem restrição no primeiro nível e com restrições de igualdade no segundo nível da forma:

$$\begin{array}{ll} \underset{x,y}{\text{Minimizar}} & F(x,y) \\ \text{s.a} & \left\{ \begin{array}{l} y = \underset{y}{\operatorname{argmin}} f(x,y) \\ \text{s.a} \quad h(x,y) = 0 \end{array} \right. \end{array} \quad (4.5.9)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $F, f : \mathbb{R}^{n_x+n_y} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^{n_x+n_y} \rightarrow \mathbb{R}^p$  e tais que  $\nabla F(x,y)$ ,  $\nabla f(x,y)$  e  $h'(x,y)$  existem e são contínuas.

- (a) Decore a função  $C(x,y,\mu)$  associada às restrições KKT do segundo nível de (4.5.9), como em (4.2.4)
  - (b) Mostre que, assumindo as hipóteses (H1)-(H6)  $C'_{y,\mu}(x,y(x),\mu(x))$  é não singular.
2. Estude o caso do problema de programação matemática em Dois Níveis sem restrição no primeiro nível e com restrições lineares de igualdade no segundo nível da forma:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar}_{x,y} \quad F(x,y) \\ \text{s. a} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \underset{y}{\operatorname{argmin}} \quad f(x,y) \\ \text{s.a} \quad \left\{ \begin{array}{l} A(x)y = b(x) \\ y \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \quad (4.5.10)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $F, f : \mathbb{R}^{n_x+n_y} \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $\nabla F(x,y)$  e  $\nabla f(x,y)$  existem e são contínuas e  $A \in \mathbb{R}^{p \times (n_x+n_y)}$  é uma matriz com  $p \geq n_y$ .

## Capítulo 5

# Aplicações em Engenharia Mecânica

### 5.1 Introdução

A Otimização Estrutural é a área da Engenharia Mecânica em que se analisam e projetam sistemas capazes de suportar a ação de forças externas, enquanto seu desempenho e/ou custo são otimizados. A teoria e a modelagem matemática nesta área são bastante complexas, envolvendo problemas de otimização hierárquica em dois níveis, onde o segundo nível é um problema de equilíbrio.

Na abordagem tradicional em Engenharia Mecânica, as incógnitas do problema são as variáveis de projeto, enquanto que os deslocamentos, que são variáveis do segundo nível, dependem das variáveis de projeto, implicitamente através da equação de equilíbrio.

A maioria dos métodos utilizados calculam, a cada iteração do processo de otimização, uma solução do problema de equilíbrio e aplicam o método adjunto para a análise de sensibilidade.

A proposta de utilizar o Algoritmo 4.2 na resolução de problemas em otimização estrutural, apresentada em [12, 13], tem as vantagens de considerar as variáveis de projeto e os deslocamentos como variáveis independentes, e de permitir a resolução inexata dos problemas de equilíbrio durante o processo de otimização.

Aplicamos esta técnica na resolução de exemplos de duas classes de problemas. No problema de Otimização de Forma com contato sem fricção, em um sistema de uma barra, sujeita a forças externas que se deforma ao entrar em contato com uma superfície rígida e no problema de Otimização Topológica em um sistema de treliças sujeito a forças externas e contato sem fricção.

## 5.2 O problema de contato

O problema de contato consiste em achar o equilíbrio um sistema mecânico formado por um corpo  $\mathcal{B}$  sujeito a forças externas, que se deforma ao entrar em contato com uma superfície  $S$ . Considerando  $S$  rígida, o equilíbrio do sistema pode ser modelado através da formulação conhecida como Problema de Signorini. Ver [27].

Supõe-se que o corpo  $\mathcal{B}$  está definido por uma região aberta  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e limitado pelo contorno  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_T \cup \Gamma_C$ , contínuo e Lipschitz. Em  $\Gamma_D$ ,  $\mathcal{B}$  está fixo, existem cargas de superfície  $t$  que atuam sobre  $\Gamma_T$  e forças do corpo  $b$  que atuam sobre o domínio  $\Omega$ , conforme a Figura 5.1.

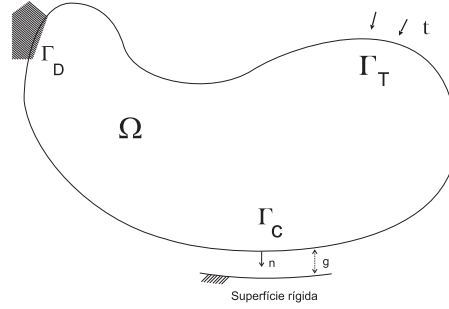


Figura 5.1: Sistema mecânico do problema de contato

A parte do domínio  $\Gamma_C$  corresponde à superfície do corpo que poderá entrar em contato com a superfície rígida  $S$ , ou seja, a região de contato está contida em  $\Gamma_C$ .

Para a formulação matemática, considera-se que as superfícies de contato são planas e que as normais a ambas as superfícies são praticamente colineares. O equilíbrio do sistema é descrito através da formulação forte do Problema de Signorini:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(\nabla u) = b & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_D \\ \sigma(\nabla u)n = t & \text{em } \Gamma_T \\ \sigma_t(\nabla u) = 0 & \text{em } \Gamma_C \\ \sigma_n(\nabla u) \leq 0 & \text{em } \Gamma_C \\ (u_n - g) \leq 0 & \text{em } \Gamma_C \\ \sigma_n(\nabla u)(u_n - g) = 0 & \text{em } \Gamma_C \end{cases} \quad (5.2.1)$$

onde a função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  corresponde ao deslocamento do corpo  $\mathcal{B}$  a partir da posição inicial até a posição de equilíbrio,  $\operatorname{div}(\cdot)$  denota o operador de divergência,  $\sigma(\nabla u)$  é o tensor de tensões de Cauchy, escrito em termos do gradiente de  $u$ .  $\sigma_n$  e  $\sigma_t$  são as tensões superficiais, normal e tangencial, respectivamente.  $u_n$  denota a projeção do deslocamento  $u$  e  $g$  denota a projeção da folga inicial normal  $n$ , sobre a direção normal às superfícies de contato.

A primeira equação em (5.2.1) descreve o equilíbrio do corpo enquanto que a segunda e a terceira são as condições de contorno. As três últimas expressões cor-

respondem respectivamente à condição de não penetração entre os corpos e de complementaridade, expressando que as tensões são não nulas quando não há contato efetivo.

O problema (5.2.1) também pode ser descrito através da formulação fraca, ou variacional, que é vantajosa devido à extensa fundamentação teórica e computacional, já desenvolvida. Ver [1, 38].

Assumindo hipóteses adequadas sobre o domínio, a formulação variacional para (5.2.1) é obtida multiplicando a primeira equação de (5.2.1) por um deslocamento  $v$  admissível e integrando, até obter:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(\nabla u) \nabla(v - u) d\Omega = \int_{\Omega} b(v - u) d\Omega$$

para todo  $v \in K$ , onde

$$K = \{v \in V \mid v_n - g \geq 0 \text{ em } \Gamma_C \text{ e } v = 0 \text{ em } \Gamma_D\}$$

e  $V$  denota o espaço das funções suficientemente suaves que correspondem aos deslocamentos admissíveis para o corpo  $\mathcal{B}$ .

Aplicando o Teorema de Green na expressão acima, obtém-se a formulação variacional para o problema de contato:

$$\int_{\Omega} \sigma(\nabla u) \nabla(v - u) d\Omega \geq \int_{\Omega} b(v - u) d\Omega + \int_{\Gamma_T} t(v - u) d\Gamma_T \quad (5.2.2)$$

para todo  $v \in K$ .

Definimos a forma bilinear  $a : K \times K \rightarrow R$ ,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(\nabla u) \nabla v d\Omega$$

e a forma linear  $f : K \rightarrow R$ ,

$$f(v) = \int_{\Omega} b v d\Omega + \int_{\Gamma_T} t v d\Gamma_T,$$

então a equação (5.2.2) pode ser reescrita como

$$a(u, v - u) \geq f(v - u) \quad (5.2.3)$$

ou

$$a(u, u) - f(u) \leq a(u, v) - f(v) \quad (5.2.4)$$

para todo  $v \in K$ .

O problema de contato é reformulado como segue:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F(v) \\ \text{s.a} & v \in K \end{array} \quad (5.2.5)$$

onde  $F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$  é denominada função energia de deformação e  $K = \{v \in V \mid v_n - g \geq 0 \text{ em } \Gamma_C \text{ e } v = 0 \text{ em } \Gamma_D\}$  é o conjunto das restrições.

A existência e unicidade de solução para (5.2.5), assim como a equivalência com o problema depende de condições de regularidade sobre a forma bilinear  $a$ . Os detalhes teóricos sobre o problema podem ser vistos em [27].

### 5.3 Discretização do problema de contato através do método dos Elementos Finitos

O problema (5.2.5) é um problema de otimização em dimensão infinita, já que está formulado através de equações diferenciais. Para ser tratado numericamente, ele precisa ser discretizado.

Os métodos para discretização mais utilizados estão baseados em técnicas de aproximação numérica, dentre os quais destacam-se Diferenças Finitas, Rayleigh-Ritz, Galerkin, Resíduos Ponderados e o Método dos Elementos Finitos. Ver [1, 38].

O Método dos Elementos Finitos surgiu na teoria de elasticidade, para tratar problemas como (5.2.5). Ele divide o domínio de integração contínuo, em um número finito de regiões, denominadas elementos finitos, transformando o meio contínuo  $\Omega$  em discreto  $\Omega^h$ , como na Figura 5.2.

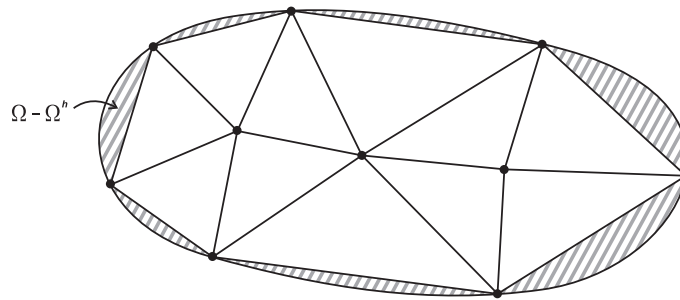


Figura 5.2: Rede de elementos finitos

Com o domínio discretizado, ao invés de buscar funções admissíveis sobre todo o contorno, o Método dos Elementos Finitos considera as funções admissíveis em cada elemento finito  $i$ , definindo um funcional discretizado  $F_i^h$ , de modo que

$$F^h = \sum_{i=1}^n F_i^h.$$

O funcional  $F_i^h$  é definido sobre uma função aproximadora  $v^h$ , que é a combinação linear finita de funções lineares ou quadráticas, denominada funções de forma,



de modo que

$$v^h = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j,$$

onde  $a_j$  são os parâmetros nodais,  $m$  é o número de nós que determinam o elemento  $i$  e  $\phi_j$  as funções de forma.

Assim, o funcional  $F^h$  é expresso por:

$$F^h(a_j) = \sum_{i=1}^n F_i^h(a_j)$$

e temos que

$$\delta F^h(a_j) = \sum_{i=1}^n \delta F_i^h(a_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i^h(a_j)}{\partial a_j}$$

Os resultados teóricos e a análise de erro para o método dos elementos finitos podem ser vistos em [38].

Utilizando o Método dos Elementos Finitos na discretização do problema de contato (5.2.5) obtemos:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && F^h(v^h) \\ & \text{s.a} && v^h \in K^h \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

onde

$$F^h(v^h) = \sum_{i=1}^n F_i^h(v^h),$$

$$F_i^h(v^h) = \frac{1}{2} a^h(v^h, v^h) - f(v^h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i^h} \sigma(\nabla v^h) \nabla v^h d\Omega - \int_{\Omega_i^h} b v^h d\Omega_i^h + \int_{\Gamma_T^h} t v d\Gamma_T^h,$$

$$v^h = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j,$$

$$K^h = \{v^h \in V^h \mid v_n^h - g \geq 0 \text{ em } \Gamma_C^h \text{ e } v^h = 0 \text{ em } \Gamma_D^h\}$$

e  $\Omega_i^h$  corresponde ao elemento finito  $i$ .

O conjunto  $K^h$  também pode ser descrito através de um conjunto de equações e inequações lineares do tipo:

$$\begin{aligned} u_i^h &= 0 \\ Du^h &\leq d, \end{aligned}$$

onde  $d \in \mathbb{R}^m$ ,  $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $m < n$ , sendo  $m$  é o número de nós de  $\Gamma_C^h$ ,  $n$  é o número de variáveis do problema,  $L$  é o conjunto de nós que pertencem à discretização da superfície  $\Gamma_D$  e  $l \in L$ .

O problema (5.3.6) é um problema de otimização em dimensão finita nas variáveis  $a_i$ , cuja dimensão depende do número de elementos da malha de elementos finitos e do número de funções de forma  $\phi_j$ .

## 5.4 Otimização de Forma em problemas de contato sem fricção

O problema de Otimização de Forma é um problema em Engenharia Mecânica que consiste em determinar o formato do domínio de um corpo, de modo a otimizar uma função custo, associada à rigidez, quando sujeito a forças externas e possivelmente contato.

Neste caso, as variáveis de projeto são os parâmetros da curva do domínio do corpo, e os deslocamentos, ou variáveis do segundo nível, são a solução do Problema de Signorini discretizado (5.3.6). A função objetivo descreve a distribuição de tensão na superfície de contato, que pode ser dada, por exemplo, pela energia potencial total do sistema. Ver [22, 26].

Considerando  $\chi \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$  o vetor de variáveis de projeto, o problema de Otimização de Forma consiste em determinar o formato do corpo para o qual, no equilíbrio, a distribuição de tensão na superfície do contato seja constante:

$$\begin{array}{ll} \underset{\chi}{\text{Minimizar}} & F^h(\chi, v^h) \\ \text{s.a} & \chi \in \Theta \end{array} \quad (5.4.7)$$

onde  $\Theta$  é o conjunto dos parâmetros admissíveis, associado à preservação de volume e regularidade do contorno, e  $v^h$  é solução do problema de contato:

$$\begin{array}{ll} \underset{v^h}{\text{Minimizar}} & F^h(\chi, v^h) \\ \text{s.a} & v^h \in K^h \end{array} \quad (5.4.8)$$

onde

$$F^h(\chi, v^h) = \sum_{i=1}^n F_i^h(\chi, v^h)$$

e

$$\begin{aligned} F_i^h(\chi, v^h) &= \frac{1}{2} a^h(v^h, v^h) - f(v^h) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_i^h(\chi)} \sigma(\nabla v^h) \nabla v^h d\Omega - \int_{\Omega_i^h(\chi)} b v^h d\Omega_i^h - \int_{\Gamma_T^h} t v d\Gamma_T^h \end{aligned}$$

As demais notações são as mesmas de (5.3.6).

O problema (5.4.7)-(5.4.8) pode ser associado a um problema de programação matemática em dois níveis relacionando as variáveis do primeiro nível com as variáveis de projeto  $\chi$ , as variáveis do segundo nível com os deslocamentos  $v^h$  e as funções objetivo do primeiro e do segundo nível com a energia potencial total  $F^h$ . As restrições sobre as variáveis são dadas pelos conjuntos  $\Theta$  e  $K^h$ .

O problema de Otimização de Forma pode ser escrito como o problema em dois níveis:

$$\begin{aligned} & \underset{\chi, v^h}{\text{Minimizar}} && F^h(\chi, v^h) \\ & \text{s.a} && \begin{cases} \chi \in \Theta \\ v^h = \underset{v^h}{\text{argmin}} & F^h(\chi, v^h) \\ \text{s.a} & v^h \in K^h \end{cases} \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

### 5.4.1 Exemplos

Consideremos uma barra em estado plano de tensão, que está fixa em uma das extremidades e sujeita a cargas verticais. Supomos a existência de uma superfície rígida localizada a uma distância  $d$  da barra, como na figura 5.3.

A barra está discretizada em 30 elementos finitos quadrilaterais, constituindo 44 nós e um total de 88 variáveis, que são os deslocamentos horizontal  $u_x$  e vertical  $u_y$  em cada nó.

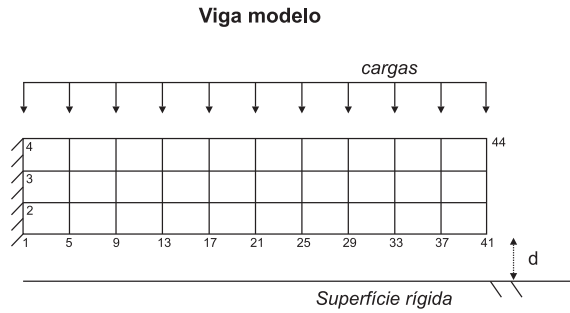


Figura 5.3: Barra modelo para o problema de otimização de forma

Utilizando funções de forma do tipo linear para aproximar o funcional em cada elemento como em [1], a derivada do funcional discretizado pode ser calculada analiticamente e as integrações determinadas numericamente através do Método da Quadratura Gaussiana.

A mudança de forma do corpo está descrita através da inclinação da superfície de contato (extremidade inferior da barra), que é dada pela posição dos vértices inferiores da barra  $(0, \chi)$  e  $(L, -\chi)$ , onde  $\chi \in [a, b]$  é a variável de projeto e  $L$  é o comprimento da barra, como mostra a Figura 5.4. Com esta parametrização do domínio, garante-se a preservação do volume da barra.

O problema de contato, ou do segundo nível em (5.4.9), está parametrizado pela variável de projeto  $\chi$ , o que significa que cada problema de equilíbrio está definido sobre um domínio diferente  $(\Omega(\chi))$ . Na prática, cada um dos problemas do segundo nível está associado a uma discretização do domínio.

O problema (5.4.9) apresenta uma dificuldade no que diz respeito à expressão das funções objetivo, pois elas dependem do tensor das tensões  $\sigma(\nabla u^h)$  determinados

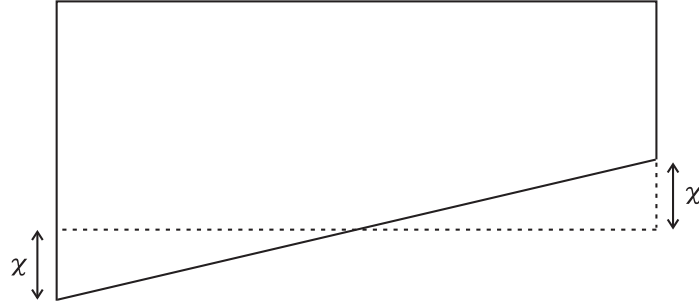


Figura 5.4: Parametrização da superfície de contato

pelas propriedades do material que constitui a barra.

Três diferentes tipos de materiais serão considerados, neste trabalho. Para cada material está associado um problema de Otimização de Forma (5.4.9).

### Exemplo 5.1. Barra constituída por material linearmente elástico

Um material é denominado linearmente elástico se satisfaz a lei de Hooke, ou seja, se a relação entre a tensão e a deformação é linear. A lei de Hooke pode ser escrita como:

$$\sigma(\nabla u) = E\nabla u$$

onde  $E$  é o tensor de elasticidade de Hooke. Este tensor satisfaz diversas propriedades dentre as quais destacamos a simetria. Ver [27].

Substituindo esta expressão na forma bilinear  $a(v, v)$  definida em (5.4.9), a função energia de deformação  $F(\chi, u)$  torna-se uma função quadrática e estritamente convexa, em relação aos deslocamentos  $u$ .

O problema de Otimização de Forma para um corpo linearmente elástico pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \underset{\chi, u}{\text{Minimizar}} && \frac{1}{2}u^T A(\chi)u - L(\chi)u \\ & \text{s.a} && \begin{cases} \chi \in \Theta \\ u = \underset{u}{\text{argmin}} & u^T A(\chi)u - L(\chi)u \\ \text{s.a} & u \in K \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

onde  $K$  é o conjunto dos deslocamentos admissíveis descrito por equações e inequações lineares,  $A(\chi)$  é uma matriz simétrica e definida positiva, denominada matriz de rigidez, e  $L(\chi)$  é o vetor das forças.

Os elementos da matriz de rigidez  $A(\chi)$  são determinados através das integrais decorrentes da forma bilinear  $a(v, v)$  definida na seção anterior, e por isso ela depende da variável  $\chi$ . As fórmulas fechadas para determinar os elementos da matriz de rigidez e do vetor das forças podem ser vistos em [1].

Na resolução do problema (5.4.10), foram utilizados os dados para a barra dados [27]:

- Comprimento da barra: 50 cm
- Altura da barra : 5 cm
- Módulo de Young do material:  $2.1 \times 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>
- Coeficiente de Poisson: 0.29

Para a distância da superfície rígida, o valor da força externa e a restrição sobre a variável de projeto, foram utilizados:

- Distância da superfície rígida:  $d = 0.5$  cm
- Força constante aplicada:  $-7.2$  kN/cm<sup>2</sup>
- Variável de projeto:  $\chi \in \Theta = \{\chi \in R \mid -0.5 \leq \chi \leq 0.5\}$

A configuração da barra e a respectiva configuração de equilíbrio, solução do problema de contato, estão na Figura 5.5.

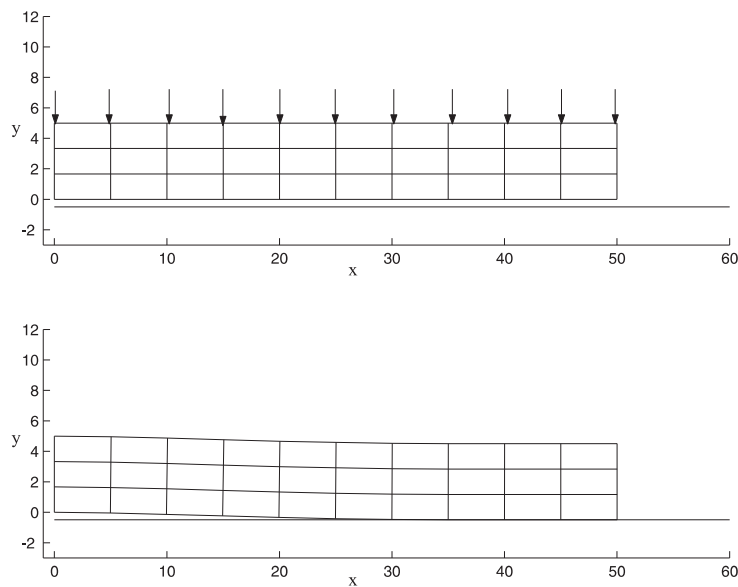


Figura 5.5: Configuração inicial e de equilíbrio da barra linearmente elástica ( $F = -55.25$ )

Utilizamos o Algoritmo 4.2 para resolver o problema em dois níveis (5.4.10) e o software MINOS [34] na resolução dos subproblemas das fases de minimização e otimização.

O resultado obtido como inclinação ótima corresponde ao limite superior da variável de projeto. A Figura 5.6 representa a configuração ótima da barra e a respectiva configuração de equilíbrio.

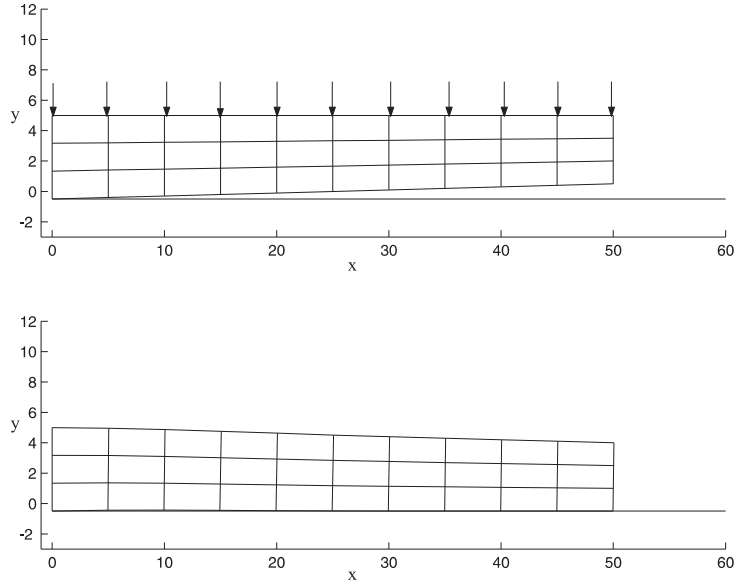


Figura 5.6: Configuração ótima e de equilíbrio da barra linearmente elástica ( $F = -55.25$ )

Na Tabela 5.1 estão os deslocamentos dos nós da superfície de contato, na configuração ótima. A primeira coluna representa o número do nó, de acordo com a Figura 5.3 e o par  $u_x, u_y$  representa os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente.

Na Tabela 5.2 e na Figura 5.8 estão os valores das tensões nos nós da superfície de contato, nas configurações inicial ( $\sigma^0$ ) e ótima ( $\sigma^*$ ).

### Exemplo 5.2. Barra constituída por material elasto plástico

Um material é do tipo elasto plástico se a relação entre tensão é linear somente para valores de tensão abaixo de um valor crítico.

Neste caso, a função de energia de deformação é uma função não quadrática em relação aos deslocamentos  $u$ .

O problema de Otimização de Forma (5.4.9) para corpos do tipo elasto plásticos, pode ser obtida através da formulação proposta por Haslinger et al. [26] que considera como função de energia de deformação:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( k \varepsilon_{II}^2(u) + \frac{1}{4} \left( \Sigma^2(u) - e^{-\Sigma^2(u)} + 1 \right) \right) d\Omega - L_{\Omega}(u) \quad (5.4.11)$$

Nó	$u_x$	$u_y$
1	0.00	0.00
5	$-3.28 \times 10^{-2}$	$-4.19 \times 10^{-2}$
9	$-5.18 \times 10^{-2}$	$-1.30 \times 10^{-1}$
13	$-5.92 \times 10^{-2}$	$-2.45 \times 10^{-1}$
17	$-5.83 \times 10^{-2}$	$-3.69 \times 10^{-1}$
21	$-5.25 \times 10^{-2}$	$-4.89 \times 10^{-1}$
25	$-4.53 \times 10^{-2}$	$-6.00 \times 10^{-1}$
29	$-4.04 \times 10^{-2}$	$-7.00 \times 10^{-1}$
33	$-3.79 \times 10^{-2}$	$-8.00 \times 10^{-1}$
37	$-3.58 \times 10^{-2}$	$-9.00 \times 10^{-1}$
41	$-3.35 \times 10^{-2}$	-1.00

Tabela 5.1: Deslocamentos no equilíbrio da configuração ótima da barra linearmente elástica

Nó	$\sigma^0$	$\sigma^*$
1	0.00	0.00
5	0.00	0.00
9	0.00	0.00
13	0.00	0.00
17	0.00	0.00
21	0.00	0.00
25	0.00	0.00
29	0.00	0.00
33	0.00	0.00
37	10.52	28.79
41	60.54	38.54

Tabela 5.2: Tensão na superfície de contato da barra linearmente elástica

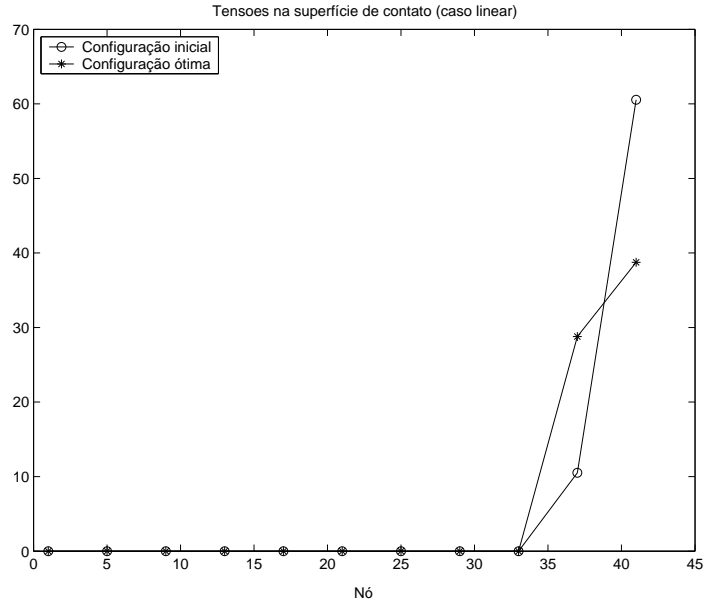


Figura 5.7: Tensões na superfície de contato da barra linearmente elástica

onde  $k$  é a constante do material,

$$\Sigma^2(u) = -\frac{2}{3}\varepsilon_{ii}(u)\varepsilon_{jj}(u) + 2\varepsilon_{ij}^2(u),$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = \partial u_i / \partial x_j$$

e  $L_\Omega(u)$  é dado pelo vetor das forças como no caso de elástico.

O problema de Otimização de Forma pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \underset{\chi, u}{\text{Minimizar}} && F(\chi, u) \\ & \text{s.a} && \begin{cases} \chi \in \Theta \\ u = \underset{u}{\text{argmin}} & F(\chi, u) \\ \text{s.a} & u \in K \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

onde  $K$  é o conjunto dos deslocamentos admissíveis,  $F(\chi, u)$  está descrita em (5.4.11) e  $\chi$  é a variável de projeto.

Na resolução do problema (5.4.12), foram utilizados os dados para a barra e para a força externa aplicada dados em [26]:

- Comprimento da barra: 4 cm
- Altura da barra: 1 cm



- Constante do material:  $k = 0.83333$
- Força aplicada :

$$\begin{cases} (0, -0.0009(x_1 - 1)) \text{ kN/cm}^2, & \text{se } x_2 = 1 \text{ e } x_1 \in ]1, 4[ \\ (0, 0), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Utilizamos,

- Distância da superfície rígida:  $d = 0.1 \text{ cm}$
- Variável de projeto:  $\chi \in \Theta = \{\chi \in R \mid -0.1 \leq \chi \leq 0.1\}$

A configuração da barra e a respectiva configuração de equilíbrio, solução do problema de contato, estão na Figura 5.8.

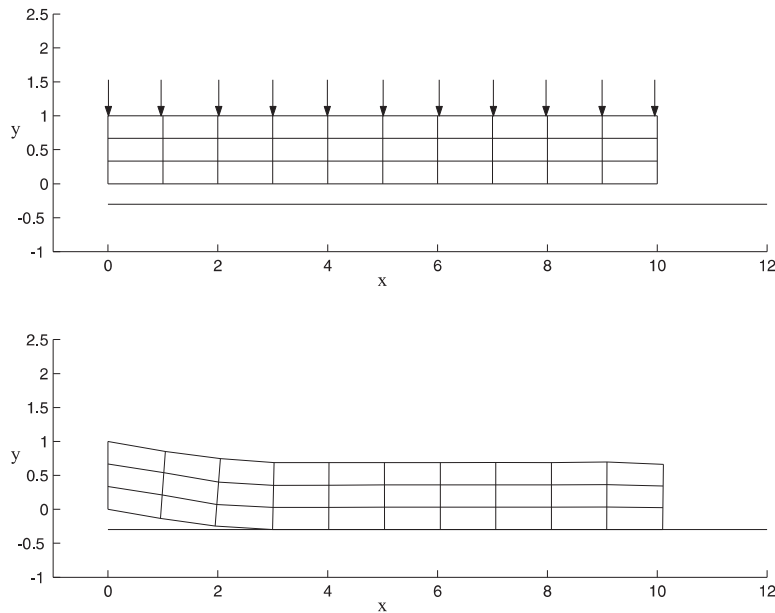


Figura 5.8: Configuração inicial e de equilíbrio da barra de material elasto plástico ( $F = -4.45 \times 10^{-1}$ )

A avaliação da função objetivo exige o cálculo de uma integral sobre o domínio de cada elemento finito, o que foi feito através do método de aproximação numérica da Quadratura Gaussiana. Ver [17].

Utilizamos o Algoritmo 4.2 para resolver o problema em dois níveis (5.4.10) e o software MINOS [34] na resolução dos subproblemas das fases de minimização e otimização.

O resultado obtido como inclinação ótima corresponde ao limite superior da variável de projeto.

A Figura 5.9 representa a configuração ótima da barra e a respectiva configuração de equilíbrio.

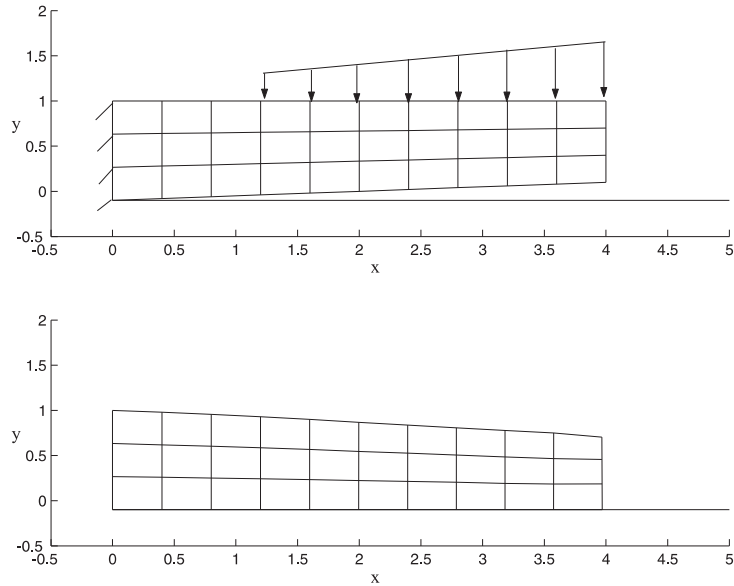


Figura 5.9: Configuração ótima e de equilíbrio da barra de material elasto plástico ( $F = -5.57 \times 10^{-1}$ )

Na Tabela 5.3 estão os deslocamentos dos nós da superfície de contato, para a configuração de equilíbrio. A primeira coluna representa o número do nó, de acordo com a Figura 5.3 e o par  $u_x, u_y$  representa os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente.

Na Tabela 5.4.1 e na Figura 5.10 estão os valores das tensões nos nós da superfície de contato, nas configurações inicial ( $\sigma^0$ ) e ótima ( $\sigma^*$ ).

### Exemplo 5.3. Barra constituída por borracha

Em materiais do tipo da borracha a relação entre tensão e deformação é não linear e é preciso acrescentar ao modelo a equação cinemática da incompressibilidade do material.

Portanto, na formulação do problema (5.4.9) para corpos de borracha, a função objetivo, que é caracterizada pela energia de deformação, é uma função não linear em relação às variáveis. Uma restrição não linear, que está associada ao material, é adicionada na descrição do conjunto viável.

A formulação da energia de deformação, proposta por Kikuchi [27], é descrita

Nó	$u_x$	$u_y$
1	0.00	0.00
5	$-1.02 \times 10^{-2}$	$-2.00 \times 10^{-2}$
9	$-3.21 \times 10^{-2}$	$-4.00 \times 10^{-2}$
13	$-5.99 \times 10^{-2}$	$-6.00 \times 10^{-2}$
17	$-8.96 \times 10^{-2}$	$-8.00 \times 10^{-2}$
21	$-1.20 \times 10^{-1}$	$-1.00 \times 10^{-1}$
25	$-1.51 \times 10^{-1}$	$-1.20 \times 10^{-1}$
29	$-1.82 \times 10^{-1}$	$-1.40 \times 10^{-1}$
33	$-2.14 \times 10^{-1}$	$-1.60 \times 10^{-1}$
37	$-2.48 \times 10^{-1}$	$-1.80 \times 10^{-1}$
41	$-2.82 \times 10^{-1}$	$-2.00 \times 10^{-1}$

Tabela 5.3: Deslocamentos no equilíbrio da barra de material elasto plástico

Nó	$\sigma^0$	$\sigma^*$
1	0.00	0.00
5	0.00	$4.60 \times 10^{-4}$
9	0.00	$2.66 \times 10^{-3}$
9	0.00	$6.11 \times 10^{-3}$
17	0.00	$1.10 \times 10^{-2}$
21	$2.74 \times 10^{-3}$	$1.68 \times 10^{-2}$
25	$1.95 \times 10^{-2}$	$2.32 \times 10^{-2}$
29	$3.13 \times 10^{-2}$	$2.99 \times 10^{-2}$
33	$4.16 \times 10^{-2}$	$3.61 \times 10^{-2}$
37	$5.05 \times 10^{-2}$	$3.72 \times 10^{-2}$
41	$2.71 \times 10^{-2}$	$9.99 \times 10^{-3}$

Tabela 5.4: Tensão na superfície de contato da barra contituída por material elasto-plástico

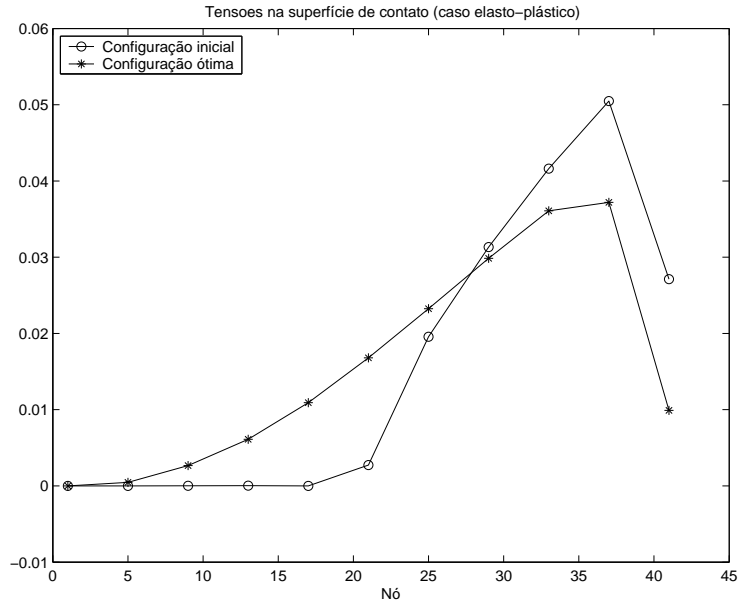


Figura 5.10: Tensões na superfície de contato da barra constituída por material elasto-plástico

em termos do tensor direito de deformação de Cauchy-Green e seus principais invariantes, dada por:

$$F(u) = \int_{\Omega} (c_1(I - 3) + c_2(II - 3)) d\Omega - L_{\Omega}(u) \quad (5.4.13)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes que dependem do material,  $L_{\Omega}(u)$  é dado pelo vetor das forças, como no caso linearmente elástico,

$$I = \text{tr}(C)$$

$$II = \frac{1}{2}(I^2 - \text{tr}(C^2))$$

$$III = \det C$$

onde

$$C_{IJ} = \delta_{IJ} + \delta_{iI}u_{i,J} + \delta_{jJ}u_{j,I} + u_{i,I}u_{i,J}$$

e

$$u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$$

O problema de Otimização de Forma para corpos de borracha pode ser escrito como o seguinte problema em dois níveis:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar}_{\chi, u} & F(\chi, u) \\ \text{s.a} & \left\{ \begin{array}{l} \chi \in \Theta \\ u = \underset{v}{\operatorname{argmin}} F(\chi, v) \\ \text{s.a} \left\{ \begin{array}{l} u \in K \\ III = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \quad (5.4.14)$$

onde  $K$  é o conjunto dos deslocamentos admissíveis,  $F(\chi, u)$  está descrito em (5.4.13) e  $\chi$  é variável de parametrização do domínio  $\Omega$ .

Na resolução do problema (5.4.14), para a barra foram utilizados os dados de [27]:

- Comprimento da barra: 10 cm
- Altura da barra : 0.3 cm
- Constantes do material:  $c_1 = 80$  e  $c_2 = 20$  psi

Utilizamos,

- Distância da superfície rígida:  $d = 0.1$  cm
- Força constante aplicada:  $-20$  kN/cm<sup>2</sup>
- Variável de projeto:  $\chi \in \Theta = \{\chi \in R \mid -0.3 \leq \chi \leq 0.3\}$

A configuração inicial da barra e a correspondente configuração de equilíbrio, estão na Figura 5.11.

A avaliação da função objetivo se faz como no caso anterior.

A discretização da restrição de incompressibilidade do material (dada pela equação  $III = 1$ ) foi determinada no ponto central de cada elemento finito, afim de evitar travamento numérico.

Utilizamos o Algoritmo 4.2 para resolver o problema em dois níveis (5.4.10) e o software MINOS [34] na resolução dos subproblemas das fases de minimização e otimização.

O resultado obtido como inclinação ótima obtida corresponde ao limite superior da variável de projeto.

A Figura 5.12 representa as configurações ótima da barra e de equilíbrio.

Na Tabela 5.5 estão os deslocamentos dos nós da superfície de contato, para a configuração de equilíbrio. A primeira coluna representa o número do nó, de acordo com a Figura 5.3 e o par  $u_x, u_y$  representa os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente.

Na Tabela 5.6 e na Figura 5.13 estão os valores das tensões nos nós da superfície de contato, nas configurações inicial ( $\sigma^0$ ) e ótima ( $\sigma^*$ ).

Nó	$u_x$	$u_y$
1	0.00	0.00
5	$-1.94 \times 10^{-2}$	$-6.00 \times 10^{-2}$
9	$-2.39 \times 10^{-2}$	$-1.20 \times 10^{-1}$
13	$-7.51 \times 10^{-1}$	$-1.80 \times 10^{-1}$
17	$7.05 \times 10^{-3}$	$-2.40 \times 10^{-1}$
21	$2.14 \times 10^{-2}$	$-3.00 \times 10^{-1}$
25	$3.54 \times 10^{-2}$	$-3.60 \times 10^{-1}$
29	$5.01 \times 10^{-2}$	$-4.20 \times 10^{-1}$
33	$6.52 \times 10^{-2}$	$-4.80 \times 10^{-1}$
37	$7.36 \times 10^{-2}$	$-5.40 \times 10^{-1}$
41	$9.50 \times 10^{-2}$	$-6.00 \times 10^{-1}$

Tabela 5.5: Deslocamentos no equilíbrio da barra de borracha

Nó	$\sigma^0$	$\sigma^*$
1	0.00	0.00
5	0.00	0.00
9	0.00	0.00
13	0.00	0.00
17	5.41	2.98
21	17.32	17.11
25	12.00	12.52
29	9.39	9.57
33	8.66	8.62
37	12.29	11.82
41	9.02	9.72

Tabela 5.6: Tensão na superfície de contato da viga de borracha

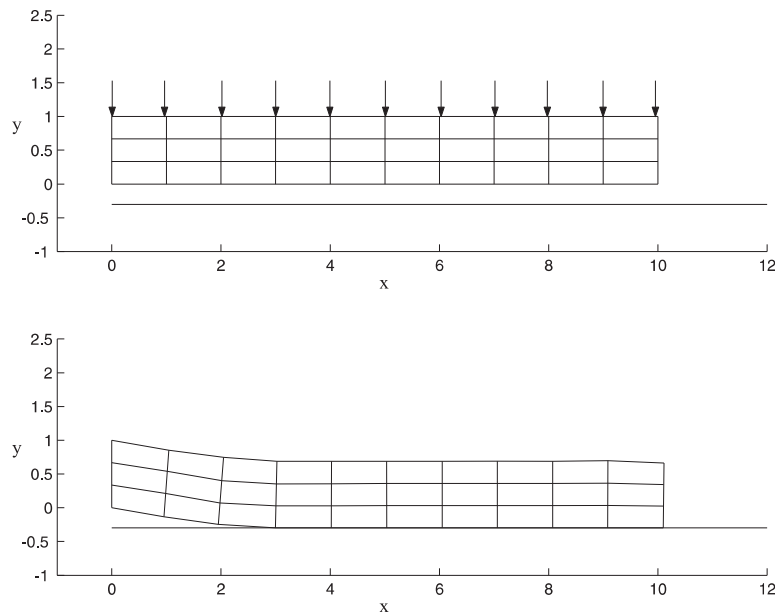


Figura 5.11: Configuração inicial e de equilíbrio da barra de borracha ( $F = -27.08$ )

## 5.5 Otimização Topológica em problemas de contato

O problema de Otimização Topológica consiste em determinar o volume e/ou a distribuição de material de um corpo, de modo a otimizar uma função custo, quando sujeito a forças externas e possivelmente contato.

O problema de otimização topológica pode ser descrito como em [7]:

$$\begin{aligned} & \underset{A}{\text{Minimizar}} && W(A, U(A)) \\ & \text{s.a} && g = V - \bar{V} \leq 0 \end{aligned} \tag{5.5.15}$$

onde  $A$  é a variável de projeto,  $W(A, U)$  e  $\bar{V}$  são a energia de deformação e o volume do sistema, respectivamente.  $\bar{V}$  é o volume máximo admitido e  $U$  é o vetor dos deslocamentos que resolve o problema de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \underset{U}{\text{Minimizar}} && W(A, U) - FU \\ & \text{s.a} && U \in K \end{aligned} \tag{5.5.16}$$

onde  $K$  é o conjunto de deslocamentos admissíveis para o problema de contato.

As variáveis do segundo nível são os deslocamentos  $U$ , obtidos na resolução do problema de equilíbrio. A formulação em dois níveis é :

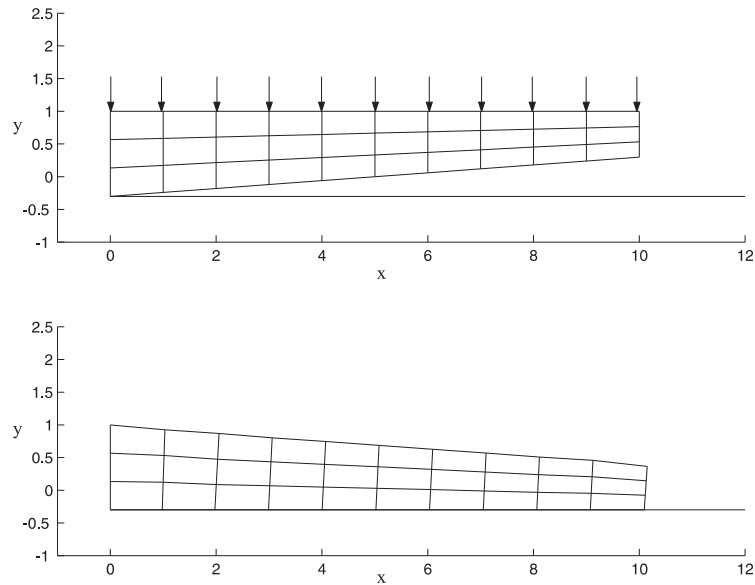


Figura 5.12: Configuração ótima e de equilíbrio da barra de borracha ( $F = -33.47$ )

$$\begin{aligned}
 & \underset{A,U}{\text{Minimizar}} && W(A,U) \\
 & \text{s.a} && \begin{cases} g = V - \bar{V} \leq 0 \\ U = \underset{U}{\text{argmin}} W(A,U) - FU \\ \text{s.a} & U \in K \end{cases} \quad (5.5.17)
 \end{aligned}$$

### 5.5.1 Um sistema de treliças

Um exemplo de problema de Otimização Topológica é o sistema de treliça composto por nove barras, cada uma com comprimento  $l_i$  e espessura  $A_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ), sujeito a cargas externas  $P1$  e  $P6$ , conforme a figura 5.14.

Assumimos que os deslocamentos nos nós 1 e 2 são apenas verticais e que existem três superfícies rígidas localizadas a distâncias  $sp_1$ ,  $sp_2$ ,  $sp_3$  dos nós 3, 5 e 6 respectivamente.

O problema de otimização estrutural da treliça pode ser formulado como o seguinte problema em dois níveis:

$$\begin{aligned}
 & \underset{A,U}{\text{Minimizar}} && W(A,U) \\
 & \text{s. a} && \begin{cases} V(A) - \bar{V} \leq 0 \\ u = \underset{U}{\text{argmin}} W_\alpha(A,U) - P^T U \\ \text{s.a} & U \in K \end{cases} \quad (5.5.18)
 \end{aligned}$$



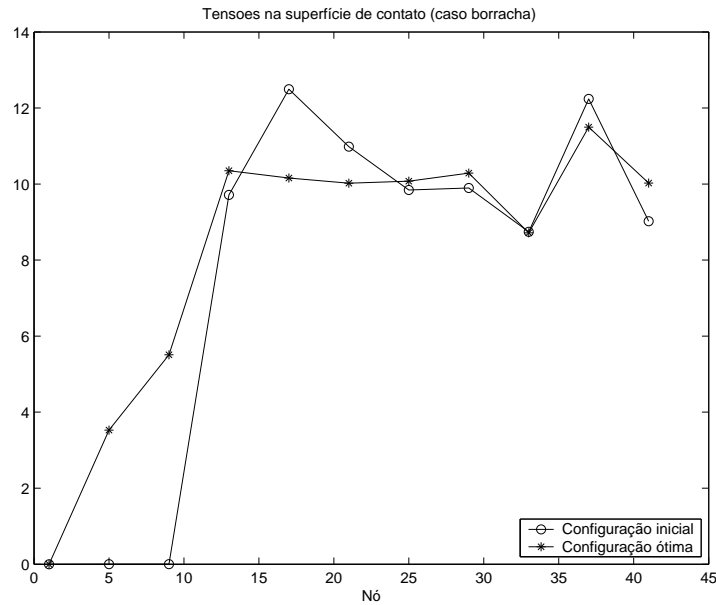


Figura 5.13: Tensões na superfície de contato da viga de borracha

onde  $U \in \mathbb{R}^{12}$  é o vetor dos deslocamentos,  $V$  é o volume total das barras,  $\bar{V}$  é o volume máximo permitido e  $K = \{U \in \mathbb{R}^{12} | u_6 \geq sp_1, u_{10} \geq sp_2 \text{ and } u_{12} \leq sp_3\}$  é o conjunto de deslocamentos admissíveis e  $P$  é o vetor das cargas.

Consideramos como função objetivo  $W(A, U) = \sum_{i=1}^9 w_i$ , a energia de deformação em materiais linearmente elásticos.

Estudamos quatro situações diferentes do problema, variando os pontos de aplicação e os valores das cargas e as posições das superfícies rígidas.

Em todos os casos utilizamos os seguintes dados para as barras:

- Espessura máxima de cada barra:  $A_i = 4\text{mm}$  ( $i = 1, \dots, 9$ );
- $l_i = 200\text{mm}$  para barras horizontais ( $i = 2, 4, 6, 8$ ) e verticais ( $i = 1, 5, 9$ ) e  $l_i = 200\sqrt{2}\text{mm}$  para barras diagonais ( $i = 3, 7$ );
- $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ;
- Volume total máximo  $\bar{V} = 25\%$  do volume completo, com todas as barras assumindo sua espessura máxima.
- Distância máxima dos obstáculos = 2 mm, (considerando que a base da treliça coincide com o eixo  $x$ ,  $sp_1 < 0$ ,  $sp_2 < 0$  e  $sp_3 > 0$ ).

**Exemplo 5.4. Maximização da rigidez de um sistema de treliça**

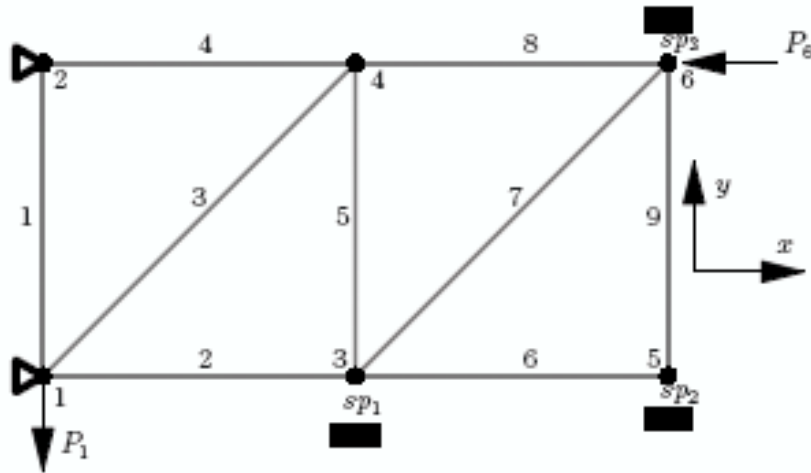


Figura 5.14: Configuração do sistema de treliça com nove barras

Iteração	Energia de deformação
Inicial (0)	0.00
Final (20)	6.39

Tabela 5.7: Função objetivo do primeiro nível - exemplo 5.4

Consideramos que há apenas a carga vertical  $P_1 = -100\text{N}$  aplicada sobre a treliça no nó 1. As superfícies rígidas estão distantes  $sp_1 = 0\text{mm}$ ,  $sp_2 = 0\text{mm}$  e  $sp_3 = 0\text{mm}$  dos nós 3, 4 e 5 respectivamente.

Utilizamos o Algoritmo 4.2 para resolver o problema em dois níveis (5.4.10) e o software MINOS [34] na resolução dos subproblemas das fases de minimização e otimização.

A estrutura ótima obtida é apresentada na figura 5.15. As barras em preto correspondem às barras que se mantêm na estrutura final. As barras tracejadas são as originais nas posições iniciais. Observamos que o volume máximo é atingido.

Na tabela 5.7 estão os valores da energia de deformação nas configurações inicial e ótima da treliça. As espessuras das barras na configuração ótima estão apresentadas na tabela 5.8 e os deslocamentos dos nós estão na tabela 5.9.

### Exemplo 5.5. Maximização da rigidez de um sistema de treliça

Consideramos que há apenas a carga vertical  $P_1 = -100\text{N}$  aplicada no nó 1 da treliça e que as superfícies rígidas estão distantes  $sp_1 = -1\text{mm}$ ,  $sp_2 = 0\text{mm}$  e  $sp_3 = 0\text{mm}$  dos nós 3, 4 e 5 respectivamente.

Utilizamos o Algoritmo 4.2 para resolver o problema em dois níveis (5.4.10) e o software MINOS [34] na resolução dos subproblemas das fases de minimização e

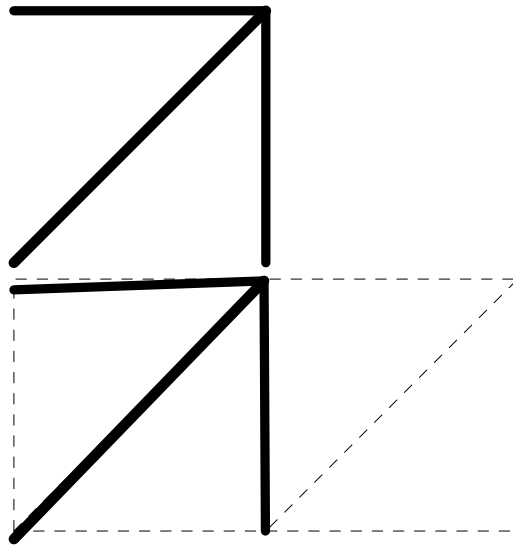


Figura 5.15: Configuração ótima e equilíbrio - exemplo 5.4

otimização.

A estrutura ótima obtida é apresentada na figura 5.16 (esquerda). As barras em preto correspondem às barras que se mantêm na estrutura final. As barras tracejadas são as originais nas posições iniciais. Observamos que o volume máximo é atingido.

Na tabela 5.10 estão os valores da energia de deformação nas configurações inicial e ótima da treliça. As espessuras das barras na configuração ótima estão apresentadas na tabela 5.11 e os deslocamentos dos nós estão na tabela 5.12.

#### Exemplo 5.6. Maximização da rigidez de um sistema de treliça

Barra $i$	$A_i$
1	0.00
2	$1.22 \times 10^{-7}$
3	4.00
4	3.50
5	3.50
6	0.00
7	$1.57 \times 10^{-7}$
8	$9.89 \times 10^{-8}$
9	0.00

Tabela 5.8: Espessuras das barras - exemplo 5.4

Node	$u_x = u_{2i-1}$	$u_y = u_{2i}$
1	0.00	$-1.28 \times 10^{-1}$
2	0.00	$-1.71 \times 10^{-1}$
3	$-6.44 \times 10^{-3}$	0.00
4	$-2.86 \times 10^{-2}$	$-2.86 \times 10^{-2}$
5	$-9.24 \times 10^{-3}$	$1.54 \times 10^{-3}$
6	$-2.06 \times 10^{-2}$	0.00

Tabela 5.9: Deslocamentos nos nós - exemplo 5.4

Iteração	Energia de deformação
Inicial (0)	0.000
Final (8)	39.50

Tabela 5.10: Função objetivo do primeiro nível - exemplo 5.5

Barra $i$	$A_i$
1	0.00
2	1.27
3	1.79
4	2.53
5	1.27
6	0.00
7	1.79
8	1.27
9	1.27

Tabela 5.11: Espessuras das barras - exemplo 5.5

Node	$u_x = u_{2i-1}$	$u_y = u_{2i}$
1	0.00	$-7.90 \times 10^{-1}$
2	0.00	$-7.81 \times 10^{-1}$
3	$7.9 \times 10^{-2}$	$-4.74 \times 10^{-1}$
4	$-7.9 \times 10^{-2}$	$-5.53 \times 10^{-1}$
5	$8.98 \times 10^{-2}$	0.00
6	$-1.58 \times 10^{-1}$	$-7.90 \times 10^{-2}$

Tabela 5.12: Deslocamentos nos nós - exemplo 5.5

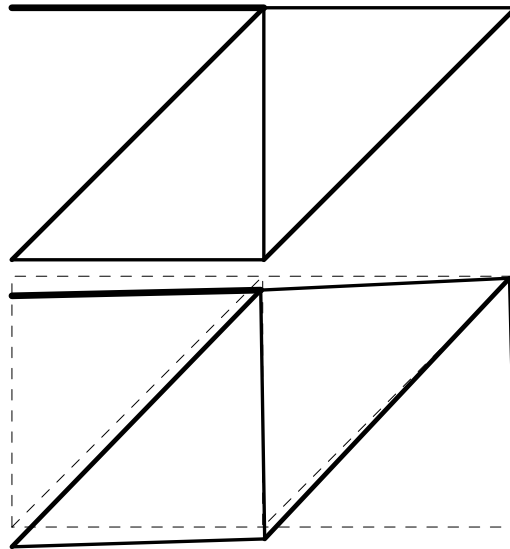


Figura 5.16: Configuração ótima e equilíbrio - exemplo 5.5

Iteração	Energia de deformação
Inicial (0)	0.000
Final (18)	32.00

Tabela 5.13: Função Objetivo do primeiro nível - exemplo 5.6

Consideramos que há apenas a carga  $P1 = +100N$  aplicada no nó 1 e que as superfícies rígidas estão distantes  $sp_1 = -1$ ,  $sp_2 = 0$ ,  $sp_3 = 1$  dos nós 3, 4 e 5 respectivamente.

Utilizamos o Algoritmo 4.2 para resolver o problema em dois níveis (5.4.10) e o software MINOS [34] na resolução dos subproblemas das fases de minimização e otimização.

A estrutura ótima obtida é apresentada na figura 5.17. As barras em preto correspondem às barras que se mantém na estrutura final. As barras tracejadas são as originais nas posições iniciais. Observamos que o volume máximo é atingido.

Na tabela 5.13 estão os valores da energia de deformação nas configurações inicial e ótima da treliça. As espessuras das barras na configuração ótima estão apresentadas na tabela ?? e os deslocamentos dos nós estão na tabela 5.15.

### Exemplo 5.7. Maximização da rigidez de um sistema de treliça

Consideramos que há cargas  $P1 = +100N$  e  $P6 = -100N$ , aplicadas no nós 1 e 6 respectivamente, e que as superfícies rígidas estão distantes  $sp_1 = 0mm$ ,  $sp_2 = 0mm$  e  $sp_3 = 0mm$  dos nós 3, 4 e 5, respectivamente.

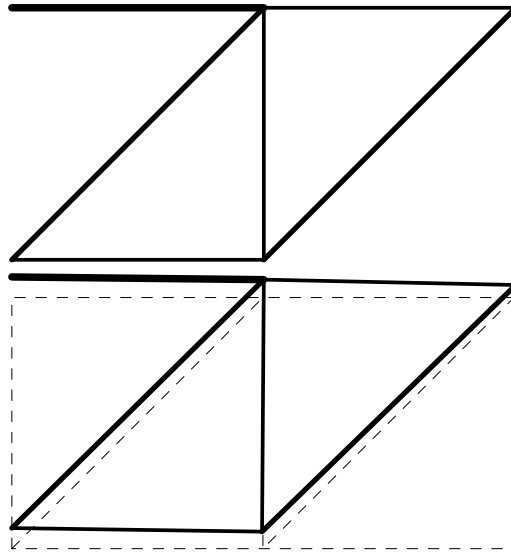


Figura 5.17: Configuração ótima e equilíbrio - exemplo 5.6

Utilizamos o Algoritmo 4.2 para resolver o problema em dois níveis (5.4.10) e o software MINOS [34] na resolução dos subproblemas das fases de minimização e otimização.

A estrutura ótima obtida é apresentada na figura 5.18. As barras em preto correspondem às barras que se mantêm na estrutura final. As barras tracejadas são as originais nas posições iniciais. Observamos que o volume máximo é atingido.

Na tabela 5.16 estão os valores da energia de deformação nas configurações inicial e ótima da treliça. As espessuras das barras na configuração ótima estão apresentadas na tabela 5.17 e os deslocamentos dos nós estão na tabela 5.18.

Barras $i$	$A_i$
1	0.00
2	1.41
3	1.99
4	2.81
5	1.41
6	0.00
7	1.99
8	1.41
9	0.00

Tabela 5.14: Espessuras das barras - exemplo 5.6

Node	$u_x = u_{2i-1}$	$u_y = u_{2i}$
1	0.00	1.64
2	0.00	1.64
3	$-7.12 \times 10^{-2}$	1.36
4	$7.12 \times 10^{-2}$	1.43
5	$-7.00 \times 10^{-2}$	1.00
6	$1.42 \times 10^{-1}$	1.00

Tabela 5.15: Deslocamentos dos nós - exemplo 5.6

Iteração	Energia de deformação
Inicial (0)	0.00
Final (11)	14.24

Tabela 5.16: Função Objetivo do primeiro nível - exemplo 5.7

Barras $i$	$A_i$
1	0.00
2	0.00
3	3.06
4	4.00
5	2.16
6	0.00
7	0.00
8	2.16
9	0.00

Tabela 5.17: Espessuras das barras - exemplo 5.6

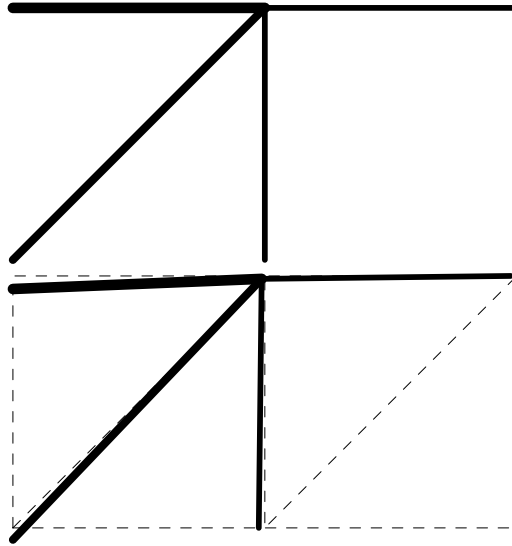


Figura 5.18: Configuração ótima e equilíbrio - exemplo 5.7

Node	$u_x = u_{2i-1}$	$u_y = u_{2i}$
1	0.00	$-1.88 \times 10^{-1}$
2	0.00	$-2.07 \times 10^{-1}$
3	$-9.62 \times 10^{-2}$	0.00
4	$-4.99 \times 10^{-2}$	$-4.62 \times 10^{-2}$
5	$-1.97 \times 10^{-2}$	$1.54 \times 10^{-3}$
6	$-9.62 \times 10^{-2}$	0.00

Tabela 5.18: Deslocamentos dos nós - exemplo 5.6



# Bibliografia

- [1] A. E. Assan, "Método dos Elementos Finitos - Primeiros Passos", Editora da Unicamp, Campinas, 1999.
- [2] R. Andreani e J.M. Martínez, On the Solution of Mathematical Programming Problems with Equilibrium Constraints using Nonlinear Programming Algorithms, *Mathematical Methods of Operations Research*, **54** (2001), 345–358.
- [3] J.F. Bard, "Practical Bilevel Optimization - Algorithms and Applications", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1998.
- [4] J. F. Bard e J.E. Falks, An Explicit Solution to the Multi-Level Programming Problem, *Comput and Ops. Res.*, **9** (1982), 77–100.
- [5] M. P. Bendsoe, "Optimization of Structural Topology, Shape, and Material", Springer-Verlag, Germany, 1995.
- [6] M. O. Bendsoe e O. Sigmund, "Topology Optimization Theory - Methods and Applications", Springer-Verlag, Germany, 2003.
- [7] A. Ben-Tal e A. Nemirovski, "Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications", MPS/SIAM Series on Optimization, SIAM Press, 2001.
- [8] E. G. Birgin e J. M. Martínez, Large-Scale Active-Set Box-Constrained Optimization Method with Spectral Projected Gradients, *Computational Optimization and Applications*, **23** (2002), 101–125.
- [9] A. Brook, D. Kendrick e A. Meeraus, "GAMS: A User's Guide", The Scientific Press, South San Francisco, CA., 1988.
- [10] M. Campêlo, "Programação Linear em Dois Níveis: Uma Abordagem Teórica e Computacional", Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1999.
- [11] A. Capsoni e L. Corradi, "A Finite Element Formulation for Rigid-Plastic Limit Analysis of Plates", em D. R. J. Owen, E. Onate, E. Hinton, eds., *Computational Plasticity - Fundamentals and Applications. Proc. 5th Int. Conf.*, Barcelona, 1997, CIMNE, Barcelona, 1865–1872, 1997.

- [12] S. L. C. Castro, "Técnica de Restauração Inexata aplicada à resolução de Problemas de Programação Matemática em Dois Níveis", Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.
- [13] S. L. C. Castro e A. Friedlander, "Algoritmo de restauração inexata aplicado à resolução de problemas de programação matemática em dois níveis", Relatório Técnico, 2004.
- [14] S. L. C. Castro, E. A. Fancello, A. Friedlander and S. A. Santos, "Computational experiments with inexact restoration techniques to solve topological optimization problems with unilateral boundary conditions", Relatório Técnico, 2006.
- [15] P. A. Clark e A. W. Westerberg, Bilevel Programming for Steady-State Chemical Process Design-I. Fundamentals and Algorithms, *Computers Chem. Engng*, **14** (1990), 87–97.
- [16] M. A. Crisfield, "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", vol. 2: Advanced Topics, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England, 2001.
- [17] S. D. Conte e C. de Boor, "Elementary Numerical Analysis", McGraw-Hill International Editions, 1981.
- [18] S. Dempe, "Foundations of Bilevel Programming", Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2002.
- [19] S. Dempe, Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Problems with equilibrium Constraints, *Optimization* (2003), 333–359.
- [20] S. Dempe, "Bilevel Programming - A survey", Technical Report TU 2003-11, Bergakademie Freiberg, 2003.
- [21] J. E. Falk e J. Liu, On Bilevel Programming, Part I: General Nonlinear Cases, *Mathematical Programming*, **70** (1995), 47–72.
- [22] E. A. Fancello e R. A. Feijóo, Shape Optimization in Frictionless Contact Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37** (1994), 2311–2335.
- [23] A. V. Fiacco, "Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming", Academic Press, New York, 1983.
- [24] R. Fletcher, S. Leyffer, D. Ralph, and S. Scholtes, "Local convergence of SQP methods for mathematical programs with equilibrium constraints", *SIAM Journal on Optimization*, 17(1), 259–286, 2006.
- [25] A. Friedlander, J. M. Martínez e S. A. Santos, A new trust region algorithm for bound constrained minimization, *Applied Mathematics and Optimization*, **30** (1994), 235–266.

- [26] J. Haslinger e R. A. E. Makinen, "Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation", SIAM, 2003.
- [27] N. Kikuchi e J. T. Oden, "Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods", SIAM, Philadelphia, 1988.
- [28] P. Marcotte e D. Zhu, Exact and Inexact Penalty Methods for the Generalized Bilevel Programming Problem, *Mathematical Programming*, **74** (1996), 141–157.
- [29] J. M. Martínez, Inexact-Restoration Method with Lagrangian Tangent Decrease and New Merit Function for Nonlinear Programming, *JOTA*, **111** (2001), 39–58.
- [30] J. M. Martínez, Two-Phase Model Algorithm with Global Convergence for Nonlinear Programming, *JOTA*, **96-2** (1998), 397–436.
- [31] J. M. Martínez e E. A. Pilotta, Inexact-Restoration Algorithm for Constrained Optimization, *JOTA*, **104(1)** (2000), 135–163.
- [32] J. M. Martínez e E. A. Pilotta, "Inexact Restoration Methods for Nonlinear Programming: Advances and Perspectives", Optimization and Control with applications, edited by L.Q.Qi, K.L.Teo and X.Q.Yang. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [33] J. M. Martínez e B.F. Svaiter, A practical Optimality Condition without Constraint Qualifications for Nonlinear Programming, *JOTA*, **118** (2003), 117–133.
- [34] B. A. Murtagh e M.A. Saunders, "MINOS 5.4 User's Guide", Technical Report SOL 83-20, Stanford University, 1995.
- [35] J. S. Przemieniecki, "Theory of Matrix Structural Analysis", Dover, 1985.
- [36] K. Shimizu, Y. Ishizuka e J. F. Bard, "Nondifferentiable and Two-Level Mathematical Programming", Kluwer Academic Press, Boston, 1997.
- [37] J. Sokolowski e J. P. Zolesio, "Introduction to Shape Optimization - Shape Sensitivity Analysis", Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [38] G. Strang e G. J. Fix, "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice Hall Inc., 1973.
- [39] L. N. Vicente, "Programação de Dois Níveis", Tese de Mestrado, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 1992.
- [40] L. N. Vicente e P. H. Calamai, "Geometry and Local Optimality Conditions for Bilevel Programs with Quadratic Strictly Convex Lower Levels", Nonconvex Optimization and its Applications, 4, 141–151, Kluwer Academic Publishers, (Report available at FTP: dial.uwaterloo.ca), 1995.

- [41] L. N. Vicente, "Bilevel Programming: Introduction, History and Overview", Report available at FTP: dial.uwaterloo.ca, 1994.
- [42] L. N. Vicente e P.H. Calamai, Bilevel and Multilevel Programming. A Bibliography Review, *Journal of Global Optimization*, **5** (1995), 291–306.

## NOTAS EM MATEMÁTICA APLICADA

1. Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia  
Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberty
2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos  
Leandro dos Santos Coelho
3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas  
Edson Wendlander
4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais  
Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher
5. Modelagem em Biomatemática  
Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello Courtoque Guedes
6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e “simulated annealing”  
Sezimária F. Pereira Saramago
7. “Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia”  
H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga
8. Uma Introdução à Computação Quântica  
Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho e Nelson Maculan
9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados  
Dr. Homero Chaib Filho, Embrapa
10. Modelos Matemáticos baseados em autómatos celulares para Geoprocessamento  
Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábila Amorim da Costa, Graçaliz Pereira  
Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa

11. Computabilidade: os limites da Computação  
Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal
12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas  
Fernando Rochinha e Alexandre Madureira
13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)
  - 1 - “Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações”  
Reynaldo D. Pinto
  - 2 - “Redes complexas e aplicações nas Ciências”  
José Carlos M. Mombach
  - 3 - “Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos”  
Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo-Machado
14. A lógica na construção dos argumentos  
Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura
15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos  
Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara
16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio  
Marcilia Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima
17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações  
Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros, Rodney Carlos Bassanezi
18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira  
Socorro Rangel
19. Observar e Pensar, antes de Modelar  
Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho, Amauri P. de Oliveira
20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações  
Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali
21. Uma Introdução à Teoria de Códigos  
Carlile Campos Lavor, Marcelo Muniz Silva Alves, Rogério Monteiro de Siqueira, Sueli Irene Rodrigues Costa

22. Análise e Processamento de Sinais  
Rubens Sampaio, Edson Cataldo, Alexandre de Souza Brandão
23. Introdução aos Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e EDP  
David Soares Pinto Júnior
24. Representações Computacionais de Grafos  
Lílian Markenзон, Oswaldo Vernet
25. Ondas Oceânicas de Superfície  
Leandro Farina
26. Técnicas de Modelagem de Processos Epidêmicos e Evolucionários  
Domingos Alves, Henrique Fabrício Gagliardi