Notas em Matemática Aplicada e-ISSN 2236-5915

Volume 32, 2012

Editado por

Eliana X.L. de Andrade
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Rubens Sampaio
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro -
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Geraldo N. Silva
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/notas.php

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2012

SEMIGRUPOS APLICADOS A SISTEMAS DISSIPATIVOS EM EDP

Carlos Alberto Raposo da Cunha
raposo@ufsj.edu.br

Departamento de Matemática
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

SBMAC Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Sandra Augusta Santos

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Cunha, Carlos Alberto Raposo da
Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos em EDP
- São Carlos, SP : SBMAC, 2012, 79 p.; 20,5cm
- (Notas em Matemática Aplicada; v. 32)

e-ISBN 978-85-86883-94-1

1. Semigrupos. 2. Sistemas Dissipativos.
3. Estabilidade Exponencial.
I. Cunha, Carlos Alberto Raposo. II. Título. III. Série

CDD - 51

Esta é uma republicação em formato de e-book do livro original do mesmo título publicado em 2007 nesta mesma série pela SBMAC.

À minha família.
Dedico

Agradecimentos

Este trabalho teve sua origem a partir de um curso oferecido pelo Professor Jaime Rivera em 2001, no IM/UFRJ. Na oportunidade estudamos o sistema termoelástico.

Ao longo destes anos tenho aplicado este método a outros modelos dissipativos, obtendo sempre bons resultados. Neste sentido expresso meu agradecimento ao Professor Jaime E. Muñoz Rivera.

Às demais pessoas que contribuíram de diferentes formas para a a realização deste trabalho, em especial aos alunos da UFSJ e colegas do Departamento de Matemática.

À minha esposa Cibele que sempre me apoiou e aos meus filhos Lucas e Alice fonte inesgotável de alegria e inspiração.

A CAPES pela bolsa concedida durante parte da realização deste trabalho e a FAPEMIG que sempre tem apoiado meus projetos de pesquisa em Minas Gerais.

Conteúdo

Prefácio

O estudo do comportamento assintótico de sistemas dissipativos é um ramo fértil para a pesquisa em Equações Diferenciais Parciais - EDP. Nesse sentido, algumas técnicas analíticas para obter o decaimento foram utilizadas por vários autores, sempre adequadas aos problemas em questão. Por exemplo, o método de Kormonik (ver V. Kormonik [06]), método de Nakau (ver M. Nakao [09]) e o método de Energia (ver J. Rivera [13]).

Nosso objetivo neste trabalho é utilizar um método recentemente introduzido na literatura (ver Z. Liu e S. Zheng [08]) e que se aplica a uma variedade de problemas dissipativos. Esse método, poderoso e simples, é diferente dos demais métodos atualmentes utilizados e consiste em explorar as propriedades dissipativas do Semigrupo associado ao sistema.

Para motivar a aplicabilidade do método, consideremos o modelo matemático que descreve as pequenas vibrações verticais de uma corda de comprimento finito L e presa nas extremidades.

Suponhamos que, em estado de equilíbrio, a corda repouse sobre o eixo dos x e cada elemento da corda se desloque perpendicular a esse eixo. Representamos por $u(x,t)$ o deslocamento de cada ponto $x \in (0,L)$ da corda no instante $t \geq 0$, a partir de sua posição de equilíbrio.

Nessa condição, temos o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \\ u_t(x,0) &= u_1(x), \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação de onda por u_t e integrando por partes em $(0,L)$, é fácil deduzir a energia total desse modelo, a qual denotamos por $E(t)$, onde a primeira parcela é a energia cinética e a segunda parcela é a energia potencial

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |u_t|^2 + |u_x|^2 \, dx.$$

Agora, observamos que a equação de onda acima descrita é um modelo conservativo, isto é, a energia total $E(t)$ é constante. Acontece que em situação real, esse modelo se estabiliza em razão de diversos fatores, tais como: o atrito, a viscosidade, a diferença de temperatura entre o meio ambiente e o material, etc.

Ao longo do tempo, diversos autores introduziram diferentes tipos de mecanismos de dissipação para estabilizar as oscilações. Nesse sentido, temos a dissipação provocada pelo atrito representado por αu_t, onde α é uma constante real positiva (ver E. Zuazua e A. Haraux [22]). Observamos que nesse caso o atrito αu_t atua uniforme em todo o material; entretanto, constitui-se um problema interessante considerarmos a dissipação localmente distribuída, isto é, a dissipação do tipo $\alpha(x)u_t$ (ver E. Zuazua [21]). Quando a dissipação ocorre em razão da troca de temperatura entre o material e o meio ambiente, temos o sistema termoelástico (ver J. Rivera [13]). Há ainda a possibilidade do material constitutivo possuir a propriedade de recuperar sua posição inicial em razão da viscosidade; nesse caso, a dissipação é do tipo memória (ver J. Rivera [02]).

Outro modelo interessante, muito utilizado em estruturas mecânicas, é o sistema acoplado de ondas conhecido como vigas de Timoshenko. Para esse modelo, iremos considerar o caso em que o atrito atua de modo natural tanto no ângulo de rotação dos filamentos quanto nas vibrações transversais da viga (ver C. A. Raposo [12]). Também analizaremos a situação com dissipação localizada.

Para sistemas dissipativos, estamos interessados em obter uma estimativa para o funcional de energia, $E(t)$, do seguinte tipo:

$$E(t) \leq CE(0)e^{-wt}, \quad \forall t \geq 0,$$

ou, equivalentemente, estabelecer a estabilidade exponencial

$$\|\mathbf{S}(t)\| \leq Ce^{-wt}, \quad \forall t \geq 0,$$

do Semigrupo dissipativo $\mathbf{S}(t)$ gerado pelo sistema.

Neste trabalho, estudaremos a existência, unicidade e estabilidade de solução, através da teoria de semigrupos. Utilizaremos a notação usual dos espaços de Sobolev (ver R. A. Adams [01]). Esperamos que, ao final, o leitor tenha compreendido o método e possa aplicá-lo com sucesso a outros sistemas dissipativos em EDP.

São João del-Rei, 17 de abril de 2007.

Carlos Alberto Raposo da Cunha

Capítulo 1

Semigrupos

1.1 Aspectos Básicos

A exponencial e^{tA}, onde A é um número real e t uma variável real, é definida pela fórmula

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{1.1.1}$$

A série que figura no segundo membro da equação anterior converge para todos os valores reais de t e define uma função em $\mathbb{R}$.

Sem dificuldade alguma, mostra-se que essa definição se estende ao caso em que A é um operador linear limitado de um Espaço de Banach X.

Nesse caso, a série que aparece em (1.1.1) converge na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X) =$ *álgebra dos operadores lineares limitados de* X e, portanto, para cada $t \in \mathbb{R}$, sua soma é um operador limitado desse espaço.

Problema bastante delicado, porém, é definir a "função exponencial" quando A é não limitado. Uma das razões de interesse em tal função é que, formalmente, ela é solução do seguinte problema de Cauchy:

Dado um operador linear não-limitado A, de um Espaço de Banach X, determinar uma função $\mathbf{U}(t) = e^{tA}\mathbf{U}_0$, definida em $\mathbb{R}^+$, com domínio $D(A)$ e que satisfaça as seguintes equações

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t - A\mathbf{U} = 0, \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0. \end{cases}$$

Nesse sentido, temos a seguinte definição:

Definição 1.1. *Seja $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de um espaço de Banach X. Dizemos que uma aplicação $\mathbf{S} : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X, quando:*

1. $\mathbf{S}(0) = I$, *onde I é o operador identidade de X,*
2. $\mathbf{S}(t+s) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}(s)$, *para todo $s, t \in \mathbb{R}^+$.*

Dizemos que o semigupo $\mathbf{S}$ é de classe $\mathcal{C}_0$ se

$$\lim_{t\to 0^+} ||(\mathbf{S}(t) - I)x|| = 0, \ \forall x \in X.$$

Dizemos que o semigrupo $\mathbf{S}$ é de contração, quando $||\mathbf{S}|| < 1$.

Definição 1.2. *O operador $A : D(A) \longrightarrow X$, definido por*

$$A(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{S}(h) - I}{h} x, \ \textit{para todo } x \in D(A),$$

onde $D(A)$, o domínio de A, é dado por:

$$D(A) = \left\{ x \in X : \ \textit{existe o limite } \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{S}(h) - I}{h} x \right\},$$

é dito o gerador infinitesimal do semigrupo $\mathbf{S}$.

Quando A é o gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0-$semigrupo $\mathbf{S}$, denotamos $\mathbf{S} = e^{At}$.

Temos a seguinte propriedade:

Propriedade 1.1. *O conjunto $D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.*

Demonstração. Conseqüência imediata da Definição 1.2. □

Uma estimativa para o $\mathcal{C}_0-$semigrupo $\mathbf{S}(t)$ é dada pela propriedade abaixo:

Propriedade 1.2. *Existe $M \geq 1$ tal que*

$$||\mathbf{S}(t)|| \leq M\, e^{w\, t} \ \textit{ para todo } \ t \geq 0 \ \textit{ sendo } w \textit{ uma constante positiva.}$$

Demonstração. Existe $\delta > 0$ tal que $||\mathbf{S}(t)||$ é limitada em $[0, \delta]$, posto que, do contrário, existiria uma seqüência $t_n \to 0^+$, tal que $||\mathbf{S}(t_n)|| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e do teorema da limitação uniforme existiria ao menos um $x \in X$ tal que $||\mathbf{S}(t_n)\, x|| \geq n$ e isso contraria a definição de $\mathbf{S}(t)$ ser um C_0- semigrupo. Logo, $||\mathbf{S}(t)|| \leq M$ para todo $t \in [0, \delta]$ e como $||\mathbf{S}(0)|| = 1$, segue que $M \geq 1$. Agora, note que, dado $t > 0$ pelo algorítimo de Euclides, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = n\delta + r$, onde $0 \leq r \leq \delta$. Temos então,

$$\begin{aligned} ||\mathbf{S}(t)|| &= ||\mathbf{S}(n\delta + r)|| \\ &= ||\mathbf{S}(n\delta)||\, ||\mathbf{S}(r)||. \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade de semigrupo $\mathbf{S}(t+s) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}(s)$, temos que

$$\begin{aligned} ||\mathbf{S}(t)|| &= ||\mathbf{S}(\delta)||^n \, ||\mathbf{S}(r)|| \\ &\leq M^n \, M. \end{aligned}$$

Observamos que $t = n\delta + r$ implica que $n \leq \frac{t}{\delta}$ e, portanto,

$$||\mathbf{S}(t)|| \quad \leq \quad M^{\frac{t}{\delta}} \, M = e^{\frac{t}{\delta} \, \ln \, M} \, M = M \, e^{tw}, \;\; \text{onde} \;\; w = \frac{1}{\delta} \ln \, M.$$

□

Consideremos agora a seguinte propriedade:

Propriedade 1.3. *Seja A o gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0-$semigrupo $\mathbf{S}(t)$. Se $x \in D(A)$ então:*

(i) $\mathbf{S}^{'}(t)x = A\,\mathbf{S}(t)x$,

(ii) $\mathbf{S}(t)x \in C^0([0,\infty) : D(A)) \cap C^1([0,\infty) : X)$

Demonstração. Prova de (i): Para $x \in D(A)$, temos por um lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{'}_{+}(t) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbf{S}(t+h)x - \mathbf{S}(t)x}{h} \\ &= \mathbf{S}(t) \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbf{S}(h)x - x}{h} = \mathbf{S}(t)\, Ax = A\,\mathbf{S}(t)x, \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{'}_{-}(t) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbf{S}(t-h)x - \mathbf{S}(t)x}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbf{S}(t-h)x - \mathbf{S}(t-h+h)x}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \mathbf{S}(t-h) \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbf{S}(h)x - x}{h} \\ &= \mathbf{S}(t)\, Ax = A\,\mathbf{S}(t)x, \end{aligned}$$

de onde segue $\mathbf{S}^{'}(t)x = A\,\mathbf{S}(t)x$.

Prova de (ii): É fácil ver que as aplicações

$$t \to \mathbf{S}(t)x \in C^0([0,\infty) : X)$$

e

$$t \to \mathbf{S}^{'}(t)x \in C^0([0,\infty) : X),$$

logo

$$t \to \mathbf{S}(t)x \in C^1([0,\infty) : X).$$

Note que $\mathbf{S}(t)x \in D(A)$ e, portanto, $\mathbf{S}(t)x \in C^0([0,\infty) : D(A))$, logo,

$$\mathbf{S}(t)x \in C^0([0,\infty) : D(A)) \cap C^1([0,\infty) : X).$$

□

Consideremos agora a seguinte propriedade sobre o gerador infinitesimal.

Propriedade 1.4. *Se $\mathbf{S}_1(t)$ e $\mathbf{S}_2(t)$ possuem o mesmo gerador infinitesimal A, então $\mathbf{S}_1(t) = \mathbf{S}_2(t)$.*

Demonstração. Consideremos a função $F(s) = \mathbf{S}_1(t-s)\mathbf{S}_2(s)$. Então,

$$\begin{aligned} F^{'}(s) &= -A\,\mathbf{S}_1(t-s)\mathbf{S}_2(s) + \mathbf{S}_1(t-s)\,A\,\mathbf{S}_2(s) \\ &= -\mathbf{S}_1(t-s)\,A\,\mathbf{S}_2(s) + \mathbf{S}_1(t-s)\,A\,\mathbf{S}_2(s) = 0, \end{aligned}$$

logo $F^{'}(s)$ é uma função constante. Agora observamos que

$$\begin{aligned} F(0) &= \mathbf{S}_1(t)\mathbf{S}_2(0) = \mathbf{S}_1(t) \\ F(t) &= \mathbf{S}_1(0)\mathbf{S}_2(s) = \mathbf{S}_2(t), \end{aligned}$$

de onde segue $\mathbf{S}_1(t) = \mathbf{S}_2(t)$. □

Observe que usando a linguagem de semigrupo, definindo $U(t) = \mathbf{S}(t)U_0$, segue da Propriedade 1.3 que $U^{'}(t) = AU(t)$ e que $U(0) = U_0$ logo $U(t) = \mathbf{S}(t)U_0$ é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} U_t - AU = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

e, além disso, esta solução satisfaz $U \in C^0([0,\infty) : D(A)) \cap C^1([0,\infty) : X)$.

Observamos também que, da Propriedade 1.4, sendo A o gerador infinitesimal de $\mathbf{S}(t)$, podemos afirmar que $U(t) = \mathbf{S}(t)U_0$ é a única solução de (1.1.2).

É fundamental entender que, na tentativa de resolvermos o problema (1.1.2), a meta é obtermos as condições necessárias e suficientes para que o operador linear A seja gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0-$semigrupo $\mathbf{S}(t)$. Nesse sentido, iremos demonstrar, nas próximas seções, os importantes teoremas de Hille-Yousida e Lummer-Phillips.

1.2 Teorema de Hille-Yousida

Para simplificar a notação, vamos escrever $A \in G(M,\omega)$, para exprimir que A é o gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0-$semigrupo, que satisfaz a condição

$$||\mathbf{S}(t)|| \leq Me^{\omega t}, \; t \geq 0.$$

Com esta notação A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações

$$\mathbf{S}(t) = e^{At} \text{ quando } A \in G(1,0).$$

Uma condição necessária e suficiente para $A \in G(1,0)$ é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 1.1. *(Hille - Yousida) Um operador linear A sobre X satisfaz:*

$\diamond$ *A é fechado e densamente definido*

$\diamond$ *$\exists \; (\lambda I - A)^{-1} \;\; \forall \;\; \lambda > 0$ e $||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}$ onde I é o operador identidade,*

se, e somente se,

A é gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0$-Semigrupo de contrações $\mathbf{S}(t)$.

Demonstração. Para a primeira parte, faremos a demonstração do seguinte modo:

(i) Seja $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ e $A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$ então

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda \, x = A \, x.$$

(ii) Seja $\mathbf{S}_\lambda(t) = e^{t\,A_\lambda}$ então $||\mathbf{S}_\lambda(t)|| \leq 1$.

(iii) $\lim_{\lambda \to \infty} \mathbf{S}_\lambda(t) \, x = \mathbf{S}(t) \, x$.

(iv) $\{\mathbf{S}(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0-semigrupo.

(v) A é gerador infinitesimal de $\{\mathbf{S}(t)\}_{t \geq 0}$.

Prova de (i):

$$\begin{aligned}
R(\lambda, A) \, (\lambda I - A) &= I \\
\lambda R(\lambda, A) - A R(\lambda, A) &= I \\
\lambda R(\lambda, A) - I &= A R(\lambda, A) \\
||\lambda R(\lambda, A) x - x|| &\leq ||R(\lambda, A)|| \, ||Ax|| \leq \frac{1}{\lambda} ||Ax||,
\end{aligned}$$

logo $\lambda R(\lambda, A) \, x \to x \;\; \forall \;\; x \in D(A)$ e por densidade $\forall \;\; x \in X$, e portanto, para Ax.

Prova de (ii)
Seja

$$\mathbf{S}_\lambda(t) = e^{t\,A_\lambda} = e^{t\,\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda\, t}.$$

$$\begin{aligned}||\mathbf{S}_\lambda(t)|| = ||e^{t\,\lambda^2 R(\lambda,A)-\lambda\,t}|| &= e^{-\lambda t}||e^{t\,\lambda^2 R(\lambda,A)}|| \\ &= e^{-\lambda t}||\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(t\,\lambda^2 R(\lambda,A))^j}{j!}|| \\ &\leq e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(t\lambda^2)^j}{j!}\,\frac{1}{\lambda^j} = e^{-\lambda\,t}e^{\lambda\,t} = 1.\end{aligned}$$

Prova de (iii)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_\lambda(t) - \mathbf{S}_\mu(t) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau}\mathbf{S}_\mu(t(1-\tau))\mathbf{S}_\lambda(t\tau)\,d\tau &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau}e^{t(1-\tau)A_\mu}e^{t\tau\,A_\lambda}d\tau \\ &= \int_0^1 e^{t\,A_\mu}\frac{d}{d\tau}e^{t\tau(A_\lambda - A_\mu)}d\tau \\ &= \int_0^1 e^{t\,A_\mu}e^{t\tau(A_\lambda - A_\mu)}t\tau(A_\lambda - A_\mu)d\tau \\ &= \int_0^1 \mathbf{S}_\mu(t(1-\tau))\mathbf{S}_\lambda(\tau\,t)t(A_\lambda - A_\mu)\,d\tau.\end{aligned}$$

Logo, $||\mathbf{S}_\lambda(t)x - \mathbf{S}_\mu(t)x|| \leq t||A_\lambda - A_\mu||$ e como $A_\lambda \to A$, $(\mathbf{S}_\lambda)$ é convergente para todo $x \in D(A)$ e por densidade para todo $x \in X$, sendo essa convergência uniforme nos limitados de $[0,T]$; portanto, pelo teorema de Banach-Stenhauss (ver H. Brézis[03]) existe um operador linear $\mathbf{S}(t)$ tal que $\mathbf{S}_\lambda(t) \to \mathbf{S}(t)$.

Prova de (iv)

$$\mathbf{S}(0) = \lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{S}_\lambda(0) = \lim_{\lambda\to\infty}e^{0\,A_\lambda} = 1 \quad \text{portanto} \quad \mathbf{S}(0) = I.$$

$$\mathbf{S}(t+s) = \lim_{\lambda\to\infty}e^{(t+s)\,A_\lambda} = \lim_{\lambda\to\infty}e^{(t)\,A_\lambda}\lim_{\lambda\to\infty}e^{(s)\,A_\lambda} = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}(s).$$

$$\begin{aligned}||\mathbf{S}(t)x - x|| &\leq ||\mathbf{S}(t)x - \mathbf{S}_\lambda(t)x + \mathbf{S}_\lambda(t)x - x|| \\ &\leq ||\mathbf{S}(t)x - \mathbf{S}_\lambda(t)x|| + ||\mathbf{S}_\lambda(t)x - x|| \\ &= ||\mathbf{S}(t)x - \mathbf{S}_\lambda(t)x|| + ||e^{tA_\lambda}x - x|| \to 0,\end{aligned}$$

para $\lambda \to \infty$ e $t \to 0^+$.

Prova de (v)

$$\begin{aligned}||\mathbf{S}_\lambda(t)A_\lambda x - \mathbf{S}(t)Ax|| &= ||\mathbf{S}_\lambda(t)A_\lambda x - \mathbf{S}_\lambda(t)Ax + \mathbf{S}_\lambda(t)Ax - \mathbf{S}(t)Ax|| \\ &\leq ||\mathbf{S}_\lambda(t)||\,||A_\lambda x - Ax|| + ||Ax||\,||\mathbf{S}_\lambda(t) - \mathbf{S}(t)||,\end{aligned}$$

e fazendo $\lambda \to \infty$ segue que $\mathbf{S}_\lambda(t)A_\lambda x \to \mathbf{S}(t)Ax$. Essa convergência será usada logo abaixo. Consideremos

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S}_\lambda(t)x = A_\lambda \mathbf{S}_\lambda(t)x,$$

logo integrando em $(0, \mathrm{t})$ segue que

$$\mathbf{S}_\lambda(t)x - x = \int_0^t \mathbf{S}_\lambda(t)A_\lambda x\, dt,$$

e fazendo $\lambda \to \infty$ obtemos

$$\mathbf{S}_\lambda(t)x - x = \int_0^t \mathbf{S}(t)Ax\, dt,$$

de onde segue

$$\frac{\mathbf{S}_\lambda(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{S}(t)Ax\, dt,$$

o que implica

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{S}_\lambda(t)x - x}{t} = Ax.$$

Isso completa a demonstração da primeira parte do teorema.

Para provarmos a recíproca, consideremos

$$x_h = \frac{1}{h}\int_0^h \mathbf{S}(t)x\, dt \in D(A) \ \text{ e } \ x_h \to x \ \text{ quando } \ h \to 0 \ \forall \ x \in X \ \text{ logo, } \overline{D(A)} = X.$$

Seja $x_\nu \to x$ e $Ax_\nu \to \chi$ em X, logo temos

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S}(t)x_\nu = A\mathbf{S}(t)x_\nu,$$

integrando e passando o limite, obtemos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbf{S}(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{S}(t)\chi\, dt = \chi, \ \text{ logo } \ Ax = \chi.$$

A aplicação $t \to \mathbf{S}(t)x$ é contínua e uniformemente limitada nos limitados de $[0,\, T]$; portanto, a integral abaixo

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda\, t}\mathbf{S}(t)x\, dt,$$

está bem definida e temos que

$$||R(\lambda)|| \leq ||x|| \int_0^\infty e^{-\lambda\, t}\, dt = \lim_{s\to\infty} [\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda\, s} + \frac{1}{\lambda}] = \frac{1}{\lambda} \ \ \forall \ \lambda > 0. \tag{1.2.3}$$

Logo, temos

$$\frac{\mathbf{S}(h)-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda\, t}\mathbf{S}(t)x\,dt = \frac{e^h-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda\, t}\mathbf{S}(t)x\,dt - \frac{e^h}{h}\int_0^h e^{-\lambda\, t}\mathbf{S}(t)x\,dt,$$

e fazendo $h \to 0$, segue que $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$, isto é, $R(\lambda)(\lambda - A)x = x, \ \forall \ x \in D(A)$.

Por outro lado, em $D(A)$, $R(A)$ e A comutam e, então,

$$(\lambda - A)R(\lambda)x = x, \ \forall \ x \in D(A).$$

Finalmente, por densidade $R(\lambda)(\lambda - A)x = (\lambda - A)R(\lambda)x = x, \ \forall \ x \in X$ e portanto existe $(\lambda I - A)^{-1}$ e de (1.2.3), concluimos que

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

□

1.3 Teorema de Lummer-Phillips

A seguir, apresentamos outra caracterização dos geradores infinitesimais dos semigrupos de contrações, o teorema de Lummer-Phillips, o qual será utilizado com freqüência nas próximas seções para obtermos a existência e unicidade de solução para os modelos dissipativos que iremos estudar neste texto.

Para isto, iniciamos denotamos por X^* o dual do espaço de Banach X e por $\langle \cdot \, , \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Agora, introduzimos o conjunto

$$F(x) = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x\rangle = \langle x, x^*\rangle = ||x||^2 = ||x^*||^2\}$$

e observamos que, pelo teorema de Hahn-Banach (ver R. A. Adams [01]), $F(x)$ é não-vazio.

Definição 1.3. *Dizemos que o operador linear $A : X \longrightarrow X$ é dissipativo, quando*

$$Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0,$$

para todo $x \in D(A)$.

Lema 1.1. *Um operador A é dissipativo se, e somente se*

$$||(\lambda I - A)x|| \geq \lambda ||x||, \ \textit{para todo } x \in D(A), \ \lambda > 0.$$

Demonstração. Se A é dissipativo, então para todo $\lambda > 0$, $x \in D(A)$ e $x \in F(x)$, temos

$$||\lambda x - Ax||\,||x|| \geq |\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle| \geq Re\,\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle \geq \lambda ||x||^2,$$

de onde segue a primeira parte da demonstração.

Reciprocamente, seja $x \in D(A)$ e suponha que $\lambda ||x|| \leq ||\lambda x - Ax||$ para todo $\lambda \geq 0$. Tome $y^*_\lambda \in F(\lambda x - Ax)$ e denote por $z^*_\lambda = \frac{y^*_\lambda}{||y^*_\lambda||}$. Logo, temos $||z^*_\lambda|| = 1$.

Note que para todo $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lambda ||x||^2 \leq ||\lambda x - Ax||^2 &= \langle \lambda x - Ax, z^*_\lambda \rangle \\ &\leq \lambda\, Re\,\langle x, z^*_\lambda \rangle - Re\,\langle Ax, z^*_\lambda \rangle \\ &\leq \lambda ||x||^2 - Re\,\langle Ax, z^*_\lambda \rangle. \end{aligned}$$

Das relações acima, obtemos

$$Re\,\langle Ax, z^*_\lambda \rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad Re\,\langle x, z^*_\lambda \rangle \geq ||x|| - \frac{1}{\lambda}||Ax||. \tag{1.3.4}$$

Sendo a bola unitária compacta na topologia fraca estrela, segue que existe $z^* \in X^*$, com $||z^*|| \leq 1$, e tomando limite com $\lambda \to \infty$, temos:

$$Re\,\langle Ax, z^* \rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad Re\,\langle x, z^*_\lambda \rangle \geq ||x||.$$

Portanto, $\langle Ax, z^* \rangle \geq ||x||$. Logo, tomando $x^* = ||x|| z^*$, temos que $x^* \in F(x)$ e $Re\,\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$, de onde concluimos que A é dissipativo. □

Consideremos agora a seguinte definição:

Definição 1.4. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo em um Espaço de Hilbert H, definimos o conjunto resolvente de A $\rho(A)$ como*

$\rho(A) = \{\, \lambda \in \mathbb{R}; (\lambda I - A)$ é inversível$\}$ onde $I : H \to H$ é o operador identidade.

Vamos então, a demonstração do teorema de Lumer-Phillips.

Teorema 1.2. *(Lumer-Phillips)*

(i) Seja A dissipativo e $\lambda_0 > 0$ tal que a $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então $A \in G(1, 0)$.

(ii) Se $A \in G(1, 0)$, então A é dissipativo e para todo $\lambda > 0$, temos que

$$Im(\lambda I - A) = X.$$

Demonstração. Iniciamos demonstrando (i). Provaremos primeiro que, se existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então teremos $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.

Seja $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^+; Im(\lambda_0 I - A) = X\}$ e vamos provar que Λ é um conjunto aberto e também fechado, o que implica $\Lambda = \mathbb{R}$.

Sendo $\rho(A)$ um conjunto aberto, então $\Lambda \cap \mathbb{R}^+$ é também aberto. Por outro lado, seja $\lambda_\mu \in \Lambda$ uma sequência convergente em $\mathbb{R}$ e seja y um elemento de X, portanto existe $x_\mu \in D(A)$ tal que

$$\lambda_\mu x_\mu - A x_\mu = y.$$

Note que estamos assumindo $\lambda_\mu > 0$ e $\lambda > 0$. Logo, em razão da dissipação, temos que $||x_\mu|| \leq \frac{1}{\lambda_\mu}||y|| \leq C$ para algum $C > 0$.

Agora, temos que

$$\lambda_\mu ||x_\nu - x_\mu|| \leq ||\lambda_\mu(x_\nu - x_\mu) - A(x_\nu - x_\mu)|| \leq |\lambda_\nu - \lambda_\mu|\, ||x_\mu|| \leq C|\lambda_\nu - \lambda_\mu|.$$

Portanto, x_μ é uma seqüência de Cauchy e sendo A um operador fechado, temos $\lambda x - Ax = y$, de onde segue que $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$; logo, Λ é fechado.

Utilizando o Lema 1.1, temos que

$$||\lambda x - Ax|| \geq \lambda ||x||, \ \text{ para todo } \ x \in D(A),$$

de onde segue que para todo $\lambda > 0$ o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ é contínuo e satisfaz

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Como consequência do teorema de Hille-Yousida segue o resultado.

Vamos demonstrar (ii). Para mostrar que A é dissipativo, seja $x \in D(A)$ e $x^* \in F(x)$, então

$$|\langle \mathbf{S}(t)x, x^* \rangle| \leq ||\mathbf{S}(t)x||\, ||x^*|| \leq ||x^*||^2,$$

e portanto

$$Re\,\langle \mathbf{S}(t)x - x, x^* \rangle = Re\,\langle \mathbf{S}(t)x, x^* \rangle - ||x||^2 \leq 0.$$

Dividindo a expressão acima por t e fazendo $t \to 0$ segue que

$$Re\,\langle Ax, x^* \rangle \leq 0,$$

como queríamos demonstrar.

Para concluir a prova de (ii), observamos que $Im(\lambda I - A) = X$ é uma conseqüência imediata do teorema de Hille-Yousida. $\square$

1.4 O Teorema de Gearhart

Esta seção é relacionada com os resultados que estabelecem as condições necessárias e suficientes para um C_0-semigrupo ser exponencialmente estável. Inicialmente, consideremos a seguinte definição:

Definição 1.5. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo em um Espaço de Hilbert H. Definimos o espectro $\sigma(A)$ como*

$\sigma(A) = \{\, \lambda \in \mathbb{R}\,; (\lambda I - A)$ *não é inversível*$\}$, *onde $I : H \to H$ é o operador identidade.*

Comparando as definições (1.4) e (1.5) segue que $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$, o complementar de $\sigma(A)$ em $\mathbb{C}$. Consideremos agora o seguinte teorema devido a Huang [04]:

Teorema 1.3. *Seja $\mathbf{S}(t) = e^{At}$ um C_0-semigrupo em um espaço de Hilbert. Então $\mathbf{S}(t)$ é exponencialmente estável se e somente se*

$$\sup\{Re\lambda; \lambda \in \sigma(A)\} \leq 0$$

e

$$\sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty.$$

A seguinte invariante desse resultado foi obtido por Gearhart Ver (Wyler [19]).

Teorema 1.4. *Seja $\mathbf{S}(t) = e^{At}$ um $\mathcal{C}_0$-semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert. Então $\mathbf{S}(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \tag{1.4.5}$$

e

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| < \infty. \tag{1.4.6}$$

Demonstração. Para demonstrar o teorema, vamos provar que as condições (1.4.5) e (1.4.6) são suficientes para a estabilidade exponencial de e^{At}. A recíproca não interessa no presente contexto. Inicialmente, consideremos a expressão

$$\begin{aligned}(\lambda I - \mathbf{S})^{-1} &= \lambda^{-1}\,(I - \lambda^{-1}\mathbf{S})^{-1} \\ &= \lambda^{-1}\,(I + \frac{\mathbf{S}}{\lambda} + \frac{\mathbf{S}^2}{\lambda^2} + \cdots)\end{aligned}$$

Uma condição para a convergência da série é que

$$\lim_{n\to\infty} ||\frac{\mathbf{S}^n}{\lambda^n}||^{\frac{1}{n}} < 1, \quad \text{isto é} \quad ||\mathbf{S}|| < \lambda.$$

Seja $\lambda \in \rho(\mathbf{S}(t))$, logo $||\mathbf{S}(t))|| < \lambda$ e, portanto, $\lambda \leq ||\mathbf{S}(t)||$ implica que $\lambda \in \sigma(\mathbf{S}(t))$

de onde concluimos que

$$\sigma(\mathbf{S}(t)) \subset \; [-||\mathbf{S}(t)||\,, +||\mathbf{S}(t)||\,]. \tag{1.4.7}$$

Agora, para $\mu > 0$, definimos $L_\mu = \{\lambda \in \mathbb{C}; e^\lambda = \mu\}$ e observamos que $1 \in \rho(A)$, se, e somente se,

$$\frac{1}{t}L_1 \subset \rho(A) \quad \text{e} \quad \sup_{\lambda \in \frac{1}{t}L_1} ||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq M.$$

De modo geral,

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \in \rho(e^{At}) \quad &\Longleftrightarrow \quad (Ie^{\alpha t} - e^{At}) \;\; \text{é inversível} \\ &\Longleftrightarrow \quad (I - e^{(A-\alpha I)t}) \;\; \text{é inversível} \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 \in \rho((A-\alpha)t) \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\pi ni \in \rho((A-\alpha)t) \;\; \text{e} \;\; \sup ||(2\pi ni - (A-\alpha)t)^{-1}|| \leq M \\ &\Longleftrightarrow \quad [(\frac{2\pi ni}{t} + \alpha) - A] \;\; \text{é inversível e uniformemente limitado.} \end{aligned}$$

Denotando $(\frac{2\pi ni}{t} + \alpha) = \lambda$ e $\mu = e^{\alpha t}$, segue que

$$\mu \in \rho(e^{At}) \Longleftrightarrow \frac{1}{t}L_\mu \subset \rho(A) \quad \text{e} \quad \sup_{\lambda \in \frac{1}{t}L_\mu} ||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq M. \tag{1.4.8}$$

Agora, utilizando as hipóteses do teorema, temos que

$$\sup_{\mu \in i\mathbb{R}} ||(\mu I - A)^{-1}|| \leq M, \;\; \text{onde} \;\; i\mathbb{R} = \{\mu \in \mathbb{C}\,; \; ||e^\mu|| = 1\}.$$

Sendo $\mathbf{S}(t) = e^{At}$ um semigrupo de contrações, segue de (1.4.7) que $\sigma(e^{At}) \in [-1\,,\,1]$.

Por (1.4.8), segue que $e^\mu \in \rho(e^{At})$ e observando que $e^{i\theta} \in \rho(e^{At})$, $\;\forall\; \theta \in \mathbb{R}$, segue que $\sigma(e^{At}) \in \;(-1,\,1)$.

Sendo $\sigma(e^{At})$ compacto, podemos afirmar que $\sup \sigma(e^{At}) < 1$ e, portanto, o raio espectral

$$R_E(e^{At}) = \lim_{s\to\infty} [\, ||e^{As}||^{\frac{1}{s}}\,]^t < 1,$$

o que implica

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\ln ||e^{As}||}{s} = -\gamma, \;\; \gamma > 0,$$

logo, dado $\epsilon > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que $s > s_0$ implca $|\frac{\ln ||e^{As}||}{s} + \gamma| < \epsilon$.

Escolhendo $\epsilon = \frac{\gamma}{2}$ temos $\ln ||e^{As}|| < \frac{-\gamma s}{2}$ e então $||e^{As}|| \leq e^{\frac{-\gamma s}{2}}$, de onde segue o decaimento exponencial. $\square$

O Método

Quando se considera o estudo do decaimento exponencial da solução de um modelo dissipativo governado por equações diferenciais parciais, o problema é estabelecer uma estimativa para a energia total do sistema, $E(t)$, da forma

$$E(t) \leq CE(0)e^{-wt}, \quad \forall t \geq 0,$$

ou, equivalentemente, estabelecer a estabilidade exponencial

$$\|\mathbf{S}(t)\| \leq Ce^{-wt}, \quad \forall t \geq 0,$$

do semigrupo dissipativo $\mathbf{S}(t)$ gerado pelo sistema.

Por muito tempo, permaneceu em aberto se essas condições eram equivalentes. Hoje, é conhecido (ver S. Zheng [20]) que essas duas estimativas são equivalentes.

Nesse sentido, iremos provar o decaimento exponencial explorando as propriedades dissipativas do semigrupo associado ao sistema.

Z. Liu e S. Zheng [08] deram uma prova da equivalência dos teoremas de Huang e Gearhart sob a condição que $\mathbf{S}(t) = e^{At}$ seja um $\mathcal{C}_0$-semigrupo de contrações em um Espaço de Hilbert. Utilizando esses teoremas combinados com argumentos de contradição e técnicas de EDP, os autores mostraram a estabilidade exponencial de e^{At}; ou, em outras palavras, o decaimento exponencial de vários modelos dissipativos em EDP.

A essência do método consiste em supor por contradição que as hipóteses dos teoremas de Gearhart ou de Huang são falsas. Nos casos que abordaremos neste texto, utilizaremos o teorema de Gearhart e trabalharemos em duas etapas, as quais, em linhas gerais, apresentamos a seguir.

Na primeira etapa, ao supormos que a condição (1.4.5) é falsa, teremos a seguinte inclusão

$$\{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \sigma(A)$$

onde $\sigma(A)$ é o espectro do operador A.

Estaremos utilizando adequados espaços de Hilbert, e da teoria geral dos espaços de Sobolev, iremos obter imersões compactas, o que garantirá, via teoria espectral, que $\sigma(A)$ é constituído apenas de autovalores de A.

Em seguida utilizando adequados multiplicadores e técnicas conhecidas do estudo de EDP, iremos gerar uma contradição. Desse modo, provaremos a primeira condição do teorema de Gearhart.

Na segunda etapa, quando supomos que (1.4.6) é falsa, temos que

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| = \infty,$$

o que permite obter uma seqüência de vetores

$$U_n \in D(A) \text{ satisfazendo } ||U_n|| = 1.$$

Nesse momento, usamos o fato do operador A ser dissipativo e, após um raciocínio razoável de análise matemática, conseguimos obter uma contradição sobre a seqüência de vetores U_n. Desse modo, provaremos a segunda condição do teorema de Gearhart e por conseqüência a estabilidade exponencial do modelo em questão.

Nas próximas seções, iremos perceber que o grau de dificuldade em seguir as idéias apresentadas nas etapas acimas mencionadas está diretamente relacionado com o modelo em estudo.

Esperamos que, ao compreender a técnica, o leitor possa aplicar o método com sucesso a outros modelos, inclusive resolvendo os exercícios propostos, o que implicará bons resultados do ponto de vista de estabilidade de soluções de modelos dissipativos em equações diferenciais parciais.

Cabe ainda informar que podemos utilizar os teoremas de Gearhart e Huang para provar o "blow up" em tempo finito de modelos governados por EDP. Entretanto, este não é o objetivo dessa nota.

Para finalizarmos esta seção, lembramos que o ponto alto desta nota é apresentar esse método, aplicando-o a modelos dissipativos em EDP.

1.5 Exercícios

01. Seja A um operador linear com domínio denso em um espaço de Hilbert H. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, o conjunto resolvente de A, prove que A é gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contrações em H.

02. Dizemos que uma função $p\ :\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é sub-aditiva quando

$$p(s+t) \leq p(s) + p(t).$$

Mostre que se p é sub-aditiva e limitada superiormente em todo intervalo limitado, então

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{p(t)}{t}.$$

03. Seja $\mathbf{S}(t)$ um C_0- semigrupo. Prove que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln||\mathbf{S}(t)||}{t}=\inf_{t>0}\frac{\ln||\mathbf{S}(t)||}{t}=w_0$$

e para cada $w>w_0$ existe $M\geq 1$, tal que

$$||\mathbf{S}(t)||\leq M\,e^{w\,t},\ \ t\geq 0.$$

04. Seja $\mathbf{S}(t)$ um C_0- semigrupo sobre um espaço de Banach X. Mostre que para todo $x\in X$ a aplicação $t\to\mathbf{S}(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ em X é contínua.

05. Seja $\mathbf{S}(t)$ um C_0- semigrupo sobre um espaço de Banach X. Mostre que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\mathbf{S}(\tau)\,d\tau=\mathbf{S}(t)x\ \text{ para todo }\ x\in X.$$

06. Seja $\mathbf{S}(t)$ um C_0- semigrupo de contrações sobre um espaço de Hilbert H. Mostre que, se

$$\lim_{t\to\infty}||\mathbf{S}(t)||=0\ \text{ então }\ ||\mathbf{S}(t)||\leq C\,e^{-w\,t},$$

isto é, $\mathbf{S}(t)$ decai exponencialmente.

07. Seja $\mathbf{S}(t)$ um C_0- semigrupo de contrações sobre um espaço de Hilbert H. Mostre que se

$$\int_0^\infty||\mathbf{S}(t)||^p<\infty\ \text{ onde }\ p\geq 1\ \text{ então }\ ||\mathbf{S}(t)||\leq C\,e^{-w\,t},$$

isto é, $\mathbf{S}(t)$ decai exponencialmente.

08. Seja Ω um conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$ e $\Delta\ :\ L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ o operador de Laplace, que associa a cada $u\in D(\Delta)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ o valor

$$\Delta\,u=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}.$$

Prove que o operador de Laplace é não limitado.

09. Seja $\Omega\in\mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, regular com fronteira Γ. Prove que, para o dado inicial $u_0\in L^2(\Omega)$, a equação do calor

$$\begin{aligned}u_t-\Delta\,u&=0\ \text{ em }\ \Omega\times[0,\infty),\\ u(x,t)&=0\ \text{ em }\ \Gamma\times[0,\infty),\\ u(x,0)&=u_0(x),\ \ x\in\Omega,\end{aligned}$$

possui uma única solução u na classe

$$u\in C([0,\infty);L^2(\Omega))\cap C^1((0,\infty);L^2(\Omega))\cap C((0,\infty);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)).$$

10. Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado de classe C^∞. Prove que, para os dados iniciais $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, a equação de ondas

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta\, u &= 0 \text{ em } \Omega \times [0, \infty), \\ u(x,t) &= 0 \text{ em } \Gamma \times [0, \infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \ \ x \in \Omega, \\ u_t(x,0) &= u_1(x), \ \ x \in \Omega, \end{aligned}$$

possui uma única solução u na classe

$$u \in C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H^2(\Omega) \cap L^2(\Omega)).$$

Capítulo 2

A Equação de Ondas

2.1 Sistema Elástico

Nesta seção, iremos considerar a dissipação provocada pelo atrito representado por αu_t, onde α é uma constante real positiva. Nesse sentido, estudaremos a existência, unicidade e estabilidade de solução para o modelo que descreve as pequenas vibrações verticais de uma corda elástica de comprimento finito L e presa nas extremidades.

Representamos por $u(x,t)$ o deslocamento transversal de cada ponto $x \in (0,L)$ da corda no instante $t \geq 0$, a partir de sua posição de equilíbrio. Nesse sentido, temos o seguinte modelo dissipativo:

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t = 0, \;\; (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \tag{2.1.1}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \;\; x \in (0,L), \tag{2.1.2}$$
$$u_t(x,0) = u_1(x), \;\; x \in (0,L), \tag{2.1.3}$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \;\; t \geq 0. \tag{2.1.4}$$

Existência e Unicidade de Solução

Nesta seção, iremos mostrar que o modelo (2.1.1)–(2.1.4) possui uma única solução $u(x,t)$ na classe

$$u \in C^0\left((0,\infty), H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)\right) \cap C^1\left((0,\infty), H^2(0,L)\right) \cap C^2\left((0,\infty), L^2(0,L)\right).$$

Inicialmente, vamos escrever o modelo na forma

$$\mathbf{U}_t - A\mathbf{U} = 0 \tag{2.1.5}$$
$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 \tag{2.1.6}$$

onde A é o gerador infinitesimal do $\mathcal{C}_0$ - semigrupo associado a (2.1.1)–(2.1.4).

Denotando $v = u_t$ e

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

podemos escrever

$$\mathbf{U}_t = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\alpha \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A\mathbf{U}.$$

Sejam $H = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$ e $D(A) = [H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)] \times H_0^1(0, L)$. Definimos em H o produto interno:

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle &= \left(\begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) \\ &= \int_0^L (v_x u_x + u_{xx} - \alpha v^2) dx \\ &= \int_0^L v_x u_x dx + \int_0^L (u_{xx} - \alpha v) v dx \ . \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando as condições de contorno, obtemos:

$$\langle AU, U \rangle = \int_0^L (v_x u_x + u_{xx} v - \alpha v^2) dx = -\alpha \int_0^L |v|^2 dx, \tag{2.1.7}$$

de onde segue que $Re\, \langle AU, U \rangle \leq 0$, e portanto, A é dissipativo.

Vamos mostrar que A é maximal.

Dado $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$, existe uma única $U \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$, tal que $U - AU = F$, ou seja

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

Queremos mostrar que $U \in D(A) = \big(H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)\big) \times H_0^1(0, L)$.

Temos

$$\begin{aligned} &u - v = f_1, \\ &v - u_{xx} + \alpha v = f_2 \ . \end{aligned}$$

Somando, obtemos

$$u - u_{xx} + \alpha v = f_1 + f_2.$$

Mas

$$f_1 \in H_0^1(0, L) \subset L^2(0, L),$$

logo

$$f_1 + f_2 \in L^2(0, L).$$

Para o problema $u - u_{xx} + \alpha v = f_1 + f_2$, com $f_1 + f_2 \in L^2(0, L)$, sabemos que existe uma solução $u \in H_0^1(0, L)$ e por regularidade elíptica, $u \in H^2(0, L)$. Logo, temos que $u \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$.

Utilizando $v = u - f_1$ e lembrando que $u,\ f_1 \in H_0^1(0, L)$, podemos afirmar que $v \in H_0^1(0, L)$.

Temos mostrado que:

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L) = D(A),$$

e que,

$$U - AU = F, \quad \forall F \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L),$$

isto é,

$$(I - A)U = F,$$

de onde segue, para $\lambda = 1$,

$$Im(\lambda I - A) = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) = H,$$

portanto, A é maximal e, pelo teorema de Lumer-Phillips, A é gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contrações $\{\mathbf{S}(t)\}$ e $U(t) = \mathbf{S}(t)U(0)$, é a solução do problema (2.1.5)-(2.1.6).

Da teoria de semigrupos, sabemos que U é solução única e que:

$$U \in \mathcal{C}^0(\ [0, \infty), D(A)\ ) \cap \mathcal{C}^1(\ [0, \infty), X\ ),$$

$$\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^0(\ [0, \infty), (H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1\ ) \cap \mathcal{C}^1(\ [0, \infty), H_0^1 \times L^2\ ),$$

isto é:

$$u \in \mathcal{C}^0(\ [0, \infty), H_0^1 \cap H^2\ ) \cap \mathcal{C}^2(\ [0, \infty), H_0^1\ ). \tag{2.1.8}$$

$$u_t \in \mathcal{C}^1(\ [0, \infty), L^2\ ) \Rightarrow u \in \mathcal{C}^2(\ [0, \infty), L^2\ ). \tag{2.1.9}$$

De (2.1.8) e (2.1.9), temos:

$$u \in \mathcal{C}^0(\ [0, \infty), H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)\ ) \cap \mathcal{C}^1(\ [0, \infty), H_0^1(0, L)\ ) \cap \mathcal{C}^2(\ [0, \infty), L^2(0, L)\ ).$$

Decaimento Exponencial

Usaremos o teorema de Gearhart, teorema 1.4, para mostrar que o modelo

$$\begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t = 0,\ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ \ x \in (0,L), \\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \ x \in (0,L), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t \geq 0\ , \end{array}$$

é exponencialmente estável.

Nesse sentido, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *O C_0-semigrupo de contrações $(\mathbf{S}(t) = e^{At})_{t>0}$, gerado pelo operador A, é exponencialmente estável, i. e., existe constantes positivas M e w tais que*

$$||\mathbf{S}(t)|| \leq Me^{-wt}.$$

Demonstração. Dados $u_t = v$ e $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, temos que:

$$U_t = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = AU,$$

de onde segue que $U_t - AU = 0$ e, portanto:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\alpha I \end{bmatrix}.$$

Definindo $H = H_0^1 \times L^2$ e $D(A) = (H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1$ e lembrando que A é dissipativo, vamos verificar que

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}$$

e

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} \|(i\beta - A)^{-1}\|_H < \infty.$$

Faremos a prova por contradição. Na primeira etapa, provaremos que

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Sabemos que para $F \in H$ existe uma única solução $U \in H$ tal $AU = F$ e, por regularidade elíptica, $U \in D(A)$ e satisfaz $||U||_H \leq K||F||_H$ com K uma constante positiva. Logo, $0 \in \rho(A)$.

Segue do fato que $0 \in \rho(A)$ e do teorema de contração que para qualquer número $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| \leq ||A^{-1}||^{-1}$, o operador $(i\beta I - A) = A(i\beta A^{-1} - I)$ é inversível e além disso $||(i\beta I - A)^{-1}||$ é uma função contínua de β em $(-||A^{-1}||^{-1}, ||A^{-1}||^{-1})$.

Assim, se

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}$$

não é verdade, então existe $\theta \in \mathbb{R}$ com $||A^{-1}||^{-1} \leq |\theta| \leq \infty$, tal que

$$\{i\beta / |\beta| < |\theta|\} \subset \rho(A) \quad \text{e} \quad sup\|(i\beta - A)^{-1}\| \,/\, |\beta| < |\theta|\} = \infty.$$

Nessa condição, existe uma seqüência β_n com $\beta_n \to \theta$, $|\beta_n| < |\theta|$ e uma sequência de funções vetoriais complexas $U_n \in D(A)$ com norma unitária em H tal que

$$\|(i\beta_n I - A)U_n\|_H \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to 0.$$

Por fim, fazendo o produto interno de $(i\beta_n I - A)U_n$ com U_n em H, tomando a parte real e procedendo da mesma forma que no caso anterior, obtemos $||U_n||_H \to 0$, o que é uma contradição.

Para a segunda parte da demonstração, vamos supor que

$$\limsup_{|\lambda| \to \infty} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_H = \infty, \quad \text{onde} \quad \lambda = i\beta.$$

Nessa condição, existe $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que

$$\frac{||(\lambda_n I - A)^{-1} V_n||_H}{||V_n||_H} \geq n,$$

donde segue que

$$||(\lambda_n I - A)^{-1} V_n||_H \geq n||V_n||_H. \tag{2.1.10}$$

Uma vez que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$ e que $\lambda_n \in \rho(A)$, existe uma única seqüência

$$(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A),$$

tal que

$$\lambda_n U_n - AU_n = V_n, \quad \text{com} \quad ||U_n||_H = 1.$$

Utilizando (2.1.10), $||U_n||_H \geq n||\lambda_n U_n - AU_n||_H$ e denotando por $f_n = \lambda_n U_n - AU_n$, segue que

$$||f_n||_H \leq \frac{1}{n},$$

portanto,

$$f_n \to 0 \text{ (forte) em } H.$$

Multiplicando f_n por U_n, obtemos:

$$\lambda_n \langle U_n, U_n \rangle - \langle AU_n, U_n \rangle = \langle f_n, U_n \rangle.$$

Tomando a parte real e utilizando (2.1.7), obtemos

$$\lambda_n ||U_n||_H^2 + \alpha \int_0^1 |v_n|^2 dx = \langle f_n, U_n \rangle,$$

logo

$$\alpha \int_0^1 |v_n|^2 dx \leq \langle f_n, U_n \rangle \to o.$$

Portanto,

$$v_n \to 0 \quad \text{(forte)} \quad \text{em} \quad L^2(0,1). \tag{2.1.11}$$

Consideremos agora $\lambda_n U_n - AU_n = f_n$, isto é:

$$\lambda_n \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n \\ u_{n,xx} - \alpha v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n^1 \\ f_n^2 \end{bmatrix},$$

de onde segue que:

$$\lambda_n u_n - v_n = f_n^1, \tag{2.1.12}$$
$$\lambda_n v_n - u_{n,xx} + \alpha v_n = f_n^2. \tag{2.1.13}$$

Por fim, utilizando a desigualdade de Poincarè, segue diretamente de (2.1.11) e (2.1.13) que

$$u_n \to 0 \quad \text{(forte)} \quad \text{em} \quad H_0^1(0,1)$$

o que é uma contradição pois $||U_n||_H = 1$. Sendo verificada as condições do teorema de Gearhart, fica então provada a estabilidade de solução. □

2.2 Sistema Viscoelástico

Considere os pequenos deslocamentos transversais de uma corda elástica, de comprimento finito L, o qual denotamos por $u(x,t)$, onde $x \in (0,L)$ é o deslocamento horizontal da corda em cada instante $t > 0$. Suponha que o "stress" σ é do tipo taxa, i. e.,

$$\sigma = \alpha u_x + \gamma u_{xt} ,$$

então, a equação de onda é escrita do seguinte modo

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \gamma u_{xxt} = 0, \ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty). \tag{2.2.14}$$

Para fixar as idéias, vamos assumir que a corda está fixa nos seus pontos extremos, $x = 0$ e $x = L$. Nesse caso, temos as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(L,t) &= 0 . \end{aligned}$$

Agora, note que na equação (2.2.14) a dissipação está distribuída de modo uniforme em toda a corda. Entretanto, é desejável, na prática, considerar o problema com dissipação localmente distribuída (ver E. Zuazua [21]). Mais precisamente, nesta seção, iremos considerar o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \alpha u_{xx} - \gamma(x) u_{xxt} &= 0,\ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), && (2.2.15)\\ u(0,t) = u(L,t) &= 0,\ t > 0, && (2.2.16)\\ u(x,0) &= u_0(x),\ \ x \in (0,L), && (2.2.17)\\ u_t(x,0) &= u_1(x),\ \ x \in (0,L), && (2.2.18) \end{aligned}$$

onde $\gamma(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Existência e Unicidade de Solução

O espaço de energia associado ao modelo (2.2.15)-(2.2.18) é $H = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$.

O produto interno nesse espaço é definido para $U_j = (u^j, v^j) \in H,\ j = 1, 2$, de modo usual,

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \int_0^L \alpha u_x^1 u_x^2 \, dx + \int_0^L v^1 v^2 \, dx.$$

No que segue, iremos denotar por $\|U\|^2 = \langle U, U \rangle$ a norma no espaço de energia. O sistema (2.2.15)-(2.2.18) pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt} U(t) - AU(t) = 0,$$

onde $v = u_t$,

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \gamma(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

e $D(A) = \{(u,v) \in H / \alpha u_x + \gamma(x) v_x \in H^1(0,L)\}$.

Em relação ao operador A, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *O operador A gera um C_0-semigrupo de contrações $(e^{At})_{t>0}$ em H.*

Demonstração. Usaremos o teorema de Lummer-Phillips para provar essa propriedade do operador A.

Da teoria geral dos espaços de Sobolev, é claro que $D(A)$ é denso em H. Para $U \in D(A)$, integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle &= \int_0^L \alpha v_x u_x \ dx + \int_0^L (\alpha u_{xx} + \gamma(x) v_{xx}) v \ dx \\ &= -\int_0^L \gamma(x) |v_x|^2 \ dx \leq 0. && (2.2.19) \end{aligned}$$

Isto mostra que A é dissipativo.

Agora, vamos provar que existe um $\lambda > 0$ tal que a imagem $Im(\lambda I - A) = H$.

Para qualquer $F = (f, g) \in H$, considere a equação $AU = F$, i. e.,

$$v = f \in H_0^1, \tag{2.2.20}$$

$$\alpha u_{xx} + \gamma(x) v_{xx} = g \in L^2 \ . \tag{2.2.21}$$

Usando $v = f$, obtemos após substituir (2.2.20) em (2.2.21)

$$\alpha u_{xx} = g - \gamma(x) f_{xx} \in H^{-1} \ , \tag{2.2.22}$$

onde H^{-1} é o espaço dual de H_0^1. Segue diretamente de resultados conhecidos da teoria das equações elíticas que (2.2.22) admite uma única solução $u \in H_0^1$. Portanto, obtivemos $U \in D(A)$ satisfazendo (2.2.20) e (2.2.21).

É claro que

$$||U||_H \leq k||F||_H$$

com k uma constante positiva. Logo $0 \in \rho(A)$.

Agora, se $0 \in \rho(A)$, então A é inversíves e A^{-1} é um operador linear limitado. Pelo teorema da aplicação contração, é fácil mostrar que o operador

$$\lambda I - A = A(\lambda A^{-1} - I)$$

é inversível para $0 < \lambda < ||A^{-1}||^{-1}$.

Portanto, segue do teorema de Lumer-Phillips que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $(e^{At})_{t>0}$ em H. $\square$

Agora, observamos que, da teoria de Semigrupos (ver A. Pazy [10]), temos que

$$U(t) = e^{At} U_0, \quad U_0 = (u_0, v_0)$$

é a única solução de

$$\frac{d}{dt} U(t) - AU(t) = 0,$$

$$U(0) = U_0,$$

e $U \in C^0(\ [0, \infty), D(A) \ ) \cap C^1(\ [0, \infty), H \ )$.

A seguir, vamos provar que a solução é exponencialmente estável.

Estabilidade Exponencial

Nesta seção, o principal resultado é o seguinte teorema:

Teorema 2.3. *O C_0-semigrupo de contrações $(\mathbf{S}(t) = e^{At})_{t>0}$, gerado por A, é exponencialmente estável, i. e., existe constantes positivas M e w tal que*

$$||\mathbf{S}(t)|| \leq Me^{-wt}.$$

Demonstração. Segue do fato de $0 \in \rho(A)$ e do teorema da aplicação contração que para qualquer número real β com $|\beta| \leq ||A^{-1}||^{-1}$, o operador

$$i\beta I - A = A(i\beta A^{-1} - I)$$

é inversível.

Além disso, $||(i\beta I - A)^{-1}||$ é uma função contínua de β no intervalo $(\ -||A^{-1}||^{-1}, ||A^{-1}||^{-1}\ )$.

Nesse caso, se

$$\rho(A) \supset \{i\beta \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

não é verdade, então existe $\theta \in \mathbb{R}$ com $||A^{-1}||^{-1} \leq |\theta| < \infty$ tal que

$$\{i\beta \mid |\beta| < |\theta|\} \subset \sigma(A)$$

e

$$\sup\{||(i\beta I - A)^{-1}|| \mid |\beta| < |\theta|\} = \infty.$$

Portanto, existe uma seqüência $\beta_n \in \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \theta$, $|\beta_n| < |\theta|$ e, uma seqüência de funções vetoriais complexas $U_n \in D(A)$ com norma unitária em H tal que

$$||(i\beta_n I - A)U_n|| \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

i. e.,

$$i\beta_n u_n - v_n \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1, \tag{2.2.23}$$

$$i\beta_n v_n - \alpha u_{n,xx} - \gamma(x) v_{n,xx} \to 0 \quad \text{em} \quad L^2. \tag{2.2.24}$$

Fazendo o produto interno de $(i\beta_n I - A)U_n$ com U_n em H, tomando a parte real e usando (2.2.19), obtemos

$$Re\langle\ (i\beta_n I - A)U_n, U_n\ \rangle = \int_0^L \gamma(x)|v_{n,x}|^2\ dx.$$

Notando que (U_n) é limitada e que $(i\beta_n I - A)U_n \to 0$, temos

$$Re\langle\ (i\beta_n I - A)U_n, U_n\ \rangle = \int_0^L \gamma(x)|v_{n,x}|^2\ dx \to 0. \tag{2.2.25}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\int_0^L \gamma(x)|v_{n,x}|^2\;dx &= \int_0^L ax|v_{n,x}|^2\;dx + \int_0^L b|v_{n,x}|^2\;dx\\ &\geq b\int_0^L |v_{n,x}|^2\;dx\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Poincarè

$$\int_0^L \gamma(x)|v_{n,x}|^2\;dx \geq \frac{b}{C_p}\int_0^L |v_n|^2\;dx\;. \tag{2.2.26}$$

Logo, segue diretamente de (2.2.25) e (2.2.26) que

$$v_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^2\;.$$

Por fim, observamos que (2.2.23) implica

$$u_n \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1\;.$$

Diante das convergências obtidas, podemos afirmar que $||U_n|| \to 0$, o que contraria o fato de $||U_n|| = 1$. Portanto, está provado que $\rho(A) \supset \{i\beta \mid \beta \in \mathbb{R}\}$.

Iremos novamente usar argumento de contradição para provar que

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} ||(i\beta I - A)^{-1}|| < \infty. \tag{2.2.27}$$

Se (2.2.27) não é verdade, então existe uma sequência de vetores $(V_n)_{n\in N}$ tal que

$$\frac{||(\lambda_n I - A)^{-1}V_n||}{||V_n||} \geq n\;,$$

onde $\lambda_n = i\beta_n$. Portanto, segue que

$$||(\lambda_n I - A)^{-1}V_n|| \geq n||V_n||\;.$$

De $\lambda_n \in \rho(A)$, temos que existe uma única seqüência $(U_n) \in D(A)$ tal que

$$\lambda_n U_n - AU_n = V_n, \quad ||U_n|| = 1,$$

isto é, $U_n = (\lambda_n I - A)^{-1}V_n$ e

$$||U_n|| \geq n||\lambda_n U_n - AU_n||.$$

Seja $F_n = \lambda_n U_n - AU_n$ e com esta notação

$$||F_n|| \leq \frac{1}{n}||U_n||, \qquad ||U_n|| = 1.$$

Então

$$F_n \to 0 \text{ (forte)} \quad \text{em} \quad H \quad \text{quando} \quad n \to \infty \ . \tag{2.2.28}$$

Agora, fazendo o produto interno de F_n com U_n obtemos

$$\lambda_n \langle\ U_n, U_n\ \rangle - \langle\ AU_n, U_n\ \rangle = \langle\ F_n, U_n\ \rangle, \qquad \lambda_n = i\beta_n.$$

Tomando a parte real e utilizando (2.2.19), obtemos,

$$Re\langle\ F_n, U_n\ \rangle = \int_0^L \gamma(x)|v_{n,x}|^2\ dx\ .$$

Notando que (U_n) é limitada e que $F_n \to 0$, obtemos

$$\int_0^L \gamma(x)|v_{n,x}|^2\ dx \to 0\ ,$$

e usando (2.2.26), temos

$$b\int_0^L |v_n|^2\ dx \to 0,$$

de onde segue que

$$v_n \to 0 \text{ (forte)} \quad \text{em} \quad L^2\ . \tag{2.2.29}$$

Escrevemos $F_n = (\ f_n, g_n\ )$ e $U_n = (\ u_n, v_n\ )$. Da identidade $F_n = \lambda_n U_n - AU_n$ obtemos

$$\lambda_n u_n - v_n = f_n \quad \text{em} \quad H_0^1, \tag{2.2.30}$$

$$\lambda_n v_n - \alpha u_{n,xx} - \gamma(x) v_{n,xx} = g_n \quad \text{em} \quad L^2\ .$$

Por fim, utilizando (2.2.28), (2.2.29) e(2.2.30), temos que

$$\lambda_n u_n \to 0$$

e notando que $\lambda_n \to \infty$, concluimos que $u_n \to 0$ (forte) em H_0^1.

Isso é uma contradição e portanto a prova do teorema está completa. □

2.3 Sistema Termoelástico

Nesta seção, iremos provar a estabilidade exponencial do semigrupo associado ao sistema termoelástico. Consideremos então uma barra de comprimento L com densidade unitária. Vamos denotar por u o deslocamento e por θ a diferença de temperatura entre a barra e o meio ambiente. As equações do momento e energia são descritas pelo sistema abaixo:

$$u_{tt} - au_{xx} + \alpha\theta_x = 0, \ \text{ em } \ (0, L) \times (0, \infty),$$
$$c_0\theta_t - k\theta_{xx} + \alpha u_{xt} = 0, \ \text{ em } \ (0, L) \times (0, \infty),$$

onde a, k, c_0 são constantes positivas e α uma constante não nula. Estas constantes dependem das propriedades do material. Para facilitar o entendimento, iremos supor $a = k = c_0 = 1$, e que a barra, em suas extremidades, está fixa e isolada térmicamente. Nesse sentido temos o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}
u_{tt} - au_{xx} + \alpha\theta_x &= 0, \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), && (2.3.31)\\
\theta_t - \theta_{xx} + \alpha u_{xt} &= 0, \text{ em } (0,L)\times(0,\infty). && (2.3.32)\\
u(0,t) = u(L,t) &= 0, \ t>0, && (2.3.33)\\
\theta(0,t) = \theta(L,t) &= 0, \ t>0, && (2.3.34)\\
u(x,0) &= u_0(x), \ x\in(0,L), && (2.3.35)\\
u_t(x,0) &= u_1(x), \ x\in(0,L), && (2.3.36)\\
\theta(x,0) &= \theta_0(x), \ x\in(0,L). && (2.3.37)
\end{aligned}$$

Existência e Unicidade de Solução

O espaço de energia associado ao modelo (2.3.31)-(2.3.37) é

$$H = H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times L^2(0,L).$$

O produto interno nesse espaço é definido para $U_j = (u^j, v^j, w^j) \in H, \ j = 1, 2$, do seguinte modo

$$\langle U_1, U_2\rangle = \int_0^L u_x^1 u_x^2\,dx + \int_0^L v^1v^2\,dx + \int_0^L w^1w^2\,dx.$$

No que segue, iremos denotar por $\|U\|^2 = \langle U, U\rangle$ a norma no espaço de energia. O sistema (2.3.31)-(2.3.37) pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt}U(t) - AU(t) = 0,$$

onde $v = u_t$, $w = \theta$,

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t)\\ v(t)\\ w(t)\end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -\alpha\frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & -\alpha\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}\end{bmatrix},$$

com $D(A) = H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)\times H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$.

Em relação ao operador A, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.4. *O operador A gera um C_0-semigrupo de contrações $(e^{At})_{t>0}$ em H.*

Demonstração. Vamos usar o teorema de Lummer-Phillips para provar essa propriedade do operador A.

Da teoria geral dos espaços de Sobolev, é claro que $D(A)$ é denso em H. Para $U \in D(A)$, integrando por partes, obtemos

$$\langle AU, U\rangle = \int_0^L u_x u_{tx}\, dx + \int_0^L u_t(u_{xx} - \alpha u_t \theta_x)\, dx + \int_0^L \theta(\theta_{xx} - \alpha\theta u_{xt})\, dx,$$

integrando por partes e usando as condições de contorno, obtemos

$$\langle AU, U\rangle = \int_0^L u_x u_{tx} dx - \int_0^L u_t u_{tx} dx - \int_0^L \alpha u_t \theta_x dx + \int_0^L \theta\theta_{xx} dx + \int_0^L \alpha\theta_x u_t dx,$$

de onde segue

$$\langle AU, U\rangle = -\int_0^L |\theta_x|^2\ dx \leq 0. \tag{2.3.38}$$

Isso mostra que A é dissipativo.

Agora, vamos provar que existe um $\lambda > 0$ tal que a imagem $Im(\lambda I - A) = H$.

Dado $F = \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L)$, existe uma única

$$U \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L),$$

tal que $U - AU = F$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha\theta_x \\ \theta_{xx} - \alpha v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix}.$$

Queremos mostrar que

$$U \in D(A) = H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L).$$

Temos,

$$\begin{aligned} u - v &= f^1, \\ v - u_{xx} + \alpha\theta_x &= f^2, \\ \theta - \theta_{xx} + \alpha v_x &= f^3, \end{aligned}$$

de onde segue,

$$u - u_{xx} + \alpha\theta_x = f^1 + f^2, \tag{2.3.39}$$
$$\theta - \theta_{xx} + \alpha u_x = f^3 + \alpha f_x^1. \tag{2.3.40}$$

Multiplicando (2.3.39) por u, (2.3.40) por θ e integrando, obtemos

$$\int_0^L (|u|^2 + |u_x|^2 + \alpha\theta_x u)\, dx = \int_0^L (f^1 + f^2) u\, dx,$$
$$\int_0^L (|\theta|^2 + |\theta_x|^2 + \alpha\theta u_x)\, dx = \int_0^L (f^3 + \alpha f_x^1)\theta\, dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos,

$$\int_0^L (|u|^2 + |u_x|^2 + |\theta|^2 + |\theta_x|^2)\,dx \leq \int_0^L |f^1 + f^2|^2 + |f^3 + \alpha f_x^1|^2\,dx \leq ||F||.$$

Temos então,

$$\begin{array}{rcl} v & = & u - f^1 \Rightarrow v \in H_0^1(0,L), \\ u_{xx} & = & v + \alpha\theta_x - f^2 \Rightarrow u \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L), \\ \theta_{xx} & = & \theta + \alpha v_x - f^3 \Rightarrow \theta \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L). \end{array}$$

Portanto, mostramos que

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) = D(A),$$

e que,

$$U - AU = F, \;\; \forall \;\; F \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L),$$

isto é:

$$(I - A)U = F,$$

donde segue, para $\lambda = 1$:

$$Im(\lambda I - A) = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L) = H.$$

Assim, A é maximal e, pelo teorema de Lumer-Phillips, A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $\{\mathbf{S}(t) = e^{At}\}$. $\square$

Agora, observamos que, da teoria de Semigrupos, (ver A. Pazy [10]), temos que

$$U(t) = e^{At}U_0, \quad U_0 = (u_0, v_0, \theta_0)$$

é a única solução de

$$\frac{d}{dt}U(t) - AU(t) = 0,$$

$$U(0) = U_0,$$

e $U \in C^0(\ [0,\infty), D(A)\ ) \cap C^1(\ [0,\infty), H\ )$.

Vamos provar a seguir que a solução é exponencialmente estável.

Estabilidade Exponencial

Usaremos o teorema de Gearhart 1.4, para mostrar que o sistema termoelástico é exponencialmente estável.

Nesse sentido, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.5. *O C_0-semigrupo de contrações $(\mathbf{S}(t) = e^{At})_{t>0}$, gerado pelo operador A, é exponencialmente estável, i. e., existem constantes positivas M e w tais que*

$$||\mathbf{S}(t)|| \leq Me^{-wt}.$$

Demonstração. Faremos a prova por contradição. Na primeira etapa, vamos provar que

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}. \tag{2.3.41}$$

Se (2.3.41) não é verdade, então existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $i\beta \in \sigma(A)$. Da imersão compacta de $D(A)$ em H, podemos afirmar que $\sigma(A)$ é discreto, logo existe $w \neq 0$ em H que resolve o seguinte problema espectral, $Aw = i\beta w$. Fazendo o produto interno, temos

$$\langle Aw, w\rangle = \langle i\beta w, w\rangle = i\beta||w||^2.$$

Agora, escrevendo $w = (w^1, w^2, w^3)$, utilizando (2.3.38) e tomando a parte real, obtemos

$$Re\langle Aw, w\rangle = -\int_0^L |w_x^3|^2\, dx = 0. \tag{2.3.42}$$

Resovendo o problema espectral, obtemos o seguinte sistema

$$w^2 = i\beta w^1, \tag{2.3.43}$$

$$w_{xx}^1 - \alpha w_x^3 = i\beta w^2, \tag{2.3.44}$$

$$w_{xx}^3 - \alpha w_x^2 = i\beta w^3. \tag{2.3.45}$$

Por fim, utilizando (2.3.42) em (2.3.43), (2.3.44) e (2.3.45), obtemos que $w = 0$ o que é uma contradição.

Agora, iremos provar a segunda parte. Vamos supor que

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(\lambda I - A)^{-1}\| = \infty, \quad \text{onde} \quad \lambda = i\beta.$$

Nessa condição existe $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\frac{||(\lambda_n I - A)^{-1} V_n||}{||V_n||} \geq n,$$

donde segue que

$$||(\lambda_n I - A)^{-1} V_n|| \geq n||V_n||. \tag{2.3.46}$$

Uma vez que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ e que $\lambda_n \in \rho(A)$, existe uma única seqüência

$$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A),$$

tal que

$$\lambda_n U_n - AU_n = V_n, \quad \text{com} \quad ||U_n|| = 1.$$

Utilizando (2.3.46), $||U_n|| \geq n||\lambda_n U_n - AU_n||$ e, denotando $f_n = \lambda_n U_n - AU_n$, segue que

$$||f_n|| \leq \frac{1}{n}$$

e daí

$$f_n \to 0 \text{ (forte) em } H.$$

Consideremos agora $\lambda_n U_n - AU_n = f_n$, isto é:

$$\lambda_n u^n - v^n = f_n^1, \tag{2.3.47}$$

$$\lambda_n v^n - u_{xx}^n + \alpha\theta_x^n = f_n^2, \tag{2.3.48}$$

$$\lambda_n \theta^n - \theta_{xx}^n + \alpha v_x^n = f_n^3. \tag{2.3.49}$$

Utilizando (2.3.47) em (2.3.48) e em (2.3.49), é fácil ver que

$$\int_0^L (|\theta_{xx}^n|^2 + |u_{xx}^n|^2)dx \leq C$$

e utilizando esse fato em (2.3.48) e (2.3.49), juntamente com

$$\int_0^L (|u_x^n|^2 + |\theta^n|^2 + |v^n|^2)dx = ||U_n||^2 = 1,$$

podemos afirmar que existe (u, v, θ) tal que $(u^n, v^n, \theta^n) \to (u, v, \theta)$ e então

$$\int_0^L (|u_x|^2 + |\theta|^2 + |v|^2)dx = 1. \tag{2.3.50}$$

Vamos mostrar que $\theta^n \to 0$ em L^2.

Fazendo o produto interno de $\lambda_n U_n - AU_n = f_n$ com U_n, obtemos,

$$\lambda_n ||U_n||^2 - \langle AU_n, U_n\rangle = \langle f_n, U_n\rangle,$$

utilizando (2.3.38), obtemos,

$$\lambda_n ||U_n||^2 + \int_0^L |\theta_x^n|^2 dx = \langle f_n, U_n\rangle,$$

isto é,

$$i\,\beta_n ||U_n||^2 + \int_0^L |\theta_x^n|^2 dx = \langle f_n, U_n\rangle.$$

Tomando a parte real e observando que U_n é limitada e $f_n \to 0$, segue que

$$\int_0^L |\theta_x^n|^2 dx \to 0,$$

e da desigualdade de Poincarè, segue que

$$\int_0^L |\theta^n|^2 dx \to 0. \tag{2.3.51}$$

Vamos mostrar que $u_x^n \to 0$.

Dividindo (2.3.48) por λ_n, temos que

$$v^n + \frac{u_{xx}^n}{\lambda_n} + \alpha\frac{\theta_x^n}{\lambda_n} \to 0 \text{ em } L^2$$

e usando a desigualdade de Poincarè, temos que $\frac{\theta_x^n}{\lambda_n}$ e $\frac{u_x^n}{\lambda_n}$ são limitadas em L^2.

Agora, notemos que

$$\begin{aligned} \theta_x^n u_x^n &\leq 2||\theta_x^n||_{L^\infty}||u_x^n||_{L^\infty} \\ &\leq 2||\theta_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||\theta_x^n||_{H^1}^{\frac{1}{2}}||u_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||u_x^n||_{H^1}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e então

$$\frac{\theta_x^n}{\lambda_n}u_x^n \leq 2||\theta_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||\frac{\theta_x^n}{\lambda_n}||_{H^1}^{\frac{1}{2}}||u_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||\frac{u_x^n}{\lambda_n}||_{H^1}^{\frac{1}{2}}.$$

Observando que

$$\begin{aligned} ||\theta_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}} &\to 0, \\ \frac{\theta_x^n}{\lambda_n} &\text{ é limitada}, \\ \text{e que } ||\frac{\theta_x^n}{\lambda_n}||_{H^1}^{\frac{1}{2}}||u_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||\frac{u_x^n}{\lambda_n}||_{H^1}^{\frac{1}{2}} &\text{ é limitada}, \end{aligned}$$

podemos afirmar que $u_x^n \to 0$.

Vamos mostrar que $v_x^n \to 0$.

Substituindo (2.3.47) em (2.3.48), integrando por partes e utilizando a desiguadade de Young, obtemos

$$\frac{1}{2}\lambda_n^2\int_0^L |u^n|^2 dx + \int_0^L |u_x^n|^2 dx + \alpha\int_0^L \theta_x^n u^n dx \leq \int_0^L (f_{x,n}^2 + C|f_n^1|^2)dx,$$

o que implica $\lambda_n u^n \to 0$. Portanto, utilizando essa convergência em (2.3.47), podemos afirmar que $v^n \to 0$.

Pela unicidade do limite segue que $(u, v, \theta) = (0, 0, 0)$, o que é uma contradição com (2.3.50) e portanto o teorema está demonstrado. □

2.4 Sistema Termoviscoelástico

Nesta seção, consideraremos as equações das leis de balanço de massa, momento e energia para materiais termoviscoelásticos. Para esse modelo, o mecanismo de dissipação não é apenas devido ao efeito de viscosidade ou à condução do calor, e sim pela combinação de ambos. Nesse sentido, consideremos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
u_t - \alpha v_x &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), & (2.4.52)\\
v_t - \alpha u_x + \beta\theta_x &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), & (2.4.53)\\
\theta_t - k\theta_{xx} + \beta v_x &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), & (2.4.54)\\
(u(x,0), v(x,0), \theta(x,0)) &= (u_0(x), v_0(x), \theta_0(x)) \ x\in(0,L), & (2.4.55)\\
v(0,t) = v(L,t) &= 0,\ t\geq 0, & (2.4.56)\\
\theta(0,t) = \theta(L,t) &= 0,\ t\geq 0, & (2.4.57)
\end{aligned}$$

onde u o volume específico, v a velocidade e θ a temperatura absoluta são funções conhecidas e α, β, k são constantes positivas com $\beta \neq 0$.

Existência e Unicidade de Solução

O espaço de energia associado ao modelo (2.4.52)-(2.4.57) é

$$H = \{(u^1,u^2,u^3) : u^1 \in L^2_0(0,L),\, u^2 \in L^2(0,L),\, u^3 \in L^2(0,L),\, \int_0^L u(x)dx = 0\}.$$

O produto interno no espaço H é definido de modo usual. Nesse sentido, temos para $U = (u^1,u^2,u^3)$, que

$$\langle U,U\rangle = \int_0^L [\, \alpha u^1 u^2_x + \alpha u^2 u^1_x - \beta u^2 u^3_x - \beta u^3 u^2_x + k u^3 u^3_{xx}\,]\, dx. \tag{2.4.58}$$

No que segue, iremos denotar por $\|U\|^2 = \langle U,U\rangle$ a norma nesse espaço. O sistema (2.4.52)-(2.4.57) pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt}U(t) - AU(t) = 0,$$

onde

$$U(t) = \begin{bmatrix} u^1(t)\\ u^2(t)\\ u^3(t)\end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(\cdot)_x & 0\\ \alpha(\cdot)_x & 0 & -\beta(\cdot)_x\\ 0 & -(\cdot)_x & k(\cdot)_{xx}\end{bmatrix},$$

com

$$D(A) = \{(u^1,u^2,u^3) \in H : \alpha u^1 \in H^1,\, \int_0^L u^1(x)dx = 0,\, u^2 \in H^1_0,\, u^3 \in H^1_0 \cap H^2\}.$$

Em relação ao operador A, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.6. *O operador A gera um C_0-semigrupo de contrações $(e^{At})_{t>0}$ em H.*

Demonstração. Da teoria geral dos espaços de Sobolev, é claro que $D(A)$ é denso em H. Para $U = (u^1, u^2, u^3) \in D(A)$, fazendo integração por partes em (2.4.58) e usando as condições de contorno, obtemos

$$\langle AU, U\rangle = -k \int_0^L |u_x^3|^2 \, dx \leq 0. \tag{2.4.59}$$

Isso mostra que A é dissipativo.

Vamos mostrar que $0 \in \rho(A)$.

Dado $F = \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} \in L^2(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L)$, existe uma única

$$U \in L^2(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L),$$

tal que $AU = F$. Queremos mostrar que $U \in D(A)$. De $AU = F$, temos

$$\alpha u_x^2 = f^1, \tag{2.4.60}$$
$$\alpha u_x^1 - \beta u_x^3 = f^2, \tag{2.4.61}$$
$$-\beta u_x^2 + k u_{xx}^3 = f^3. \tag{2.4.62}$$

Utilizando (2.4.60), temos que

$$u^2 = \frac{1}{\alpha} \int_0^x f^1(s) ds \in H_0^1(0,L),$$

e de (2.4.62), obtemos

$$k u_{xx}^3 = f^3 + \beta u_x^2 \in L^2(0,L). \tag{2.4.63}$$

Segue, de resultados conhecidos das equações elíticas, que (2.4.63) admite uma única solução $u^3 \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$.

Utilizando (2.4.60) e (2.4.62) em (2.4.61), obtemos

$$u^1 = \frac{1}{\alpha} \{ \int_0^x f^2(s) ds + C + \beta u^3 \},$$

com

$$C = -\frac{1}{L}\{\beta \int_0^L u^3(x)dx + \int_0^L \int_0^x f^2(s)ds\, dx\}.$$

Logo, $AU = F$ para $U \in D(A)$ implica que A é inversível com A^{-1} limitado em H e, portanto, $0 \in \rho(A)$.

É fácil ver que A, sendo um operador linear com domínio denso em um espaço de Hilbert H, A dissipativo e $0 \in \rho(A)$, o conjunto resolvente de A, então A é gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contrações $\mathbf{S}(t) = e^{At}$ em H.

Da teoria de semigupos, $U(t) = \mathbf{S}(t)\, U_0$ é a única solução do problema

$$\begin{aligned} U_t - AU &= 0, \\ U(0) &= U_0. \end{aligned}$$

Além disso, $U \in C([0,\infty) : D(A)) \cap C^1([0,\infty) : H)$. □

Agora que mostramos a existência e unicidade de solução, vamos ao principal, que é estudar a estabilidade exponencial do semigrupo dissipativo $\mathbf{S}(t)$ associado ao sistema (2.4.52)-(2.4.57).

Estabilidade Exponencial

Nesta seção, o principal resultado é o seguinte teorema:

Teorema 2.7. *O C_0-semigrupo de contrações $(\mathbf{S}(t) = e^{At})_{t>0}$, gerado por A, é exponencialmente estável, i. e., existem constantes positivas M e w tal que*

$$||\mathbf{S}(t)|| \leq Me^{-wt}.$$

Demonstração. Segue do fato que $0 \in \rho(A)$ e do teorema da aplicação contração que para qualquer número real β com $|\beta| \leq ||A^{-1}||^{-1}$, o operador

$$i\beta I - A = A(i\beta A^{-1} - I)$$

é inversível.

Além disso $||(i\beta I - A)^{-1}||$ é uma função contínua para cada β no intervalo

$$(\ -||A^{-1}||^{-1}, ||A^{-1}||^{-1}\ ).$$

Nesse caso, se

$$\rho(A) \supset \{i\beta \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

não é verdade, então existe $w \in \mathbb{R}$ com $||A^{-1}||^{-1} \leq |w| < \infty$ tal que

$$\{i\beta \mid |\beta| < |\theta|\} \subset \sigma(A)$$

e

$$\sup\{||(i\beta I - A)^{-1}|| \mid |\beta| < |w|\} = \infty.$$

Portanto, existe uma sequência $\beta_n \in \mathbb{R}$ com $\beta_n \to w$, $|\beta_n| < |w|$ e, uma sequência de funções vetoriais complexas $U_n = (u^n, v^n, \theta^n) \in D(A)$ com norma unitária em H tal que

$$||(i\beta_n I - A)U_n|| \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Fazendo o produto interno de $(i\beta_n I - A)U_n$ com U_n em H, usando (2.4.59) e tomando a parte real, obtemos

$$Re\langle\, (i\beta_n I - A)U_n, U_n\, \rangle = \beta \int_0^L |\theta_x^n|^2 \; dx.$$

Notando que (U_n) é limitada e que $(i\beta_n I - A)U_n \to 0$, temos

$$Re\langle\, (i\beta_n I - A)U_n, U_n\, \rangle = \beta \int_0^L |\theta_x^n|^2 \; dx \to 0\ . \qquad (2.4.64)$$

Temos então a seguinte convergência

$$i\beta_n ||U_n||^2 + \beta \int_0^L |\theta_x^n|^2 \; dx \to 0,$$

de onde segue que $i\beta_n ||U_n||^2 \to 0$.

Agora, observe que $\beta_n \to w$ e $\beta_n ||U_n||^2 \to 0$ implica $||U_n||^2 \to 0$, o que é uma contradição com o fato de $||U_n|| = 1$.

Para provarmos a outra condição do teorema de Gearhart, vamos supor que

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| < \infty$$

não é verdade, logo existe uma seqüência $\beta_n \in \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \infty$ e uma seqüência de vetores complexos $U_n \in D(A)$ tal que

$$||(i\beta_n I - A)U_n|| \to 0.$$

Seguindo as mesmas idéias do caso anterior, obteremos novamente uma contradição e portanto a demonstração do teorema está completa. $\square$

2.5 Exercícios

01. Seja α uma constante real positiva, prove o decaimento exponencial da solução do seguinte problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \alpha\, u_t &= 0 \ \text{ em } \ (0,L)\times(0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \ \ x \in (0,L), \\ u_t(x,0) &= u_1(x), \ \ x \in (0,L), \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) &= 0, \ \ t \geq 0. \end{aligned}$$

02. Seja α uma constante real positiva, prove o decaimento exponencial da solução do seguinte sistema viscoelástico

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \alpha\, u_{txx} &= 0 \ \text{ em } \ (0,L)\times(0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \ \ x \in (0,L), \\ u_t(x,0) &= u_1(x), \ \ x \in (0,L), \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \ \ t \geq 0. \end{aligned}$$

03. Prove a estabilidade exponencial da solução do sistema viscoelástico com memória

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + g * u_{xx} &= 0 \ \text{ em } \ (0,L)\times(0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \ \ x \in (0,L), \\ u_t(x,0) &= u_1(x), \ \ x \in (0,L), \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \ \ t \geq 0. \end{aligned}$$

onde

$$g * u_{xx}(x,t) = \int_0^t g(t-s) u_{xx}(x,s)\, ds$$

e $g(s)$ é o núcleo histórico que satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{array}{ll} (i) & g(s) \in C^2(0,\infty) \cap C(0,\infty), \ \ g'(s) \in L^1(0,\infty). \\ (ii) & g(s) > 0, \ \ g'(s) < 0, \ \ g''(s) > 0 \ \text{ em } \ (0,\infty). \\ (iii) & g(+\infty) = 1. \end{array}$$

04. Mostre o decaimento exponencial da solução do seguinte sistema termoelástico

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \alpha\, \theta_x &= 0 \ \text{ em } \ (0,L)\times(0,\infty), \\ \theta_t - \theta_{xx} + \alpha u_{xt} &= 0 \ \text{ em } \ (0,L)\times(0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \ \ x \in (0,L), \\ u_t(x,0) &= u_1(x), \ \ x \in (0,L), \\ \theta(x,0) &= \theta_0(x), \ \ x \in (0,L), \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \ \ t \geq 0, \\ \theta_x(0,t) = \theta_x(L,t) &= 0, \ \ t \geq 0. \end{aligned}$$

05. Mostre o decaimento exponencial da solução do seguinte sistema termoelástico com memória

$$\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} + \alpha\,\theta_x + g * u_{xx} &= 0 \ \text{ em } \ (0,L)\times(0,\infty),\\
\theta_t - \theta_{xx} + \alpha u_{xt} &= 0 \ \text{ em } \ (0,L)\times(0,\infty),\\
u(x,0) &= u_0(x), \ \ x \in (0,L),\\
u_t(x,0) &= u_1(x), \ \ x \in (0,L),\\
\theta(x,0) &= \theta_0(x), \ \ x \in (0,L),\\
u(0,t) = u(L,t) &= 0, \ \ t \geq 0,\\
\theta(0,t) = \theta(L,t) &= 0, \ \ t \geq 0,
\end{aligned}$$

onde

$$g * u_{xx}(x,t) = \int_0^t g(t-s)u_{xx}(x,s)\,ds$$

e $g(s)$ é o núcleo histórico que satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{array}{rl}
(i) & g(s) \in C^2(0,\infty)\cap C(0,\infty), \ \ g'(s) \in L^1(0,\infty).\\
(ii) & g(s) > 0, \ \ g'(s) < 0, \ \ g''(s) > 0 \ \text{ em } \ (0,\infty).\\
(iii) & g(+\infty) = 1.
\end{array}$$

06. Mostre a estabilidade exponencial do semigrupo gerado pelo seguinte sistema dissipativo

$$\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= (v-u) + (v-u)_t \ \text{ em } \ (0,L)\times(0,\infty),\\
v_{tt} - v_{xx} &= (u-v) + (u-v)_t \ \text{ em } \ (0,L)\times(0,\infty),\\
u(x,0) &= u_0(x), \ \ x \in (0,L),\\
u_t(x,0) &= u_1(x), \ \ x \in (0,L),\\
v(x,0) &= v_0(x), \ \ x \in (0,L),\\
v_t(x,0) &= v_1(x), \ \ x \in (0,L),\\
u(0,t) = u(L,t) &= 0, \ \ t \geq 0,\\
v(0,t) = v(L,t) &= 0, \ \ t \geq 0.
\end{aligned}$$

07. Mostre o decaimento exponencial da solução do seguinte sistema dissipativo

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= (v-u) + (v-u)_t \ \text{ em } \ (0,L)\times(0,\infty),\\
v_t - v_{xx} &= (u-v) + (u-v)_t \ \text{ em } \ (0,L)\times(0,\infty),\\
u(x,0) &= u_0(x), \ \ x \in (0,L),\\
v(x,0) &= v_0(x), \ \ x \in (0,L),\\
u(0,t) = u(L,t) &= 0, \ \ t \geq 0,\\
v(0,t) = v(L,t) &= 0, \ \ t \geq 0.
\end{aligned}$$

08. Seja $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $\alpha \in L^\infty(0,L)$ e $\int_0^L \alpha(x)\,dx > 0$. Mostre o decaimento exponencial da solução do seguinte sistema elástico com dissipação localmente distribuída

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \alpha(x)\,u_t &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \;\; x \in (0,L), \\ u_t(x,0) &= u_1(x), \;\; x \in (0,L), \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) &= 0, \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

09. Mostre o decaimento exponencial para as leis de balanço de massa, momento e energia da p-ésima potência do fluido Newtoniano abaixo descrito

$$\begin{aligned} u_t &= v_x \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \\ v_t &= (-\frac{\theta}{u^p} + \mu\frac{v_x}{u})_x \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \\ c_\nu\theta_t &= (-\frac{\theta}{u^p} + \mu\frac{v_x}{u})\,v_x + (k\frac{\theta_x}{u}) \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \\ (u(x,0),v(x,0),\theta(x,0)) &= (u_0(x),v_0(x),\theta_0(x)) \;\; x \in (0,L), \\ v(0,t) = v(L,t) &= 0, \;\; t \geq 0, \\ \theta(0,t) = \theta(L,t) &= 0, \;\; t \geq 0, \end{aligned}$$

onde u o volume específico, v a velocidade e θ a temperatura absoluta são funções conhecidas e μ, c_ν, k, p são constantes positivas com $p \geq 1$.

10. Mostre o decaimento exponencial para as leis de balanço de massa, momento e energia do seguinte sistema termoviscoelástico

$$\begin{aligned} u_t - \alpha v_x &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \\ v_t - \alpha u_x + \beta\theta_x - v_{xx} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \\ \theta_t - k\theta_{xx} + \beta v_x &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \\ (u(x,0),v(x,0),\theta(x,0)) &= (u_0(x),v_0(x),\theta_0(x)) \;\; x \in (0,L), \\ v(0,t) = v(L,t) &= 0, \;\; t \geq 0, \\ \theta(0,t) = \theta(L,t) &= 0, \;\; t \geq 0, \end{aligned}$$

onde u o volume específico, v a velocidade e θ a temperatura absoluta são funções conhecidas e α, β, k são constantes positivas com $\beta \neq 0$.

Capítulo 3

Vigas de Timoshenko

3.1 Sobre o Modelo

Tecnologias modernas e aplicações à ciência requerem modelos matemáticos de sólidos que facilitem o cálculo das deformações e tensões com suficiente precisão e sem excessiva análise matemática.

O modelo que analizaremos, típico e fundamental na área de estrutura mecânica, torna possivel atingir este objetivo. Por essa razão, é bastante utilizado na área de engenharia.

Definimos uma viga como um membro de estrutura delgada, carregada transversalmente cujo comprimento é grande em relação à largura e seção transversal plana. Iremos assumir que a área da seção transversal da viga é simétrica com respeito ao eixo z e que todas as cargas transversais agindo sobre a viga possuem uma simetria semelhante.

O modelo que analizaremos foi deduzido por S. P. Timoshenko [18] e consiste em uma aproximação da Teoria da Elasticidade Tridimensional. Quando levamos em consideração a variável z da teoria espacial, resulta o modelo de Kirchhoff e pode ser visto em Lagnese-Lions [07] que a solução única desse problema aproximado converge, em uma adequada topologia, para a solução do modelo tridimensional de Kirchhoff sujeito a apropriadas condições de fronteira.

Nesse sentido, as pequenas vibrações transversais de uma viga são dadas por um sistema unidimensional acoplado de duas equações diferenciais parciais

$$\rho u_{tt} = (K(u_x - \psi))_x, \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \tag{3.1.1}$$

$$I_\rho \psi_{tt}(x,t) = (EI\psi_x)_x + K(u_x - \psi), \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \tag{3.1.2}$$

onde t representa o tempo e x a coordenada ao longo da viga. Nesse modelo, estamos supondo que, em sua posição de equilíbrio, a viga tem comprimento finito L.

A função $u = u(x,t)$ representa o deslocamento transversal de uma seção plana da viga e $\psi = \psi(x,t)$ representa o ângulo de rotação de um filamento da viga. Os coeficientes ρ, I_ρ, E, I, e K são massa por unidade de comprimento, momento polar, módulo de elasticidade de Young, momento de inércia e módulo de cisalhamento, respectivamente.

Denotando $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = I_\rho$, $b = EI$, $k = K$, obtemos diretamente de (3.1.1)-(3.1.2) o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \qquad (3.1.3)\\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty). \qquad (3.1.4) \end{aligned}$$

Com essa notação, definimos a energia total da viga por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L [\rho_1|u_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k|u_x - \psi|^2]dx.$$

A seguir, iremos mencionar alguns resultados recentes sobre a estabilidade desse modelo.

O caso com duas forças de controle na fronteira foi estudado por J. U. Kin e Y. Renardy [05]. Os autores provaram o decaimento exponencial da energia $E(t)$ usando técnica multiplicativa e estimativas numéricas para os autovalores do operador associado ao sistema. J. E. Lagnese e J. L. Lions [07] estudaram a controlabilidade exata. S. W. Taylor [17] estudou o controle na fronteira para o modelo com características físicas variáveis. F. Ammar-Khodja [02], mostrou o decaimento exponencial da energia para o sistema com memória. C. A. Raposo [11] estudou a estabilização uniforme para o correspondente problema de transmissão com memória. D. H. Shi e D. X. Feng [16] mostraram o decaimento exponencial para a energia com duas dissipações localmente distribuidos.

Neste capítulo, iremos estudar a estabilidade exponencial do semigrupo dissipativo associado ao modelo de Timoshenko em três situações distintas: (i) O caso em que o atrito atua de modo uniforme nas vibrações transversais e no ângulo de rotação dos filamentos da viga. (ii) O caso em que o atrito atua de forma localmente distribuída nas vibrações transversais e no ângulo de rotação dos filamentos da viga. (iii) O caso em que o atrito atua de forma localmente distribuída apenas nas vibrações transversais da viga.

3.2 O Sistema com Atrito

Nesta seção, iremos provar o decaimento exponencial para a solução (u, ψ) do seguinte modelo

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + u_t &= 0, \quad \text{in} \quad (0,L) \times (0,\infty), \quad (3.2.5)\\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + \psi_t &= 0, \quad \text{in} \quad (0,L) \times (0,\infty), \quad (3.2.6)\\ u(0,t) = u(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) &= 0, \quad t > 0. \quad (3.2.7) \end{aligned}$$

Assumiremos a existência e unicidade de solução forte para o problema (3.2.5)-(3.2.7), a qual pode ser provada utilizando semigrupos (ver A. Soufyane [14]) ou método de Faedo-Galerkin (ver C. A. Raposo [11]). O problema é bem posto para dados iniciais (u_0, u_1), (ψ_0, ψ_1) no espaço de Sobolev $[H^2(0,L) \times H_0^1(0,L)]^2$. Soluções fracas e energia também estão definidas em $[H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)]^2$.

Estabilidade Exponencial

Consideremos $H = [H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)]^2$ o espaço de energia associado ao sistema (3.2.5)-(3.2.7). O produto interno neste espaço é definido para

$$U_j = (u^j, v^j, w^j, y^j)^T \in H, \; j = 1, 2$$

do seguinte modo:

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \int_0^L [k(u_x^1 - w^1)(u_x^2 - w^2) + \rho_1 v^1 v^2 + \rho_2 y^1 y^2 + b w^1 w^2] dx.$$

Na seqüência, denotaremos por $\|U\|^2 = \langle U, U \rangle$ a norma neste espaço. O sistema (3.2.5)-(3.2.7) pode ser escrito do seguinte modo

$$\frac{d}{dt} U(t) - AU(t) = 0,$$

onde

$$U(t) = \begin{bmatrix} u \\ u_t \\ \psi \\ \psi_t \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}(\cdot)_{xx} & \frac{-k}{\rho_1} & \frac{1}{\rho_1}(\cdot)_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{k}{\rho_2}(\cdot)_x & 0 & \frac{k}{\rho_2}(\cdot)_{xx} - \frac{k}{\rho_2} & \frac{-1}{\rho_2} \end{bmatrix},$$

com $D(A) = [(H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \times H_0^1(0,L)]^2$.

Sobre o operador A, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *O operador A gera um C_0-semigrupo de contrações $(e^{At})_{t>0}$ em H.*

Demonstração. Ver [16]. □

O operador A satisfaz a seguinte propriedade:

Propriedade 3.1. *O operador A é dissipative.*

Demonstração. Seja $U = (u, u_t, \psi, \psi_t)^T$, temos

$$\langle AU, U\rangle = -\int_0^L [\frac{1}{\rho_1}|u_t|^2 + \frac{1}{\rho_2}|\psi_t|^2]dx. \tag{3.2.8}$$

□

Nesta seção, o principal resultado é o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *O C_0-semigrupo de contrações $(e^{At})_{t>0}$, gerado por A, é exponencialmente estável.*

Demonstração. Para provar a estabilidade exponencial de e^{At} , resta verificar as condições (1.4.5) e (1.4.6) do teorema 1.4.

Primeiro, iremos provar que

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}. \tag{3.2.9}$$

Vamos raciocinar por contradição. Suponha que a conclusão de (3.2.9) é falsa. Então existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $i\beta \in \sigma(A)$ e, da imersão compacta de $D(A)$ em H, temos que o espectro do operador A é discreto e portanto $i\beta$ é um autovalor.

Seja $U = (u, u_t, v, v_t)^T$, $U \neq 0$ tal que $AU = i\beta U$. Usando a definição de A, segue que $AU = i\beta U$ se, e somente se

$$ku_{xx} - kv_x + \rho_1\beta^2 u = i\beta u, \tag{3.2.10}$$

$$bv_{xx} - ku_x + kv + \rho_2\beta^2 v = i\beta v. \tag{3.2.11}$$

Multiplicando a equação (3.2.10) por u, obtemos

$$ku_{xx}u - kv_x u + \rho_1\beta^2 u^2 = i\beta u^2,$$

e fazendo integração por partes em $(0, L)$, segue que

$$\int_0^L \beta|u|^2 dx = 0, \quad \text{o que implica} \quad u = 0.$$

Multiplicando a equação (3.2.11) por v, obtemos

$$bv_{xx}v - ku_x v + kv^2 + \rho_2\beta^2 v^2 = i\beta v^2,$$

e fazendo integração por partes em $(0, L)$, segue que

$$\int_0^L \beta|v|^2 dx = 0, \quad \text{o que implica} \quad v = 0.$$

Agora, é fácil ver que $u = v = 0$ é solução do sistema

$$\begin{aligned} ku_{xx} - kv_x + \rho_1\beta^2 u &= i\beta\alpha(x)u, \\ bv_{xx} - ku_x + kv &= -\rho_2\beta^2 v. \end{aligned}$$

Logo, provamos que $U = 0$, o que é uma contradição. Portanto, podemos afirmar que

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Vamos provar que

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| < \infty. \tag{3.2.12}$$

Suponhamos que a conclusão de (3.2.12) é falsa, isto é,

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| = \infty.$$

Existem seqüências $(V_n) \in H$ e $\beta_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|(i\beta_n I - A)^{-1} V_n\| \geq n\|V_n\| \quad \forall\, n > 0.$$

De $i\beta_n \in \rho(A)$, temos que existe uma única seqüência $(U_n) \in D(A)$ tal que

$$i\beta_n U_n - AU_n = V_n, \quad \|U_n\| = 1,$$

isto é, $U_n = (i\beta_n I - A)^{-1} V_n$ e $\|U_n\| \geq n\|i\beta_n U_n - AU_n\|$.

Agora, denotamos $F_n = i\beta_n U_n - AU_n$ e segue que $\|F_n\| \leq n^{-1}$ e então

$$F_n \to 0 \quad \text{(forte)} \quad \text{em} \quad H \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Seja $u_t = v$ e $\psi_t = \phi$, denotamos

$$U_n = (u^n, v^n, \psi^n, \phi^n)^T \quad \text{e} \quad F_n = (f_1^n, f_2^n, f_3^n, f_4^n)^T \in H.$$

Com essa notação, temos

$$\|U_n\|^2 = \int_0^L [k|u_x^n - \psi^n|^2 + \rho_1|v^n|^2 + \rho_2|\phi^n|^2 + b|\psi_x^n|^2]dx. \tag{3.2.13}$$

De $i\beta_n U_n - AU_n = F_n$, temos as seguintes equações em $L^2(0, L)$

$$i\beta_n u^n - v^n = f_1^n, \tag{3.2.14}$$

$$i\beta_n v^n - \frac{k}{\rho_1}(u_x^n - \psi^n)_x - \frac{1}{\rho_1} v^n = f_2^n, \tag{3.2.15}$$

$$i\beta_n \psi^n - \phi^n = f_3^n, \tag{3.2.16}$$

$$i\beta_n \phi^n - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}^n + \frac{k}{\rho_2}(u_x^n - \psi^n) - \frac{1}{\rho_2}\phi^n = f_4^n. \tag{3.2.17}$$

Fazendo o produto interno de $i\beta_n U_n - AU_n = F_n$ com U_n, temos

$$i\beta_n \|U_n\|^2 - \langle AU_n, U_n\rangle = \langle F_n, U_n\rangle,$$

tomando a parte real e utilizando (3.2.8), obtemos

$$\int_0^L [\frac{1}{\rho_1}|v^n|^2 + \frac{1}{\rho_2}|\phi^n|^2]dx = Re\langle F_n, U_n\rangle.$$

Observando que (U_n) é limitado e que $F_n \to 0$, temos

$$\int_0^L |v^n|^2 dx \to 0, \tag{3.2.18}$$

$$\int_0^L |\phi^n|^2 dx \to 0, \tag{3.2.19}$$

o que segue

$$v^n \to 0 \quad \text{(forte)} \quad \text{em} \quad L^2(0,L), \tag{3.2.20}$$

$$\phi^n \to 0 \quad \text{(forte)} \quad \text{em} \quad L^2(0,L). \tag{3.2.21}$$

Agora, consideremos a equação

$$-\beta_n \|U_n\|^2 - i\langle AU_n, U_n\rangle = i\langle F_n, U_n\rangle,$$

e usando (3.2.8), obtemos

$$-\beta_n \|U_n\|^2 - i\int_0^L [\frac{1}{\rho_1}|v^n|^2 + \frac{1}{\rho_2}|\phi^n|^2]dx = i(F_n, U_n)$$

o que implica $\beta_n \|U_n\|^2 \to 0$ e então $\beta_n |v^n|^2 \to 0$ e $\beta_n |\phi^n|^2 \to 0$.

Agora, é fácil ver que

$$\beta_n |v^n|^2 \to 0 \quad \text{e} \quad v^n \to 0 \quad \text{implica} \quad \beta_n v^n \to 0,$$

$$\beta_n |\phi^n|^2 \to 0 \quad \text{e} \quad \phi^n \to 0 \quad \text{implica} \quad \beta_n \phi^n \to 0.$$

Usando a equação (3.2.15), temos

$$\int_0^L |(u_x^n - \psi^n)_x|^2 dx \to 0$$

e usando a desigualdade de Poincarè, obtemos

$$\int_0^L |u_x^n - \psi^n|^2 dx \to 0. \tag{3.2.22}$$

Combinando (3.2.17), (3.2.21) e (3.2.22), segue que

$$\int_0^L |\psi_{xx}^n|^2 dx \to 0, \tag{3.2.23}$$

e usando novamente a desigualdade de Poincarè, obtemos

$$\int_0^L |\psi_x^n|^2 dx \to 0. \tag{3.2.24}$$

Finalmente, de $(3.2.20), (3.2.21), (3.2.22), (3.2.24)$, obtemos $||U_n|| \to 0$, o que é uma contradição e, portanto, temos que

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| < \infty.$$

Tendo verificado as condições (1.4.5) e (1.4.6) do teorema 1.4, a demonstração está completa. □

3.3 Duas Dissipações Localmente Distribuídas

Nesta seção, iremos considerar o problema com duas dissipações localmente distribuídas. Isso significa que, diferentemente do problema da seção anterior, onde o atrito atuava de modo uniforme em toda a viga, agora o atrito atua em cada ponto da viga levando-se em conta as propriedades locais do material constitutivo. Nesse sentido, iremos provar o decaimento exponencial para a solução (u, ψ) do seguinte modelo

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + a(x)u_t &= 0, \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), & (3.3.25)\\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + b(x)\psi_t &= 0, \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), & (3.3.26)\\ u(0, t) = u(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) &= 0, \qquad t > 0, & (3.3.27) \end{aligned}$$

onde a e b são funções contínuas e positivas, isto é, $a(x) \geq a > 0$, $b(x) \geq b > 0$.

Assumiremos a existência e unicidade de solução para o problema de (3.3.25)-(3.3.27), a qual pode ser provada por semigrupos (ver A. Soufyane [14]) ou método de Faedo-Galerkin (ver C. A. Raposo [11]). Esse problema é bem posto para dados iniciais (u_0, u_1), (ψ_0, ψ_1) no espaço de Sobolev $[H^2(0, L) \times H_0^1(0, L)]^2$. Soluções fracas e energia também estão definidas no espaço $[H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^2$.

Estabilidade Exponencial

Consideremos, então, o espaço de energia H, associado ao sistema (3.3.25)-(3.3.27), onde $H = [H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^2$. O produto interno nesse espaço é definido para

$$U_j = (u^j, v^j, w^j, y^j)^T \in H, \ j = 1, 2$$

do seguinte modo:

$$\langle U_1, U_2\rangle = \int_0^L [k(u_x^1 - w^1)(u_x^2 - w^2) + \rho_1 v^1 v^2 + \rho_2 y^1 y^2 + b w^1 w^2]dx.$$

Denotaremos por $\|U\|^2 = \langle U, U\rangle$ a norma no espaço de energia. O sistema (3.3.25)-(3.3.27) pode ser escrito do seguinte modo

$$\frac{d}{dt}U(t) - AU(t) = 0,$$

onde

$$U(t) = \begin{bmatrix} u \\ u_t \\ \psi \\ \psi_t \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}(\cdot)_{xx} & \frac{-1}{\rho_1}a(x) & \frac{1}{\rho_1}(\cdot)_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{k}{\rho_2}(\cdot)_x & 0 & \frac{k}{\rho_2}(\cdot)_{xx} - \frac{k}{\rho_2} & \frac{-1}{\rho_2}b(x) \end{bmatrix},$$

com $D(A) = [(H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \times H_0^1(0, L)]^2$.

Consideremos agora o seguinte teorema, que estabelece uma importante propriedade do operador A.

Teorema 3.3. *O operador A gera um C_0-semigrupo de contrações $(e^{At})_{t>0}$ em H.*

Demonstração. Ver [16]. □

Uma outra propriedade importante do operator A é a seguinte:

Propriedade 3.2. *O operator A é dissipativo.*

Demonstração. Seja $U = (u, u_t, \psi, \psi_t)^T$, temos

$$\langle AU, U\rangle = -\int_0^L [\frac{1}{\rho_1}a(x)|u_t|^2 + \frac{1}{\rho_2}b(x)|\psi_t|^2]dx. \tag{3.3.28}$$

□

Nesta seção, o principal resultado é o seguinte teorema:

Teorema 3.4. *O C_0-semigrupo de contrações $(e^{At})_{t>0}$, gerado por A, é exponencialmente estável.*

Demonstração. Para provar a estabilidade exponencial de e^{At}, basta verificar as condições (1.4.5) e (1.4.6) do teorema 1.4.

Primeiro, iremos provar que

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}. \tag{3.3.29}$$

Raciocinando por contradição, suponha que a conclusão (3.3.29) é falsa. Existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $i\beta \in \sigma(A)$ e da imersão compacta de $D(A)$ in H, $i\beta$ é autovalor.

Seja $U = (u, u_t, v, v_t)^T$, $U \neq 0$ tal que $AU = i\beta U$. Usando a definição de A, segue que $AU = i\beta U$ se, e somente se

$$ku_{xx} - kv_x + \rho_1\beta^2 u = i\beta a(x)u, \tag{3.3.30}$$

$$bv_{xx} - ku_x + kv + \rho_2\beta^2 v = i\beta b(x)v. \tag{3.3.31}$$

Multiplicando a equação (3.3.30) por u, temos

$$ku_{xx}u - kv_x u + \rho_1\beta^2 u^2 = i\beta a(x)u^2,$$

fazendo integração por partes em $(0, L)$, obtemos

$$\int_0^L \beta a(x)|u|^2 dx = 0, \quad \text{o que implica} \quad u = 0.$$

Agora, multiplicando a equação (3.3.31) por v, temos

$$bv_{xx}v - ku_x v + kv^2 + \rho_2\beta^2 v^2 = i\beta b(x)v^2,$$

fazendo integração por partes em $(0, L)$, obtemos

$$\int_0^L \beta b(x)|v|^2 dx = 0, \quad \text{o que implica} \quad v = 0.$$

É fácil ver que $u = v = 0$ é solução do sistema

$$\begin{aligned} ku_{xx} - kv_x + \rho_1\beta^2 u &= i\beta a(x)u, \\ bv_{xx} - ku_x + kv + \rho_2\beta^2 v &= i\beta b(x)v. \end{aligned}$$

Logo, temos uma contradição pois $U \neq 0$ e isso completa a prova de

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \Re\}.$$

Agora, provaremos que

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| < \infty. \tag{3.3.32}$$

Suponhamos que (3.3.32) é falso, isto é,

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| = \infty.$$

Existem sequências $(V_n) \in H$ e $\beta_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|(i\beta_n I - A)^{-1} V_n\| \geq n\|V_n\| \quad \forall\, n > 0.$$

De $i\beta_n \in \rho(A)$, temos que existe uma única sequência $(U_n) \in D(A)$ tal que

$$i\beta_n U_n - AU_n = V_n, \quad \|U_n\| = 1,$$

isto é, $U_n = (i\beta_n I - A)^{-1}V_n$ e $\|U_n\| \geq n\|i\beta_n U_n - AU_n\|$.

Denotamos $F_n = i\beta_n U_n - AU_n$, então $\|F_n\| \leq n^{-1}$ e

$$F_n \to 0 \quad \text{(forte)} \quad \text{em} \quad H \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Seja $u_t = v$ e $\psi_t = \phi$, denotamos $U_n = (u^n, v^n, \psi^n, \phi^n)^T$ e

$$F_n = (f_1^n, f_2^n, f_3^n, f_4^n)^T \in H.$$

Com essa notação, temos

$$\|U_n\|^2 = \int_0^L [k|u_x^n - \psi^n|^2 + \rho_1|v^n|^2 + \rho_2|\phi^n|^2 + b|\psi_x^n|^2]dx. \tag{3.3.33}$$

De $i\beta_n U_n - AU_n = F_n$ deduzimos as seguintes equações em $L^2(0, L)$.

$$i\beta_n u^n - v^n = f_1^n, \tag{3.3.34}$$

$$i\beta_n v^n - \frac{k}{\rho_1}(u_x^n - \psi^n)_x - \frac{1}{\rho_1}a(x)v^n = f_2^n, \tag{3.3.35}$$

$$i\beta_n \psi^n - \phi^n = f_3^n, \tag{3.3.36}$$

$$i\beta_n \phi^n - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}^n + \frac{k}{\rho_2}(u_x^n - \psi^n) - \frac{1}{\rho_2}b(x)\phi^n = f_4^n. \tag{3.3.37}$$

Agora, fazendo o produto interno de $i\beta_n U_n - AU_n = F_n$ com U_n, temos

$$i\beta_n\|U_n\|^2 - \langle AU_n, U_n\rangle = \langle F_n, U_n\rangle,$$

e tomando a parte real, obtemos

$$\int_0^L [\frac{1}{\rho_1}a(x)|v^n|^2 + \frac{1}{\rho_2}b(x)|\phi^n|^2]dx = Re\langle F_n, U_n\rangle.$$

Notando que (U_n) é limitada e que $F_n \to 0$, deduzimos que

$$\int_0^L a(x)|v^n|^2 dx \to 0, \tag{3.3.38}$$

$$\int_0^L b(x)|\phi^n|^2 dx \to 0, \tag{3.3.39}$$

de onde segue que

$$v^n \to 0 \quad \text{(forte)} \quad \text{em} \quad L^2(0, L), \tag{3.3.40}$$

$$\phi^n \to 0 \quad \text{(forte)} \quad \text{em} \quad L^2(0,L). \tag{3.3.41}$$

Consideremos a equação

$$-\beta_n\|U_n\|^2 - i\langle AU_n, U_n\rangle = i\langle F_n, U_n\rangle.$$

Usando (3.3.28), obtemos

$$-\beta_n\|U_n\|^2 - i\int_0^L [\frac{1}{\rho_1}a(x)|v^n|^2 + \frac{1}{\rho_2}b(x)|\phi^n|^2]dx = i\langle F_n, U_n\rangle$$

o que implica $\beta_n\|U_n\|^2 \to 0$ e então $\beta_n|v^n|^2 \to 0$ e $\beta_n|\phi^n|^2 \to 0$.

Agora, é fácil ver que:

$\beta_n|v^n|^2 \to 0$ e $v^n \to 0$ implica $\beta_n v^n \to 0$,

$\beta_n|\phi^n|^2 \to 0$ e $\phi^n \to 0$ implica $\beta_n\phi^n \to 0$.

Usando a equação (3.3.35), temos

$$\int_0^L |(u_x^n - \psi^n)_x|^2 dx \to 0$$

e pela desigualdade de Poincarè, segue

$$\int_0^L |u_x^n - \psi^n|^2 dx \to 0. \tag{3.3.42}$$

Combinando (3.3.37), (3.3.41) e (3.3.42), segue que

$$\int_0^L |\psi_{xx}^n|^2 dx \to 0, \tag{3.3.43}$$

usando novamente a desigualdade de Poincarè, obtemos

$$\int_0^L |\psi_x^n|^2 dx \to 0. \tag{3.3.44}$$

Finalmente, utilizando $(3.3.40), (3.3.41), (3.3.42), (3.3.44)$, concluimos que $||U_n|| \to 0$, o que é uma contradição e, portanto, temos provado que

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| < \infty.$$

Tendo verificadas as condições (1.4.5) e (1.4.6) do teorema 1.4 a demonstração está completa. □

3.4 Uma Dissipação Localmente Distribuída

Recentemente, A. Soufyany e A. Wehbe [15] provaram a estabilização uniforme do sistema de Timoshenko levando em conta uma única dissipação localmente distribuida e localizada no ângulo de rotação ψ dos filamentos da viga. Nesta seção, iremos provar que é possível obter a estabilidade exponencial localizando a dissipação apenas nas vibrações transversais u da viga. O resultado que obtemos é interessante, sobretudo pelo fato de que sob apropriadas condições a solução u do modelo de vigas de Timoshenko converge para a solução única do modelo de vigas tridimensional de Kirchhoff, enquanto que ψ foi introduzido por Timoshenko para compensar o termo espacial desprezado na dedução do seu modelo.

Nesse sentido considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + \alpha(x) u_t &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), && (3.4.45)\\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), && (3.4.46)\\ u(0,t) = u(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) &= 0, \qquad t > 0. && (3.4.47) \end{aligned}$$

onde α é uma função contínua e positiva, isto é, $\alpha(x) \geq a > 0$.

Assumiremos a existência e unicidade de solução para o problema (3.4.45)-(3.4.47), a qual pode ser provada por semigrupos (ver A. Soufyane [14]) ou método de Faedo-Galerkin (ver C. A. Raposo [11]). O problema é bem posto para dados iniciais (u_0, u_1), (ψ_0, ψ_1) no espaço de Sobolev $[H^2(0,L)\times H_0^1(0,L)]^2$. Soluções fracas e energia são também definidas em $[H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)]^2$.

Estabilidade Exponencial

O espaço de energia associado ao sistema (3.4.45)-(3.4.47) é

$$H = [H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)]^2.$$

O produto interno nesse espaço é definido para

$$U_j = (u^j, v^j, w^j, y^j)^T \in H, \; j = 1,2,$$

do seguinte modo

$$\langle U_1, U_2\rangle = \int_0^L [k(u_x^1 - w^1)(u_x^2 - w^2) + \rho_1 v^1 v^2 + \rho_2 y^1 y^2 + b w^1 w^2] dx.$$

A seguir, iremos denotar por $\|U\|^2 = \langle U, U\rangle$ a norma nesse espaço. O sistema (3.4.45)-(3.4.47) pode ser escrito do seguinte modo

$$\frac{d}{dt}U(t) - AU(t) = 0,$$

onde

$$U(t)=\begin{bmatrix} u \\ u_t \\ \psi \\ \psi_t \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}(\cdot)_{xx} & -\frac{k}{\rho_1}\alpha(x) & \frac{1}{\rho_1}(\cdot)_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{k}{\rho_2}(\cdot)_x & 0 & \frac{k}{\rho_2}(\cdot)_{xx}-\frac{k}{\rho_2} & 0 \end{bmatrix},$$

com $D(A)=[(H^2(]0,L[)\cap H_0^1(]0,L[))\times H_0^1(]0,L[)]^2$.

Sobre o operador A, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.5. *O operador A gera um C_0-semigrupo de contrações $(e^{At})_{t>0}$ em H.*

Demonstração. Ver [16]. □

O operador A satisfaz a seguinte propriedade:

Propriedade 3.3. *O operador A é dissipativo.*

Demonstração. Seja $U=(u,u_t,\psi,\psi_t)^T$, temos

$$\begin{aligned} \langle AU,U\rangle &= -\int_0^L \alpha(x)|u_t|^2dx \\ &\leq -a\int_0^L |u_t|^2dx \end{aligned} \tag{3.4.48}$$

□

Nesta seção, o principal resultado é o seguinte teorema:

Teorema 3.6. *Seja $\alpha\in C(0,L)$ e $\alpha(x)\geq a>0$. Então e^{At} é exponencialmente estável.*

Demonstração. Para provar a estabilidade exponencial de e^{At} , basta verificar as condições (1.4.5) e (1.4.6) do teorema 1.4. Primeiro, iremos provar que

$$\rho(A)\supseteq\{i\beta,\beta\in\mathbb{R}\}. \tag{3.4.49}$$

Suponha que a conclusão (3.4.49) é falsa. Existe $\beta\in\mathbb{R}$ tal que $i\beta\in\sigma(A)$ e da imersão compacta de $D(A)$ em H, $i\beta$ é um autovalor. Seja $U=(u,u_t,v,v_t)^T$, $U\neq 0$ tal que $AU=i\beta U$. Usando a definição de A segue que $AU=i\beta U$ se, e somente se,

$$ku_{xx}-kv_x+\rho_1\beta^2u=i\beta\alpha(x)u, \tag{3.4.50}$$

$$bv_{xx}-ku_x+kv=-\rho_2\beta^2v. \tag{3.4.51}$$

Multiplicando a equação (3.4.50) por u, temos

$$ku_{xx}u-kv_xu+\rho_1\beta^2u^2=i\beta\alpha(x)u^2.$$

Fazendo integração por partes em $(0,L)$, obtemos

$$\int_0^L [-k|u_x|^2 - kv_x u + \rho_1\beta^2|u|^2]dx = 0,$$
$$\int_0^L \beta\alpha(x)u^2 dx = 0.$$

Então, $u=0$ e $u_x=0$ em $(0,L)$. De (3.4.50), obtemos $v_x=0$, e usando $u_x=0$, $v_x=0$ em (3.4.51), obtemos $(k+\rho_2\beta^2)v=0$, o que implica $v=0$.

Agora, é trivial ver que $u=v=0$ é solução do sistema

$$\begin{aligned} ku_{xx} - kv_x + \rho_1\beta^2 u &= i\beta\alpha(x)u, \\ bv_{xx} - ku_x + kv &= -\rho_2\beta^2 v. \end{aligned}$$

Isso é uma contradição, pois o autovalor U é não-nulo. Isso completa a demonstração de

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \Re\}. \tag{3.4.52}$$

Provaremos que

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| < \infty. \tag{3.4.53}$$

Suponhamos que a conclusão (3.4.53) é falsa, isto é

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| = \infty.$$

Existem seqüências $(V_n) \in H$ e $\beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|(i\beta_n I - A)^{-1} V_n\| \geq n\|V_n\| \quad \forall\, n > 0.$$

De $i\beta_n \in \rho(A)$, temos que existe uma única sequência $(U_n) \in D(A)$ tal que

$$i\beta_n U_n - AU_n = V_n, \quad \|U_n\| = 1,$$

isto é, $U_n = (i\beta_n I - A)^{-1} V_n$ e $\|U_n\| \geq n\|i\beta_n U_n - AU_n\|$.

Agora, denotamos $F_n = i\beta_n U_n - AU_n$. Segue que $\|F_n\| \leq n^{-1}$ e então

$$F_n \to 0 \quad \text{(forte)} \quad \text{em} \quad H \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Seja $u_t = v$ e $\psi_t = \phi$, denotamos $U_n = (u^n, v^n, \psi^n, \phi^n)^T$ e, com essa notação, temos

$$\|U_n\|^2 = \int_0^L [k|u_x^n - \psi^n|^2 + \rho_1|v^n|^2 + \rho_2|\phi^n|^2 + b|\psi_x^n|^2]dx. \tag{3.4.54}$$

Escrevemos $F_n = (f_1^n, f_2^n, f_3^n, f_4^n)^T \in H$ e obtemos da identidade $i\beta_n U_n - AU_n = F_n$ as seguintes equações em $L^2(0,L)$.

$$i\beta_n u^n - v^n = f_1^n, \tag{3.4.55}$$

$$i\beta_n v^n - \frac{k}{\rho_1}(u_x^n - \psi^n)_x - \frac{1}{\rho_1}\alpha(x)v^n = f_2^n, \tag{3.4.56}$$

$$i\beta_n \psi^n - \phi^n = f_3^n, \tag{3.4.57}$$

$$i\beta_n \phi^n - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}^n + \frac{k}{\rho_2}(u_x^n - \psi^n) = f_4^n. \tag{3.4.58}$$

Agora, tomando o produto interno de $i\beta_n U_n - AU_n = F_n$ com U_n, resulta

$$i\beta_n \|U_n\|^2 - \langle AU_n, U_n\rangle = \langle F_n, U_n\rangle$$

e tomando a parte real, obtemos

$$\int_0^L \alpha(x)|v^n|^2 dx = Re\langle F_n, U_n\rangle.$$

Notemos que (U_n) é limitada e que $F_n \to 0$, logo, temos que

$$\int_0^L \alpha(x)|v^n|^2 dx \to 0. \tag{3.4.59}$$

Mas $\alpha(x) \geq a > 0$, implica

$$\int_0^L \alpha(x)|v^n|^2 dx \geq a\int_0^L |v^n|^2 dx \geq 0. \tag{3.4.60}$$

Combinando (3.4.59) e (3.4.60), deduzimos que

$$v^n \to 0 \quad \text{(forte)} \quad \text{em} \quad L^2(0,L). \tag{3.4.61}$$

Agora, consideramos a equação

$$-\beta_n \|U_n\|^2 - i(AU_n, U_n) = i(F_n, U_n)$$

e usando (3.4.48), obtemos

$$-\beta_n \|U_n\|^2 - i\int_0^L \alpha(x)|v^n|^2 dx = i(F_n, U_n)$$

o que implica $\beta_n \|U_n\|^2 \to 0$ e então $\beta_n |v^n|^2 \to 0$.

Agora, é fácil ver que $\beta_n |v^n|^2 \to 0$ e $v^n \to 0$ implica $\beta_n v^n \to 0$.

Usando a equação (3.4.56), temos

$$\int_0^L |(u_x^n - \psi^n)_x|^2 dx \to 0$$

e da desigualdade de Poincarè

$$\int_0^L |u_x^n - \psi^n|^2 dx \to 0. \tag{3.4.62}$$

Usando (3.4.62) em (3.4.58), segue que

$$i\beta_n \phi^n - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}^n \to 0. \tag{3.4.63}$$

Usando a equação (3.4.57), temos

$$i\beta_n \psi^n - \phi^n \to 0. \tag{3.4.64}$$

Combinando (3.4.63) com (3.4.64) obtemos para n suficientemente grande que

$$\beta_n^2 \psi_n + \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}^n = 0,$$

e multiplicando a última equação por ψ^n e fazendo integração por partes, obtemos

$$-\int_0^L \beta_n^2 |\psi^n|^2 dx = \frac{b}{\rho_2}\int_0^L |\psi_x^n|^2 dx. \tag{3.4.65}$$

De (3.4.62), temos para n suficientemente grande que $u_x^n - \psi^n = 0$ e multiplicando por ψ^n e fazendo integração por partes

$$\int_0^L u^n \psi_x^n dx + \int_0^L |\psi^n|^2 dx = 0.$$

Observando que ψ_x^n é limitada e que $u^n \to 0$ temos $u^n \psi_x^n \to 0$ e, então, para n suficientemente grande

$$\int_0^L |\psi^n|^2 dx = 0. \tag{3.4.66}$$

Lembramos que o lado direito de (3.4.65) é limitado e assim concluimos que $(\beta_n \psi^n)$ é limitado em L^2. De $\psi^n \to 0$ em L^2, obtemos $(\beta_n \psi^n) \to 0$ em L^2 e combinando com (3.4.65), temos

$$\psi_x^n \to 0 \quad \text{(forte)} \quad \text{em} \quad L^2(0, L). \tag{3.4.67}$$

Portanto, de (3.4.57), podemos concluir que

$$\phi^n \to 0 \quad \text{(forte)} \quad \text{em} \quad L^2(0, L). \tag{3.4.68}$$

Finalmente, de $(3.4.61), (3.4.62), (3.4.67), (3.4.68)$, temos uma contradição. Portanto tendo verificado as condições (1.4.5) e (1.4.6) do teorema 1.4, a demonstração está completa. □

3.5 Exercícios

01. Mostre o decaimento exponencial para o seguinte sistema

$$
\begin{aligned}
\rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + u_t &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + \psi_t &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
(u(x,0), u_t(x,0), \psi(x,0), \psi_t(x,0)) &= (u_0(x), u_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)),\\
u(0,t) = u(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) &= 0, \qquad t > 0.
\end{aligned}
$$

02. Seja $\alpha(x) \geq \alpha > 0$. Mostre o decaimento exponencial para o seguinte sistema

$$
\begin{aligned}
\rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + \alpha(x) u_t &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + \alpha(x)\psi_t &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
(u(x,0), u_t(x,0), \psi(x,0), \psi_t(x,0)) &= (u_0(x), u_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)),\\
u(0,t) = u(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) &= 0, \qquad t > 0.
\end{aligned}
$$

03. Seja $\alpha(x) \geq \alpha > 0$. Mostre o decaimento exponencial para o seguinte sistema

$$
\begin{aligned}
\rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + \alpha(x) u_t &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + \psi_t &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
(u(x,0), u_t(x,0), \psi(x,0), \psi_t(x,0)) &= (u_0(x), u_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)),\\
u(0,t) = u(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) &= 0, \qquad t > 0.
\end{aligned}
$$

04. Seja $\alpha(x) \geq \alpha > 0$. Mostre o decaimento exponencial para o seguinte sistema

$$
\begin{aligned}
\rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + u_t &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + \alpha(x)\psi_t &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
(u(x,0), u_t(x,0), \psi(x,0), \psi_t(x,0)) &= (u_0(x), u_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)),\\
u(0,t) = u(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) &= 0, \qquad t > 0.
\end{aligned}
$$

05. Prove o decaimento exponencial para o seguinte sistema de Timoshenko com duas dissipações tipo memória

$$
\begin{aligned}
\rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + g_1 * u_{xx} &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + g_2 * \psi_{xx} &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
(u(x,0), u_t(x,0), \psi(x,0), \psi_t(x,0)) &= (u_0(x), u_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)),\\
u(0,t) = u(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) &= 0, \qquad t > 0.
\end{aligned}
$$

onde g_1 e g_2 são os núcleos históricos nas mesmas condições de g do exercício 03 do capítulo 2.

06. Prove o decaimento exponencial para o seguinte sistema de Timoshenko com

uma dissipação tipo memória

$$\begin{array}{rcll} \rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + g * u_{xx} & = & 0, & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) & = & 0, & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ (u(x,0), u_t(x,0), \psi(x,0), \psi_t(x,0)) & = & (u_0(x), u_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)), & \\ u(0,t) = u(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) & = & 0, & \quad t > 0. \end{array}$$

onde g é o núcleo histórico nas mesmas condições do exercício 03 do capítulo 2.

07. Prove o decaimento exponencial para o seguinte sistema de Timoshenko com uma dissipação tipo memória

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + g * u_{xx} & = & 0, & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + \theta_x & = & 0, & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \theta_t - \theta_{xx} + \psi_{tx} & = & 0, & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ (u(x,0), u_t(x,0)) & = & (u_0(x), u_1(x)), & \\ (\psi(x,0), \psi_t(x,0)) & = & (\psi_0(x), \psi_1(x)), & \\ \theta(x,0) & = & \theta_0(x), & \\ u(0,t) = u(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) & = & 0, & \quad t > 0, \\ \theta_x(0,t) = \theta_x(L,t) & = & 0, & \quad t > 0. \end{array}$$

onde g é o núcleo histórico nas mesmas condições do exercício 03 do capítulo 2.

08. Prove o decaimento exponencial para o seguinte sistema de Timoshenko com uma dissipação tipo memória

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + \theta_x & = & 0, & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + g * \psi_{xx} & = & 0, & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \theta_t - \theta_{xx} + \psi_{tx} & = & 0, & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ (u(x,0), u_t(x,0)) & = & (u_0(x), u_1(x)), & \\ (\psi(x,0), \psi_t(x,0)) & = & (\psi_0(x), \psi_1(x)), & \\ \theta(x,0) & = & \theta_0(x), & \\ u(0,t) = u(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) & = & 0, & \quad t > 0, \\ \theta_x(0,t) = \theta_x(L,t) & = & 0, & \quad t > 0. \end{array}$$

onde g é o núcleo histórico nas mesmas condições do exercício 03 do capítulo 2.

09. Seja α uma constante real positiva, mostre o decaimento exponencial para

o seguinte sistema de Timoshenko

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - k(u_x - \psi)_x &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L) \times (0,\infty),\\
\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + \alpha\theta_x &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L) \times (0,\infty),\\
\theta_t - \theta_{xx} + \alpha\psi_{tx} &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L) \times (0,\infty),\\
(u(x,0), u_t(x,0), \psi(x,0), \psi_t(x,0), \theta(x,0)) &= (u_0(x), u_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x), \theta_0(x)),\\
u(0,t) = u(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) &= 0, \qquad t > 0,\\
\theta(0,t) = \theta(L,t) &= 0, \qquad t > 0.
\end{aligned}
$$

10. Seja $\alpha(x) \geq \alpha > 0$, mostre o decaimento exponencial para o seguinte sistema de Timoshenko

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - k(u_x - \psi)_x &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L) \times (0,\infty),\\
\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + \alpha(x)\theta_x &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L) \times (0,\infty),\\
\theta_t - \theta_{xx} + \alpha\psi_{tx} &= 0, \quad \text{em} \quad (0,L) \times (0,\infty),\\
(u(x,0), u_t(x,0), \psi(x,0), \psi_t(x,0), \theta(x,0)) &= (u_0(x), u_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x), \theta_0(x)),\\
u(0,t) = u(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) &= 0, \qquad t > 0,\\
\theta(0,t) = \theta(L,t) &= 0, \qquad t > 0.
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[01] R. A. Adams. Sobolev Spaces *Academic Press.* New York, 1975.

[02] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. M. Rivera and R. Racke. Energy decay for Timoshenko systems of memory type. *J.Differential Equations,* 194: 82-115, 2003.

[03] H. Brézis. Análisis Funcional, Teoria y Aplicaciones. *Alianza Editorial.* Madrid, 1984.

[04] F. L. Huang. Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Ann. of Diff. Eqs,* 1: 43-56, 1985.

[05] J. U. Kim and Y. Renardy. Boundary control of the Timoshenko beam. *SIAM, J. Control and Optimizatin,* 25: 1417-1429, 1987.

[06] V. Kormonik and E. Zuazua. A direct method for the boundary stabilization of the wave equation. *J. Math, Pures Appl,* 69: 33-54, 1990.

[07] J. E. Lagnese and J. L. Lions. Modelling Analysis and Control of Thin Plates. *Masson.* 1988.

[08] Z. Liu and S. Zheng. Semigroups associated with dissipative systems. *Chapman & Hall/CRC.* London, 1999.

[09] M. Nakao. On the decay of solutions of some nonlinear dissipative wave equations. *Math. Z,* 193: 227-234, 1986.

[10] A. Pazy. Semigoups of Linear Operators and Aplications to Partial Differential Equations. *Springer.* New York, 1983.

[11] C. A. Raposo. The Transmition Problem for Timoshenko Systems of Memory Type. *Thesis. Federal University of Rio de Janeiro - IM-UFRJ.* Rio de Janeiro, 2001.

[12] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos and N. N. O. Castro. Exponential Stability for the Timoshenko System With Two Weak Damping. *Appl. Math. Lett.,* 18: 535-541, 2005.

[13] J. Rivera. Energy decay rates in linear thermoelasticity. *Funkcial EKVAC.* 35: 9-30, 1992.

[14] A. Soufyane. Stabilisation dynamique et approximation numérique de problèmes de contrôle. *Thesis. Universyty of Franche-Conté.* Bensaçon, 1975.

[15] A. Soufyane and A. Wehbe. Stabilisation dynamique et approximation numérique de problèmes de contrôle. *Electron. J. Diff. Eqns.,* 29: 1-14, 2003.

[16] D. H. Shi and D. X. Feng. Exponential decay of Timoshenko Beam with locally distributed feedback. *Proceeding of the 99'IFAC World Congress.* Beijing, Vol F.

[17] S. W. Taylor. A smoothing property of a hyperbolic system and boundary controllability. *J. Comput. Appl. Math.* 114: 23-40, 2000.

[18] S. P. Timoshenko and J.M. Gere. Mechanics of Materials. *D. Van Nostrand Company.* 1972.

[19] A. Wyler. Stability of wave equations with dissipative boundary condition in a bounded domain. *Differential and Integral Equations.* 7: 345-366, 1994.

[20] S. Zheng. Nonlinear parabolic equations and hiperbolic-parabolic coupled systems. *Pitman series Monographs and Survey in Pure and Applied Mathematics.* Vol. 76. Longman, 1995.

[21] E. Zuazua. Exponencial decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping. *Communication in PDE.* 15 : 205-235, 1990.

[22] E. Zuazua and A. Haraux; Decay estimates for some semilinear damping hyperbolic problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 10: 191-206, 1988.

Índice

Notas em Matemática Aplicada

1. Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia

   Geraldo Cidade, Antônio Silva Neto e Nilson Costa Roberty

2. Fundamentos, Potencialidades e Aplicações de Algoritmos Evolutivos

   Leandro dos Santos Coelho

3. Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas

   Edson Wendlander

4. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais

   Maria Cristina de Castro Cunha e Maria Amélia Novais Schleicher

5. Modelagem em Biomatematica

   Joyce da Silva Bevilacqua, Marat Rafikov e Cláudia de Lello Courtouke Guedes

6. Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e "simulated annealing"

   Sezimária F. Pereira Saramago

7. "Matemática Aplicada à Fisiologia e Epidemiologia"

   H.M. Yang, R. Sampaio e A. Sri Ranga

8. Uma Introdução à Computação Quântica

   Renato Portugal, Carlile Campos Lavor, Luiz Mariano Carvalho e Nelson Maculan

9. Aplicações de Análise Fatorial de Correspondências para Análise de Dados

   Dr. Homero Chaib Filho, Embrapa

10. Modelos Matemáticos baseados em autômatos celulares para Geoprocessamento

    Marilton Sanchotene de Aguiar, Fábia Amorim da Costa, Graçaliz Pereira

    Dimuro e Antônio Carlos da Rocha Costa

11. Computabilidade: os limites da Computação
    Regivan H. N. Santiago e Benjamín R. C. Bedregal
12. Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas
    Fernando Rochinha e Alexandre Madureira
13. Modelagem em Biomatemática (Coraci Malta ed.)
    1 - "Modelagem matemática do comportamento elétrico de neurônios e algumas aplicações"
        Reynaldo D. Pinto
    2 - "Redes complexas e aplicações nas Ciências"
        José Carlos M. Mombach
    3 - "Possíveis níveis de complexidade na modelagem de sistemas biológicos"
        Henrique L. Lenzi, Waldemiro de Souza Romanha e Marcelo Pelajo-Machado
14. A lógica na construção dos argumentos
    Angela Cruz e José Eduardo de Almeida Moura
15. Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos
    Valdemir G. Ferreira, Hélio A. Navarro, Magda K. Kaibara
16. Introdução ao Tratamento da Informação nos Ensinos Fundamental e Médio
    Marcilia Andrade Campos, Paulo Figueiredo Lima
17. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações
    Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laércio Carvalho de Barros, Rodney Carlos Bassanezi
18. Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira
    Socorro Rangel
19. Observar e Pensar, antes de Modelar
    Flavio Shigeo Yamamoto, Sérgio Alves, Edson P. Marques Filho, Amauri P. de Oliveira
20. Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações
    Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali
21. Uma Introdução à Teoria de Códigos
    Carlile Campos Lavor, Marcelo Muniz Silva Alves, Rogério Monteiro de Siqueira, Sueli Irene Rodrigues Costa

22. Análise e Processamento de Sinais
    Rubens Sampaio, Edson Cataldo, Alexandre de Souza Brandão
23. Introdução aos Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e EDP
    David Soares Pinto Júnior
24. Representações Computacionais de Grafos
    Lílian Markenzon, Oswaldo Vernet
25. Ondas Oceânicas de Superfície
    Leandro Farina
26. Técnicas de Modelagem de Processos Epidêmicos e Evolucionários
    Domingos Alves, Henrique Fabrício Gagliardi