

Volume 53, 2011

Editores

Célia A. Zorzo Barcelos

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Uberlândia, MG, Brasil

Eliana X.L. de Andrade

Universidade Estadual Paulista - UNESP

São José do Rio Preto, SP, Brasil

Maurílio Boaventura

Universidade Estadual Paulista - UNESP

São José do Rio Preto, SP, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa, também, a publicar livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o MikTeX versão 2.7)**, as figuras em **eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja outros títulos publicados em formato e-book na página

<http://www.sbmac.org.br/notas.php>



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2011

A GEOMETRIA ABSOLUTA

Oswaldo Vernet
oswaldo@nce.ufrj.br

iNCE - Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais
CCMN - Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Universidade Federal do Rio de Janeiro



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2011

Coordenação Editorial: Elbert Einstein Nehrer Macau

Coordenação Editorial da Série: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2011 by Oswaldo Vernet

Direitos reservados, 2011 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

Vernet, Oswaldo.

A Geometria Absoluta - São Carlos, SP :

SBMAC, 2011, 118 p., 20.5 cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 53)

e-ISBN 978-85-86883-55-2

1. Geometria Plana 2. Geometria Neutra 3. Sistemas Axiomáticos
I.Vernet, Oswaldo. II. Título. III. Série

CDD - 51

Conteúdo

Prefácio	7
1 Introdução	9
1.1 Sistemas Axiomáticos e Modelos	10
1.2 Consistência, Independência e Categoricidade	14
2 A Geometria Neutra no Plano	17
2.1 A Geometria Neutra no Plano	17
2.2 A Relação de Incidência	18
2.3 Modelos para Planos de Incidência	19
2.3.1 Plano Mínimo de Incidência	19
2.3.2 Plano de Incidência com 5 Pontos	20
2.3.3 O Plano Cartesiano sobre o Corpo \mathbb{R}	20
2.3.4 Plano de Incidência sobre a Superfície Esférica	21
2.4 Independência dos Axiomas de Incidência	21
2.5 A Relação <i>Estar Entre</i>	22
2.5.1 Os Axiomas de Ordem	22
2.5.2 Modelo para o Plano de Incidência Ordenado	26
2.5.3 Segmentos	28
2.5.4 Os Teoremas de Separação	29
2.5.5 A Ordenação dos Pontos na Reta	33
2.5.6 Semirretas, Ângulos e o Teorema da Trave	35
2.6 Congruência entre Segmentos	37
2.6.1 Axiomas e Primeiros Teoremas	37
2.6.2 Interpretação da Congruência entre Segmentos no Modelo do Plano Cartesiano	38
2.6.3 Soma e Comparação de Segmentos	40
2.7 Congruência entre Ângulos	42
2.7.1 Axiomas e Primeiros Teoremas	42

2.7.2	Interpretação da Congruência entre Ângulos no Modelo do Plano Cartesiano	45
2.7.3	Soma e Comparação de Ângulos	47
2.7.4	Alguns Abusos de Linguagem	50
2.7.5	Ângulos Retos, Agudos e Obtusos	51
2.8	O Teorema do Ângulo Externo	53
2.9	Relações entre Lados e Ângulos em um Triângulo	56
2.10	Congruência de Triângulos	59
2.11	Divisão de Segmentos e Ângulos	61
2.12	Paralelismo	64
2.13	Exercícios	66
3	Classificação dos Planos de Hilbert	69
3.1	Quadriláteros de Saccheri	70
3.2	As Três Hipóteses	75
3.3	Classificação dos Planos de Hilbert	78
3.4	Exercícios	80
4	Movimentos Rígidos	83
4.1	Livre Mobilidade	84
4.2	Subconjuntos Invariantes	89
4.3	O Grupo dos Movimentos Rígidos	91
4.4	Reflexões e Perpendicularidade	92
4.5	Dois Teoremas sobre Três Reflexões	93
4.6	Meios-Giros e Incidência	94
4.7	A Correspondência Algébrica	97
4.8	Feixes de Retas	97
4.9	Movimentos Ímpares e Pares	100
4.10	Exercícios	102
5	A Geometria Absoluta	105
5.1	Notação e Primeiras Definições	107
5.2	Os Axiomas de Bachmann	108
5.3	Primeiros Teoremas	110
5.4	Outros Resultados	111
5.5	Geometrias Derivadas	113
	Bibliografia	115

Prefácio

O objetivo deste minicurso é abordar o estudo da fundamentação axiomática da geometria plana através de dois enfoques à primeira vista bastante distintos.

O primeiro deles deve-se aos esforços do matemático alemão David Hilbert e de seus contemporâneos, na segunda metade do séc. XIX, que culminaram na fundamentação da geometria euclidiana espacial com base em 19 axiomas.

A partir da concepção geométrica revolucionária introduzida por Felix Klein em seu *Programa de Erlangen* de 1872 e dos trabalhos de Hjelmslev, Hessenberg, Schmidt e Bachmann, surge, em meados do séc. XX, o conceito de *planos absolutos* e a concepção de um novo sistema axiomático, denominado *Geometria Absoluta*, calcado na teoria dos grupos e tendo apenas 5 axiomas por base.

Neste texto, apresentamos estas duas abordagens para a fundamentação da geometria plana e, em especial, as relações entre os axiomas da Geometria Absoluta assumidos por Bachmann e os axiomas e teoremas da Geometria Neutra - um subconjunto do sistema de Hilbert restrito ao plano e sem pressupostos de paralelismo ou continuidade.

Nosso roteiro será, partindo da *Geometria Neutra* (Capítulos 2 e 3), chegarmos a um estudo de movimentos rígidos no plano (Capítulo 4). A análise dos movimentos como elementos de um grupo nos levará às principais ideias da *Geometria Absoluta* de Bachmann, descritas no Capítulo 5.

Como pré-requisitos para nossos leitores, supomos tão somente conhecimentos básicos de geometria euclidiana, certa familiaridade com lógica, prova de teoremas e álgebra, principalmente os resultados mais elementares em teoria de grupos.

Rio de Janeiro, 27 de junho de 2011.

Oswaldo Vernet

Capítulo 1

Introdução

A tentativa de demonstrar como teorema o que Euclides de Alexandria enunciou como seu quinto postulado, em *Os Elementos*, ocupou renomados matemáticos por alguns séculos. Após incontáveis e malogrados esforços, este “escândalo da geometria elementar” ([5]) foi definitivamente sanado apenas em meados do séc. XIX, com a lenta assimilação que tiveram as descobertas de Bolyai e Lobatchewsky. Constatou-se, então, que o Postulado das Paralelas possuía, naquele contexto, caráter axiomático: além de não poder ser deduzido a partir das outras afirmações postuladas por Euclides, ele poderia ser substituído por outros postulados, incluindo sua negação lógica, dando origem a novos sistemas geométricos perfeitamente consistentes - as geometrias então denominadas *não-euclidianas*.

Os esforços de diversos matemáticos notáveis, no sentido de dar à geometria de Euclides uma formulação rigorosa, culminaram no final do séc. XIX com a obra de David Hilbert intitulada *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria), que sofreu diversas reedições ao longo do séc. XX. Neste texto, Hilbert mostrou que a Geometria Euclidiana no Espaço podia ser fundamentada com base em 19 axiomas, que ele classificou em cinco grupos: axiomas de incidência, de ordem, de congruência, de paralelismo e de continuidade. O sistema de Hilbert supre todas as lacunas encontradas em *Os Elementos*, notadamente as que se referem à ordenação de pontos numa reta e aos pressupostos de continuidade.

O estudo da geometria, a partir do final do séc. XIX, desprende-se gradualmente do tangível e mensurável, na medida em que novas geometrias, antes inadmissíveis por não possuírem uma interpretação concreta imediata, passam a despertar, do ponto de vista lógico, tanto interesse quanto a geometria de Euclides. Geometrias não-euclidianas, não-arquimedianas e diversas outras tornam-se o foco de pesquisa geométrica desta época.

A linguagem matemática utilizada na formulação e demonstrações de proposições atinge então, neste valioso período histórico, grande rigor e maturidade, e a ideia de *Sistemas Axiomáticos* para a formalização de uma teoria chega à concepção definitiva que prevalece até hoje na matemática e outras ciências.

1.1 Sistemas Axiomáticos e Modelos

Um *sistema axiomático* consiste nos seguintes componentes:

- termos indefinidos;
- termos definidos;
- axiomas;
- teoremas.

A presença de *termos indefinidos* deve-se à impossibilidade de definir rigorosamente todos os termos necessários ao sistema sem incorrer em circularidade, devido ao número finito de palavras de que normalmente se dispõe. Em sistemas geométricos, estes termos costumam corresponder aos conceitos primitivos de ponto, reta e plano, e também a algumas relações, como incidência.

Já os *termos definidos* são, na verdade, desnecessários, sendo introduzidos tão somente pela comodidade da abreviação. Um exemplo seria chamar de *ângulo* o conjunto constituído pelos pontos de duas semirretas com a mesma origem, não contidas na mesma reta.

Algumas proposições - denominadas *axiomas* - são assumidas como verdadeiras e constituem a base inicial de conhecimento a partir da qual outras verdades serão deduzidas. É o caso, por exemplo, de afirmarmos que por dois pontos distintos passa uma única reta, sem que este fato seja deduzido em função de outros.

A partir dos axiomas, *teoremas* podem ser deduzidos, mediante a utilização de regras de inferência conhecidas da lógica.

É importante observar que uma proposição tomada como axioma em determinado sistema pode perfeitamente ser um teorema em outro sistema, de maneira que não é possível, através do enunciado, distinguir um de outro. O que nos dá essa distinção é a posição que cada um ocupa na cadeia dedutiva: os axiomas são proposições sem pré-requisitos na sequência lógica de deduções, ao passo que os teoremas dependem sempre de outros axiomas ou teoremas para poderem ser demonstrados.

Vejamos um exemplo de sistema axiomático. Como termos indefinidos, escolhe-mos, de propósito, palavras sem significado em português, afastando qualquer analogia, neste momento, com a realidade. Em nosso sistema, existem três termos

indefinidos: os substantivos *Wexe* e *Broke* e o verbo *truchar*, que tem como sujeito um *Wexe* e como objeto um *Broke*.

Os axiomas são 6:

- (A1) Para todo par de *Wexes* distintos, existe pelo menos um *Broke* tal que os dois *Wexes* *trucham* o *Broke*.
- (A2) Para todo par de *Wexes* distintos, existe no máximo um *Broke* tal que os dois *Wexes* *trucham* o *Broke*.
- (A3) Para todo par de *Brokes* distintos, existe pelo menos um *Wexe* que *trucha* ambos os *Brokes*.
- (A4) Para todo *Broke*, existem pelo menos três *Wexes* distintos que o *trucham*.
- (A5) Para todo *Broke*, existe pelo menos um *Wexe* que não o *trucha*.
- (A6) Existe pelo menos um *Broke*.

A partir destes axiomas, podemos provar vários teoremas, dentre eles:

- (T1) Existem pelo menos três *Wexes* distintos.

Demonstração: Pelo Axioma (A6), existe pelo menos um *Broke* e, pelo Axioma (A4), três *Wexes* distintos que o *trucham*. ■

- (T2) Para todo par de *Brokes* distintos, existe exatamente um *Wexe* que *trucha* ambos os *Brokes*.

Demonstração: Sejam b_1 e b_2 dois *Brokes* distintos. O Axioma (A3) nos garante que existe pelo menos um *Wexe* a_1 tal que a_1 *trucha* b_1 e b_2 . Basta, então, mostrarmos que existe no máximo um *Wexe* que *trucha* b_1 e b_2 simultaneamente e, daí, teremos a unicidade desejada.

Suponhamos, por absurdo, que exista outro *Wexe* a_2 , distinto de a_1 , que *trucha* b_1 e b_2 . Mas isso contradiz o Axioma (A2), segundo o qual dois *Wexes* distintos *trucham* no máximo um *Broke*. Portanto, concluímos que $a_1 = a_2$, contrariando a hipótese de serem distintos. ■

Um *modelo* é uma *realização* do sistema axiomático em algum contexto conhecido, na qual se atribuem *interpretações* aos termos indefinidos de modo a tornar válidos os axiomas do sistema e, conseqüentemente, também os teoremas.

A seguir, construímos três modelos para o sistema de *Wexes* e *Brokes*, fornecendo interpretações aos termos indefinidos. O leitor fica incumbido de verificar, em

cada modelo, que os Axiomas (A1)-(A6) e, portanto, os Teoremas (T1), (T2) são satisfeitos.

- Modelo Ocupacional

Neste modelo, um *Wexe* é um nome próprio, um *Broke* é uma ocupação e *truchar* significa *ocupar-se como*. Na tabela seguinte, colunas designam *Wexes*, linhas designam *Brokes* e o símbolo \times , na interseção de uma linha com uma coluna, significa que o *Wexe* ocupa-se como o *Broke*, ou que a ocupação designada pelo *Broke* é exercida pelo *Wexe*. Assim, João, Carlos e Ema ocupam-se como Matemáticos, ao passo que Eva, Carlos e Alex ocupam-se como Ladrões.

	João	José	Eva	Carlos	Ema	Dalva	Alex
Matemático	\times			\times	\times		
Filósofo	\times	\times	\times				
Linguista	\times					\times	\times
Professor		\times		\times		\times	
Engenheiro		\times			\times		\times
Ladrão			\times	\times			\times
Militar			\times		\times	\times	

- Modelo Baseado em Conjuntos

Podemos interpretar *Wexes* e *Brokes* como elementos dos conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{A, B, C, D, E, F, G\} \\ \mathcal{B} &= \{\{A, D, E\}, \{A, B, C\}, \{A, F, G\}, \{B, D, F\}, \\ &\quad \{B, E, G\}, \{C, D, G\}, \{C, E, F\}\} \end{aligned}$$

e o verbo *truchar* como *pertencer a*.

É fácil constatar a semelhança entre este modelo e o anterior: a cada letra maiúscula está em correspondência um nome de pessoa (na ordem das colunas) e a cada ocupação está em correspondência o conjunto de pessoas que a exercem (na ordem das linhas). Matematicamente, dizemos que esses modelos são *isomorfos*, já que existe uma correspondência biunívoca que vincula as interpretações dadas em ambos. O leitor é convidado a exprimir matematicamente essa bijeção.

- Modelo Geométrico

Neste modelo, tomamos como ponto de partida a superfície \mathbb{S} de uma esfera de centro O e raio r . Interpretamos um *Wexe* como um par de pontos (A, A') *antipodais*, isto é, $A, A' \in \mathbb{S}$ e A, O, A' colineares. *Brokes* são circunferências máximas, ou seja, circunferências com o mesmo centro O e raio r da esfera. O verbo *truchar*, neste caso, é interpretado como a pertinência simultânea de A e A' a uma dada circunferência máxima.

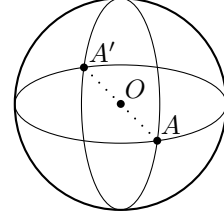


Fig. 1.1

À primeira vista, pode parecer estranha a escolha de um par de pontos para interpretar um *Wexe*, em vez de um único ponto sobre a superfície esférica \mathbb{S} . No entanto, se um *Wexe* correspondesse a um só ponto, o Axioma (A2) seria violado, pois há infinitas circunferências máximas contendo dois pontos antipodais quaisquer e, portanto, dois *Wexes* antipodais *truchariam* infinitos *Brokes*.

O Teorema (T2), por exemplo, é satisfeito no modelo, porque duas circunferências máximas distintas (portanto, dois *Brokes* distintos) interceptam-se em um par de pontos antipodais (portanto, um *Wexe*).

Observe que este modelo não é isomorfo aos dois anteriores, já que contém um número infinito de *Wexes* e *Brokes*.

Os axiomas do sistema de *Wexes* e *Brokes* foram expressos em língua portuguesa, que, como qualquer linguagem natural, apresenta ambiguidades e pode, em alguns casos, tornar pouco claras as idéias que queremos exprimir. A alternativa é utilizar uma linguagem lógica precisa. No nosso exemplo, assumimos a existência de dois conjuntos: o conjunto \mathcal{W} de *Wexes* e o conjunto \mathcal{B} de *Brokes*. O verbo *truchar* é expresso pela relação binária $\bowtie \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{B}$: x *trucha* b é representado por $x \bowtie b$. Os 6 axiomas são assim reescritos:

$$(A1) \quad \forall x, y \in \mathcal{W}, x \neq y \Rightarrow \exists a \in \mathcal{B} \mid x \bowtie a \wedge y \bowtie a.$$

$$(A2) \quad \forall x, y \in \mathcal{W}, x \neq y \wedge \exists a, b \in \mathcal{B} \mid x \bowtie a \wedge y \bowtie a, x \bowtie b \wedge y \bowtie b \Rightarrow a = b.$$

$$(A3) \quad \forall a, b \in \mathcal{B}, a \neq b \Rightarrow \exists x \in \mathcal{W} \mid x \bowtie a \text{ e } x \bowtie b.$$

$$(A4) \quad \forall a \in \mathcal{B}, \exists x, y, z \in \mathcal{W} \mid x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge x \bowtie a \wedge y \bowtie a \wedge z \bowtie a.$$

$$(A5) \quad \forall a \in \mathcal{B}, \exists x \in \mathcal{W} \mid \sim (x \bowtie a).$$

$$(A6) \quad \mathcal{B} \neq \emptyset.$$

Ganhamos em exatidão quando optamos pela descrição lógica formal do sistema, mas certamente perdemos em intuição. Não podemos nos esquecer de que, quando formalizamos uma teoria qualquer, em geral seus conceitos e princípios surgiram previamente à formalização, quer por observação direta da realidade, quer por extrapolção desta. Admitir um certo nível de ambiguidade e imprecisão aproxima a descrição teórica da intuição que possuímos acerca do objeto descrito, favorecendo a compreensão e até mesmo a formulação de *conjecturas*, que poderão tornar-se teoremas.

Em termos computacionais, dispomos há algum tempo dos chamados *provadores automáticos de teoremas*: programas que, a partir de uma descrição de determinado sistema, conseguem produzir automaticamente provas para teoremas e, até mesmo, sugerir novos teoremas. A formulação do sistema em termos lógicos precisos é, neste caso, indispensável ao funcionamento destes provadores.

1.2 Consistência, Independência e Categoricalidade

Um sistema axiomático é dito *consistente* quando nele não existem proposições contraditórias, sejam elas axiomas ou teoremas. O requisito da consistência é, obviamente, essencial a um sistema axiomático, que se revelaria inútil caso nele pudessemos deduzir verdades conflitantes.

A verificação da consistência a partir desta definição é, em geral, inviável para sistemas axiomáticos de razoável porte, uma vez que se devem considerar todos os possíveis teoremas dedutíveis em seu âmbito. Em vez disso, *modelos* são utilizados para estabelecer a consistência, da seguinte maneira: um sistema será consistente se admitir pelo menos um modelo.

Muitas vezes, um modelo para determinado sistema é elaborado sobre noções pertinentes a outro sistema axiomático, cuja consistência é presumida. No modelo geométrico dado ao sistema de *Wexes* e *Brokes*, por exemplo, tomamos emprestados conceitos pertinentes à Geometria Euclidiana Espacial, que constitui um sistema axiomático a parte. O mesmo se dá com a Geometria Hiperbólica, cujos modelos são construídos com base na Geometria Euclidiana. A consistência, neste caso, é dita *relativa*, uma vez que, para o sistema ser consistente, é necessário que aquele que lhe empresta os conceitos também o seja. Dizemos, então, que o segundo sistema é *tão consistente quanto* o primeiro.

Em um sistema axiomático consistente, um axioma é dito *independente* dos demais quando não puder ser deduzido parcial ou integralmente como consequência lógica destes. Quando isto ocorre para cada um dos axiomas, o sistema, como um todo, é dito *independente*. O requisito de independência é desejável do ponto de vista lógico, onde se exige que cada axioma introduza apenas o essencial de verdade ao

sistema, sem se sobrepor aos demais. Entretanto, em outros contextos, os sistemas axiomáticos são por vezes apresentados contendo axiomas redundantes, sem que isso prejudique as consequências lógicas (teoremas) que deles se depreendem.

Voltando ao exemplo dos *Wexes* e *Brokes*, se acrescentássemos ao sistema o axioma

(A7) Existe pelo menos um *Wexe*.

o sistema deixaria de ser independente, já que esta novo “axioma” é consequência lógica direta de (A6) e (A4).

Para testar a independência de um certo axioma em um sistema consistente, basta verificar a consistência de um outro sistema, assim obtido: substitui-se o axioma cuja independência se quer provar por sua negação lógica e mantêm-se os demais.

Assim, para verificarmos a independência de (A3) no sistema dos *Wexes* e *Brokes*, devemos mostrar que o sistema constituído pelos axiomas (A1), (A2), \sim (A3), (A4), (A5) e (A6) é consistente, onde \sim (A3) significa a negação lógica de (A3):

\sim (A3) Existem pares de *Brokes* distintos tais que nenhum *Wexe trucha* os dois *Brokes* do par.

Para isto, consideremos o seguinte modelo: partindo de um plano euclidiano, um *Wexe* é interpretado como um ponto, um *Broke* como uma reta do plano e o verbo *truchar* como pertencer. O Axioma \sim (A3) nos diz que existem pares de retas distintas sem pontos em comum: *paralelas*. Os demais axiomas são satisfeitos naturalmente.

A interrelação entre os axiomas pode ser forte o suficiente a ponto de acarretar a equivalência de *todos* os modelos para o sistema, sendo possível estabelecer correspondências biunívocas entre eles. Quando isto ocorre, estamos diante de um sistema axiomático dito *categorico*. Isto se dá com a geometria euclidiana plana: qualquer modelo para esta geometria vem a ser isomorfo ao plano cartesiano construído sobre o corpo dos números reais \mathbb{R} , onde pontos são interpretados como pares de números reais e retas são conjuntos de pontos cujas coordenadas satisfazem uma equação linear a coeficientes reais.

A *completude* de um sistema axiomático significa que, para qualquer sentença sintaticamente válida formulada nos termos do sistema, é sempre possível deduzir, a partir dos axiomas, ou a própria sentença em questão ou a sua negação lógica. Em outras palavras, qualquer nova proposição corretamente formulada do ponto de vista sintático nos termos do sistema pode ser provada ou refutada sistema.

No Capítulo 2, vamos desenvolver o Sistema Axiomático da Geometria Neutra no Plano e teremos oportunidade de constatar que este sistema não é completo: haverá proposições que não conseguiremos nem provar nem refutar no sistema.

Capítulo 2

A Geometria Neutra no Plano

Em seu tratado sobre os Fundamentos da Geometria ([15], [16]), que data dos últimos anos do século XIX, o matemático alemão David Hilbert mostrou que a Geometria Euclidiana no Espaço podia ser fundamentada com base em 19 axiomas, que ele classificou em cinco grupos: axiomas de incidência, de ordem, de congruência, de paralelismo e de continuidade.

Neste capítulo, restringimos nosso estudo ao plano e pretendemos apresentar as principais proposições que podem ser deduzidas como consequências lógicas dos axiomas planos de incidência, ordem e congruência propostos por Hilbert. A geometria plana que daí resulta é denominada *neutra*, pois nela não se pressupõe qualquer assertiva acerca de retas paralelas. Tampouco axiomas de continuidade são agregados ao sistema, de forma que conceitos como *medida* e *distância* não são em momento algum introduzidos.

2.1 A Geometria Neutra no Plano

A *Geometria Neutra no Plano* é um sistema axiomático em que os termos indefinidos são *ponto*, *reta*, *incidência*, *estar entre* e *congruência*. Um total de 13 axiomas, divididos em três grupos, formam a base inicial de conhecimento neste sistema.

Definimos *plano* como o conjunto de todos os pontos, que representaremos ao longo do texto por \mathbb{P} . Conforme o conjunto \mathbb{P} seja finito ou infinito, a geometria será dita *finita* ou *infinita*.

Sendo termos indefinidos, no restante deste estudo, nada deve ser suposto acerca da forma que pontos e retas assumem, embora tenhamos familiaridade com esses conceitos na Geometria Euclidiana. Da mesma maneira, as relações de incidência, “estar entre” e congruência não serão definidas, mas apenas postuladas nos 13 axiomas que passaremos a analisar.

A partir da Geometria Neutra no Plano, novos sistemas axiomáticos podem ser construídos, mediante a inclusão de axiomas, mantendo indefinidos os termos *ponto* e *reta*, bem como as relações de *incidência*, *estar entre* e *congruência*. Esses sistemas axiomáticos derivados denominam-se *Planos de Hilbert*.

A Geometria Neutra no Plano é, portanto, o Plano de Hilbert que compreende apenas estes 13 axiomas.

2.2 A Relação de Incidência

Os axiomas deste primeiro grupo postulam a *relação de incidência* entre pontos e retas. São eles:

- (I1) Dados dois pontos distintos A e B , existe uma única reta incidente a estes dois pontos, que pode ser denominada a *reta* AB .
- (I2) A uma reta qualquer incidem, pelo menos, dois pontos distintos.
- (I3) Existem pelo menos três pontos não *colineares*, ou seja, não incidentes a uma mesma reta.

Dados um ponto P e uma reta ℓ , as seguintes expressões são sinônimas:

- o ponto P *incide* (ou *é incidente*) à reta ℓ ;
- a reta ℓ *incide* (ou *é incidente*) ao ponto P ;
- o ponto P e a reta ℓ *são incidentes*;
- a reta ℓ *passa por* P ;
- o ponto P *está sobre* a reta ℓ ;

Da mesma forma, se um ponto P não incide a uma reta ℓ , dizemos que P *está fora de* ℓ , P *é exterior a* ℓ , ou ainda, que ℓ *não passa por* P .

No desenrolar do texto, com o intuito de simplificar a linguagem, identificaremos toda reta com o conjunto dos pontos a ela incidentes. Desta maneira, dizer que o ponto P incide à reta ℓ torna-se equivalente a dizer $P \in \ell$.

Com os axiomas de incidência, podemos demonstrar algumas proposições. Por exemplo, utilizando apenas o axioma (I3), fica claro que devem existir pelo menos

três pontos no conjunto \mathbb{P} . Juntando este fato ao axioma (I1), também concluímos que deve haver pelo menos três retas distintas. As duas proposições seguintes merecem destaque.

Teorema 2.1. *Dada uma reta, existe pelo menos um ponto não incidente a ela.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que não haja ponto fora de uma reta dada. Então todos os pontos do plano \mathbb{P} são incidentes à reta em questão e, portanto, todos colineares, contrariando o axioma (I3). ■

Teorema 2.2. *Existe, no máximo, um ponto incidente simultaneamente a duas retas distintas.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que haja dois pontos simultaneamente incidentes a duas retas. Então, pelo axioma (I1), essas retas são idênticas, o que contraria a hipótese de serem distintas. ■

Quando duas retas possuem um ponto em comum, diremos que elas são *concorrentes* ou que elas *concorrem* neste ponto. Também podemos dizer que elas *se encontram*, *se interceptam* ou *se cortam* neste ponto; ou ainda, que uma delas *encontra* a outra no referido ponto.

2.3 Modelos para Planos de Incidência

Conforme já mencionamos na introdução, um *modelo* para um sistema axiomático é uma realização deste sistema em um contexto particular, onde se atribuem significados aos termos indefinidos e se verifica a veracidade dos axiomas.

Vamos examinar, nos tópicos seguintes, alguns modelos para o Plano de Incidência, em que os termos indefinidos são ponto, reta e incidência e os axiomas são (I1), (I2), (I3).

2.3.1 Plano Mínimo de Incidência

O axioma (I3) impõe a existência de, no mínimo, 3 pontos no sistema, sendo eles não colineares. Como primeiro modelo para um plano de incidência, vamos exibir a geometria de incidência mínima, com os pontos P_1 , P_2 e P_3 . Consideraremos as retas $\ell_1 = \{P_1, P_2\}$, $\ell_2 = \{P_1, P_3\}$, $\ell_3 = \{P_2, P_3\}$ e o plano $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$.

A relação de incidência expressa-se como a relação de pertinência usual entre elemento e conjunto: P_i é incidente a ℓ_j quando $P_i \in \ell_j$, para $i, j = 1, 2, 3$. É imediato verificar que os axiomas (I1)-(I3) são satisfeitos neste modelo.

2.3.2 Plano de Incidência com 5 Pontos

Semelhantermente ao exemplo anterior, consideremos a geometria de incidência com 5 pontos, onde

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \{A, B, C, D, E\} \\ \mathcal{R} &= \{\{A, B\}, \{A, C, E\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{D, E\}\}\end{aligned}$$

são, respectivamente, os conjuntos de pontos e retas. A relação de incidência expressa-se como pertinência. É imediato verificar que os axiomas (I1)-(I3) são satisfeitos neste modelo.

2.3.3 O Plano Cartesiano sobre o Corpo \mathbb{R}

Como terceiro modelo, consideremos o plano cartesiano \mathbb{R}^2 . Os pontos são, portanto, pares ordenados de números reais (x, y) . Uma reta é um subconjunto de pontos (x, y) satisfazendo a equação linear

$$ax + by + c = 0,$$

na qual $a, b, c \in \mathbb{R}$, a e b não simultaneamente nulos.

Os axiomas podem ser facilmente verificados neste modelo:

(I1) A dois pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) incide apenas a reta:

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + [x_2y_1 - x_1y_2] = 0.$$

(I2) Consideremos a reta $ax + by + c = 0$. Há três casos a analisar:

- $a, b \neq 0$:
os pontos $(0, -c/b)$ e $(-c/a, 0)$ são incidentes à reta;
- $a = 0, b \neq 0$:
os pontos $(0, -c/b)$ e $(1, -c/b)$ são incidentes à reta;
- $a \neq 0, b = 0$:
os pontos $(-c/a, 0)$ e $(-c/a, 1)$ são incidentes à reta.

(I3) Os pontos $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ não são colineares.

Observe que, em vez de \mathbb{R} , poderíamos ter construído o plano cartesiano sobre um corpo \mathbb{F} qualquer, utilizando as operações de soma e multiplicação específicas para este corpo.

2.3.4 Plano de Incidência sobre a Superfície Esférica

Considere, no espaço euclidiano, uma esfera de centro O e raio r . Vamos tomar por pontos da nossa geometria os situados sobre a superfície desta esfera e, por retas, as circunferências máximas sobre esta superfície esférica, ou seja, aquelas que possuem o mesmo centro O e raio r da esfera.

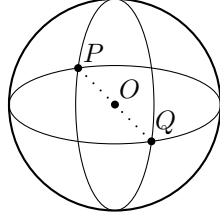


Fig. 2.1

É fácil verificar que, nesta formulação, o axioma (I1) não é satisfeito, embora (I2) e (I3) o sejam. Isto porque, se tomarmos um par de pontos antipodais qualquer sobre a superfície esférica (i.e., pontos da superfície esférica colineares ao centro da esfera), a este par de pontos incidirão infinitas retas.

Se, no entanto, consideramos como pontos da geometria pares de pontos antipodais sobre a superfície esférica, os três axiomas serão satisfeitos.

2.4 Independência dos Axiomas de Incidência

Em um sistema axiomático consistente, um axioma é dito *independente* dos demais se não puder ser obtido como consequência lógica destes. Um sistema de axiomas em que todos eles sejam independentes é também dito independente.

Para demonstrar a independência de um axioma em relação aos demais, basta exibir um modelo em que sejam satisfeitos a negação lógica do axioma cuja independência se quer provar e os demais axiomas.

Passemos, então, a comprovar a independência dos axiomas de incidência, exibindo três modelos nos quais retas são subconjuntos de pontos e a relação de incidência é a relação de pertinência entre elemento e conjunto. Observe que, em cada um dos modelos, um dos axiomas é negado, fato este expresso pelo operador lógico \sim .

- \sim (I1), (I2) e (I3)

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \{A, B, C\} \\ \mathcal{R} &= \{\{A, B\}, \{A, C\}\}.\end{aligned}$$

Falta a reta $\{B, C\}$.

- (I1), \sim (I2) e (I3)

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \{A, B, C\} \\ \mathcal{R} &= \{\{A\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}.\end{aligned}$$

Não temos dois pontos incidentes à reta $\{A\}$.

- (I1), (I2) e \sim (I3)
- $$\mathbb{P} = \{A, B, C\}$$
- $$\mathcal{R} = \{\{A, B, C\}\}.$$

Não há três pontos não colineares.

2.5 A Relação *Estar Entre*

O objetivo desta seção é introduzir a relação ternária entre pontos denominada “estar entre”, postulada por quatro axiomas de ordem, demonstrando, a partir deles e juntamente com os axiomas de incidência previamente enunciados, mais algumas proposições da Geometria Neutra.

Primeiramente serão estabelecidos os Teoremas de Separação para o plano e para as retas, que originarão os conceitos de semirreta, ângulo e o importante resultado conhecido como Teorema da Trave.

Em seguida, demonstraremos o Teorema da Ordenação dos Pontos de uma Reta, que nos permitirá estabelecer uma relação de ordem total sobre qualquer conjunto finito de pontos colineares.

Por fim, um importante resultado que diz respeito à cardinalidade do conjunto \mathbb{P} será deduzido. Com a introdução dos axiomas deste novo grupo, mostraremos que o conjunto \mathbb{P} torna-se necessariamente infinito, ficando excluídas as geometrias finitas.

2.5.1 Os Axiomas de Ordem

Os *axiomas de ordem* postulam a relação ternária sobre o conjunto \mathbb{P} denominada *estar entre*. A notação $A \star B \star C$ deve ser lida: *o ponto B está entre os pontos A e C*.

- (B1) Dados três pontos A, B e C , se $A \star B \star C$, então A, B e C são distintos dois a dois, colineares e vale também $C \star B \star A$.
- (B2) Se $A \neq B$, existe um ponto C tal que $A \star B \star C$.
- (B3) Se $A \star B \star C$, então $\sim (B \star A \star C)$ e $\sim (A \star C \star B)$.
- (B4) Sejam A, B e C três pontos não colineares e ℓ uma reta tal que $A, B, C \notin \ell$. Se existe $D \in \ell$ tal que $A \star D \star B$, então existe $E \in \ell$ tal que $B \star E \star C$ ou existe $F \in \ell$ tal que $A \star F \star C$.

O Axioma (B1) nos diz que três pontos relacionados por \star devem ser obrigatoriamente colineares e que dizer $A \star B \star C$ é o mesmo que dizer $C \star B \star A$.

(B3) nos permite, dado que $A \star B \star C$, excluir as demais permutações dos três pontos envolvidos na relação \star , exceto evidentemente $C \star B \star A$, assegurada por (B1).

Lido informalmente, o Axioma (B2) permite-nos sempre supor a existência de um ponto colinear a outros dois pontos distintos dados. Juntamente com (B3), vemos que este novo ponto não está entre os dois iniciais.

O Axioma (B4) é conhecido como *axioma de Pasch*, em homenagem ao matemático alemão Moritz Pasch. Para sua correta aplicação, é fundamental observar as hipóteses assumidas: além de os três pontos serem não colineares, a reta considerada não deve incidir a nenhum deles e deve possuir um ponto entre dois deles.

Examinando o enunciado de (B4), vemos que consiste de uma hipótese implicando uma disjunção: $X \Rightarrow Y \vee Z$. Da lógica elementar, sabemos que

$$X \Rightarrow Y \vee Z \equiv (\sim X) \vee Y \vee Z \equiv \sim (X \wedge \sim Y) \vee Z \equiv (X \wedge \sim Y) \Rightarrow Z.$$

Assim, uma formulação equivalente à de (B4), que será útil em algumas demonstrações posteriores, é a seguinte:

(B4') Sejam A, B e C três pontos não colineares e ℓ uma reta tal que $A, B, C \notin \ell$. Se existe $D \in \ell$ tal que $A \star D \star B$ e não existe $E \in \ell$ tal que $B \star E \star C$, então existe $F \in \ell$ tal que $A \star F \star C$.

A *contrapositiva* de (B4) será igualmente útil em provas:

(B4^c) Sejam A, B e C três pontos não colineares e ℓ uma reta tal que $A, B, C \notin \ell$. Se não existe $E \in \ell$ tal que $B \star E \star C$ e não existe $F \in \ell$ tal que $A \star F \star C$, então não existe $D \in \ell$ tal que $A \star D \star B$.

Por (B1), três pontos relacionados por \star são obrigatoriamente colineares. Surge, então, a questão: *três pontos colineares distintos devem estar relacionados por \star necessariamente?* A resposta nos é dada pelas proposições seguintes. A primeira delas estabelece a recíproca do Axioma (B3):

Lema 2.1. *Se os pontos colineares A, B e C são tais que $\sim (B \star A \star C)$ e $\sim (A \star C \star B)$, então $A \star B \star C$.*

Demonstração: Sejam os pontos A, B, C colineares tais que $\sim (B \star A \star C)$ e $\sim (A \star C \star B)$.

Pelo Teorema 2.1, seja um ponto $D \notin AB$. Por (B2), existe E tal que $B \star D \star E$ e, por (B1), B, D, E são colineares.

Os pontos A, B, E são não colineares, do contrário teríamos $E \in AB$ e, como B, D, E são colineares, também $D \in AB$. Por semelhante raciocínio, $E, A, B \notin CD$.

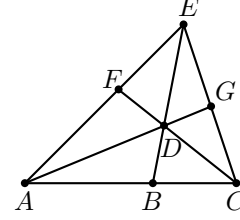


Fig. 2.2

A demonstração é feita por 4 aplicações sucessivas de (B4'), em que variam a reta e o terno de pontos considerados. O leitor fica incumbido, em cada uma delas, de verificar a não colinearidade do terno de pontos e a não incidência entre os pontos e a reta.

1. Reta CD , terno de pontos A, B, E :
 $CD \cap BE = \{D\}$, $B \star D \star E$, $CD \cap AB = \{C\}$ e $\sim (A \star C \star B)$ por hipótese; por (B4'), existe $F \in CD$ tal que $A \star F \star E$.
2. Reta AD , terno de pontos B, C, E :
 $AD \cap BE = \{D\}$, $B \star D \star E$, $AD \cap BC = \{A\}$ e $\sim (B \star A \star C)$ por hipótese; por (B4'), existe $G \in AD$ tal que $C \star G \star E$.
3. Reta CF , terno de pontos A, E, G :
 $CF \cap AE = \{F\}$, $A \star F \star E$, $CF \cap EG = \{C\}$ e $\sim (E \star C \star G)$, já que $C \star G \star E$ (item 2) implica, por (B3), $\sim (E \star C \star G)$; como $CF \cap AG = \{D\}$, por (B4'), $D \in AG$ e $A \star D \star G$.
4. Reta ED , terno de pontos A, C, G :
 $ED \cap AG = \{D\}$, $A \star D \star G$ (item anterior), $ED \cap CG = \{E\}$ e $\sim (C \star E \star G)$, já que $C \star G \star E$ (item 2) implica $\sim (C \star E \star G)$ por (B3); como $ED \cap AC = \{B\}$, por (B4'), $B \in AC$ e $A \star B \star C$. ■

Teorema 2.3. *Dados três pontos colineares distintos, um deles e apenas um está entre os outros dois.*

Demonstração: Sendo verdadeiros (B3) e sua recíproca (lema anterior), é um exercício trivial de lógica constatar que

$$\sim (A \star B \star C) \wedge \sim (B \star A \star C) \wedge \sim (A \star C \star B)$$

é sempre falso. ■

Tornando a examinar o enunciado de (B4), o conector lógico “ou”, a princípio, não excluiria a existência simultânea dos pontos E e F . Entretanto, este “ou” é, na verdade, exclusivo, conforme atesta a proposição seguinte.

Teorema 2.4. *Dados três pontos não colineares A , B e C , se uma reta ℓ encontra AB em um ponto E tal que $A \star E \star B$ e encontra BC em um ponto F tal que $B \star F \star C$, então ℓ não pode encontrar AC em um ponto entre A e C .*

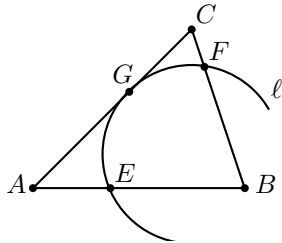
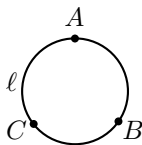


Fig. 2.3

Examinemos a reta AC em relação ao terno de pontos F, E, B . A partir das hipóteses feitas, é imediato concluir que os pontos F, E, B não podem ser colineares e que nenhum deles pode pertencer à reta AC , pois isto implicaria a colinearidade de A, B, C . Portanto, (B4) é aplicável.

Como $EF = \ell$, $AC \cap EF = \{G\}$ e $A \star G \star C$, por hipótese, AC deve cortar EB num ponto entre E e B ou BF em um ponto entre B e F . Porém $AC \cap EB = \{A\}$ e $A \star E \star B$, donde, $\sim (E \star A \star B)$; também $AC \cap BF = \{C\}$ e $B \star F \star C$, donde $\sim (B \star C \star F)$. ■

Pelas duas últimas proposições, podemos inferir algo sobre a “forma” das retas na geometria que estamos construindo.



O Teorema 2.3, por exemplo, impede que as retas sejam “fechadas”, pois não seria possível estabelecer uma ordem entre três pontos de uma curva fechada de modo que um e apenas um deles esteja entre os outros dois.

Já o Teorema 2.4 impede que as retas se “bifurquem”.

O modelo do plano de incidência sobre a superfície esférica, em que os pontos da geometria eram interpretados como pares de pontos antipodais e as retas como círculos máximos, não é mais um modelo para o sistema axiomático que obtivemos até agora.

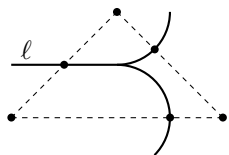


Fig. 2.4

2.5.2 Modelo para o Plano de Incidência Ordenado

Assim como fizemos para os Planos de Incidência, vamos exibir um modelo para o sistema axiomático examinado até este ponto do texto. Consideremos, portanto, o Plano Cartesiano sobre \mathbb{R} , introduzido na Seção 2.3.3, em que pontos da geometria são interpretados como pares de números $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retas como conjuntos de pontos (x, y) satisfazendo uma equação linear da forma $ax + by + c = 0$, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a, b não simultaneamente nulos.

Vamos interpretar, neste modelo, a relação “estar entre”. Para tal, tomemos três pontos $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$. Diremos que $A \star B \star C$ quando existir $t \in]0, 1[$ tal que

$$(x_b - x_a, y_b - y_a) = t(x_c - x_a, y_c - y_a).$$

Passemos, então, a verificar se os axiomas (B1)-(B4) são satisfeitos sob essa interpretação.

(B1) Suponhamos $A \star B \star C$; então, existe t nas condições dadas. A restrição $t \in]0, 1[$ garante que A, B, C são distintos. A colinearidade pode ser deduzida facilmente:

– se $x_c \neq x_a$ e $y_c \neq y_a$, podemos eliminar t nas duas expressões, obtendo:

$$\frac{x_b - x_a}{x_c - x_a} = \frac{y_b - y_a}{y_c - y_a}.$$

Portanto, B é incidente à reta AC , cuja equação é (verifique!)

$$\frac{x - x_a}{x_c - x_a} = \frac{y - y_a}{y_c - y_a}.$$

- se $x_c = x_a$, temos $x_b = x_a$, donde A, B, C incidem a uma reta vertical;
- se $y_c = y_a$, temos $y_b = y_a$, donde A, B, C incidem a uma reta horizontal.

Por fim, trocando t por $1 - t$, concluímos que $C \star B \star A$.

(B2) Se $A \neq B$, devemos obter um ponto C tal que $A \star B \star C$. Tomando

$$C = (x_c, y_c) = (2x_b - x_a, 2y_b - y_a),$$

constatamos que $A \star B \star C$ para $t = \frac{1}{2}$. (verifique!)

(B3) Se $A \star B \star C$, existe t nas condições expressas pela definição e devemos mostrar que nem $B \star A \star C$ nem $A \star C \star B$ ocorrem.

- $B \star A \star C$ implicaria que existe $s \in]0, 1[$ tal que $(x_a - x_b, y_a - y_b) = s(x_c - x_b, y_c - y_b)$, que pode ser reescrito como $(x_a - x_b, y_a - y_b) = s(x_b - x_a + x_a - x_c, y_b - y_a + y_a - y_c)$. Rearrmando e lembrando que $(x_b - x_a, y_b - y_a) = t(x_c - x_a, y_c - y_a)$, vem:

$$(x_b - x_a, y_b - y_a) = \frac{s}{s-1}(x_c - x_a, y_c - y_a) = t(x_c - x_a, y_c - y_a),$$

donde $s = \frac{t}{t-1} < 0$, já que $0 < t < 1$.

- $A \star C \star B$ implicaria que existe $s \in]0, 1[$ tal que $(x_c - x_a, y_c - y_a) = s(x_b - x_a, y_b - y_a)$. Neste caso, é fácil ver que $s = \frac{1}{t} > 1$, já que $0 < t < 1$.

Em ambos os casos, entramos em contradição com $s \in]0, 1[$.

(B4) Para verificarmos o Axioma de Pasch, consideremos os pontos A, B, C e a reta ℓ de equação $ax + by + c = 0$, satisfazendo as hipóteses: $A, B, C \notin \ell$, existe um ponto $D = (x_d, y_d)$ tal que $ax_d + by_d + c = 0$ e existe $t \in]0, 1[$, tal que

$$(x_d - x_a, y_d - y_a) = t(x_b - x_a, y_b - y_a).$$

Examinando a função $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x, y) = ax + by + c,$$

vemos que, por hipótese, $\phi(x_d, y_d) = ax_d + by_d + c = 0$, já que $D \in \ell$. Portanto, devemos ter $\phi(x_a, y_a)$ e $\phi(x_b, y_b)$ não nulos (pois $A, B \notin \ell$) e com sinais contrários (verifique!).

Por outro lado, sabemos, pelas hipóteses, que $\phi(x_c, y_c) \neq 0$, já que $C \notin \ell$. Temos, então, dois casos a analisar:

- $\phi(x_c, y_c)$ e $\phi(x_a, y_a)$ têm o mesmo sinal:
Logo, $\phi(x_c, y_c)$ e $\phi(x_b, y_b)$ têm sinais contrários, o que significa que existirá o ponto $E = (x_e, y_e)$ tal que $\phi(x_e, y_e) = 0$, com coordenadas satisfazendo

$$(x_e - x_b, y_e - y_b) = s(x_c - x_b, y_c - y_b).$$

para algum $s \in]0, 1[$. Ou seja, $E \in \ell$ e $B \star E \star C$.

- $\phi(x_c, y_c)$ e $\phi(x_a, y_a)$ têm sinais contrários:
Da mesma forma, concluímos que existirá o ponto $F = (x_f, y_f)$ tal que $F \in \ell$ e $A \star F \star C$.

2.5.3 Segmentos

Definição 2.1. Dados dois pontos distintos A e B , o segmento \overline{AB} é o conjunto

$$\overline{AB} = \{A\} \cup \{P \in \mathbb{P} \mid A \star P \star B\} \cup \{B\}.$$

Os pontos A e B denominam-se extremos do segmento \overline{AB} . O subconjunto $\{P \in \mathbb{P} \mid A \star P \star B\}$ denomina-se interior do segmento \overline{AB} .

Observe que os extremos de um segmento são necessariamente distintos. Pela definição e pelo axioma (B1), é imediato concluir que $\overline{AB} = \overline{BA}$ e que os pontos do segmento \overline{AB} são todos colineares e incidentes à reta AB . Além disso, dizer $A \star P \star B$ equivale a dizer que P pertence ao interior de \overline{AB} .

A primeira questão que surge é se um segmento contém mais pontos do que seus dois extremos. Em outras palavras: *podia o interior de um segmento ser vazio?* O teorema seguinte nos diz que não.

Teorema 2.5. O interior de um segmento é um conjunto não vazio.

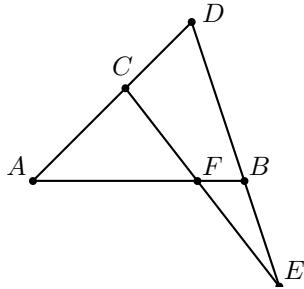


Fig. 2.5

Demonstração: Seja o segmento \overline{AB} e tomemos o ponto C , fora da reta AB (Teorema 2.1). O axioma (B2) nos permite tomar o ponto D sobre a reta AC tal que $A \star C \star D$. Evidentemente $D \notin AB$, do contrário as retas AD e AB teriam os pontos A e D distintos em comum, acarretando $C \in AB$. Logo, $D \neq B$ e podemos usar novamente (B2) para obter o ponto E tal que $D \star B \star E$. Os pontos E e C são necessariamente distintos, do contrário as retas AC e ED teriam dois pontos distintos em comum (C e D).

Assim, a reta CE e o terno de pontos A, D, B satisfazem as hipóteses do axioma de Pasch. Como DE já tem em comum com CE o ponto E , não pode haver um ponto no interior de \overline{BD} também incidente a CE . Então, por $(B4')$, CE deve interceptar o interior de \overline{AB} em algum ponto F , de forma que $A \star F \star B$. ■

Poderíamos ficar tentados a obter mais pontos no interior de \overline{AB} , simplesmente repetindo a construção proposta no Teorema 2.5: tornaríamos a aplicar o teorema ao segmento \overline{AF} , obtendo, por exemplo, o ponto G entre A e F e, portanto, no interior de \overline{AF} . No entanto, nada nos garante que G esteja também entre A e B , embora a Fig. 2.5 sugira isto claramente. Estamos sujeitos a erros sempre que intuímos fatos a partir de figuras e os assumimos como verdadeiros sem antes tê-los deduzido logicamente de outros fatos já conhecidos (axiomas ou teoremas). Figuras podem e devem ser utilizadas como auxiliares nas provas geométricas; porém nenhuma conclusão inferida exclusivamente a partir delas pode ser assumida sem antes ser demonstrada. Desta forma, examinando a figura, podemos apenas *conjecturar* que o ponto G esteja entre A e B . O leitor aguarde com paciência até a Seção 2.5.5, onde comprovaremos este fato.

No modelo do Plano Cartesiano sobre \mathbb{R} , um segmento \overline{AB} , com $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, é descrito como o conjunto:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_a, y - y_a) = t(x_b - x_a, y_b - y_a), t \in [0, 1]\}.$$

Observe que os valores $t = 0$ e $t = 1$ correspondem exatamente aos extremos A e B , respectivamente, ao passo que os demais valores de t descrevem os pontos do interior.

2.5.4 Os Teoremas de Separação

Consideremos uma reta ℓ qualquer e a relação binária $\dot{\sim}_\ell$ sobre o conjunto $\mathbb{P} - \ell$ assim definida: dados $P, Q \in \mathbb{P} - \ell$,

$$P \dot{\sim}_\ell Q \iff P = Q \quad \text{ou} \quad \overline{PQ} \cap \ell = \emptyset.$$

Portanto, dois pontos P e Q não incidentes a ℓ estão relacionados por \sim_ℓ quando coincidem ou quando o segmento \overline{PQ} não tiver ponto em comum com ℓ . A negação da relação $\dot{\sim}_\ell$ será representada por $\dot{\not\sim}_\ell$, em vez de $\not\sim_\ell$.

Lema 2.2. *A relação binária $\dot{\sim}_\ell$ sobre $\mathbb{P} - \ell$ é de equivalência.*

Demonstração: A reflexividade e a simetria seguem diretamente da definição. Resta mostrar que $\dot{\sim}_\ell$ é transitiva. Para isso, tomemos $P, Q, R \in \mathbb{P} - \ell$ e suponhamos que $P \dot{\sim}_\ell Q$ e $Q \dot{\sim}_\ell R$; devemos provar que $P \dot{\sim}_\ell R$.

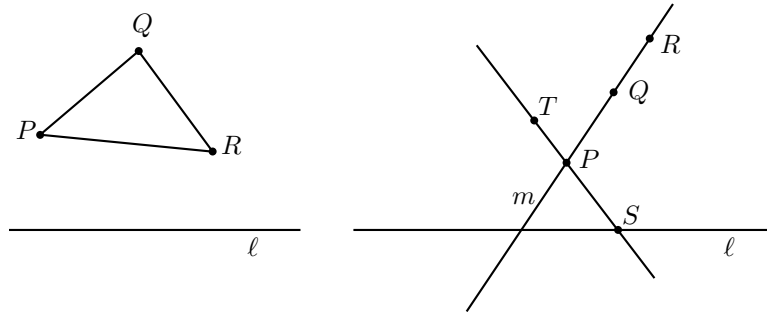


Fig. 2.6

Há dois casos a considerar:

- Caso 1: P , Q e R não são colineares
Neste caso, temos que ℓ não é incidente a nenhum dos três pontos P , Q e R e, além disso, $\overline{PQ} \cap \ell = \emptyset$ e $\overline{QR} \cap \ell = \emptyset$. Utilizando a contrapositiva do axioma de Pasch (B4), garantimos que $\overline{PR} \cap \ell = \emptyset$, ou seja, $P \not\sim_{\ell} R$.
- Caso 2: P , Q e R são colineares
Suponhamos que P , Q e R sejam incidentes a uma reta m . Como, por hipótese, P , Q e R não são incidentes a ℓ , devemos ter $m \neq \ell$ e, portanto, m e ℓ podem ter, no máximo, um ponto em comum. Por (I2), existe um outro ponto $S \in \ell$ não pertencente a m .

Aplicando (B2), obtemos T tal que $S * P * T$. Logo, S , P e T são colineares, por (B1), e $T \notin \ell$, do contrário as retas ST e ℓ teriam os pontos S e T em comum e, por (I1), seriam a mesma reta, implicando que $P \in \ell$. Além disso, o segmento \overline{PT} não tem ponto em comum com ℓ , já que $PT \cap \ell = \{S\}$ e $S \notin \overline{PT}$, por (B3). Portanto, $P \not\sim_{\ell} T$.

Também $T \notin m$, pois isto implicaria $m = \ell$, uma vez que já possuem o ponto P em comum.

Portanto, P , Q e T são não-colineares e, como $P \not\sim_{\ell} Q$ e $P \not\sim_{\ell} T$, pelo Caso 1, concluímos que $Q \not\sim_{\ell} T$. Novamente usando o Caso 1, como $Q \not\sim_{\ell} T$ e $Q \not\sim_{\ell} R$, então $T \not\sim_{\ell} R$. Aplicando o Caso 1 mais uma vez aos pontos não-colineares P , R e T , sendo $P \not\sim_{\ell} T$ e $T \not\sim_{\ell} R$, concluímos que $P \not\sim_{\ell} R$.

Reunindo os Casos 1 e 2, concluímos que, de fato, a relação $\not\sim_{\ell}$ é transitiva. ■

Sabemos, da álgebra, que uma relação de equivalência sobre um conjunto particiona-o em *classes de equivalência*, que são subconjuntos não vazios, disjuntos e cuja

união é o conjunto original. Assim, a relação $\dot{\sim}_\ell$, sendo de equivalência, particiona o conjunto $\mathbb{P} - \ell$ em duas classes, conforme a proposição seguinte.

Lema 2.3. *A relação de equivalência $\dot{\sim}_\ell$ particiona o conjunto de pontos $\mathbb{P} - \ell$ em exatamente duas classes.*

Demonstração: Existe pelo menos um ponto X fora de ℓ e, portanto, pelo menos uma classe de equivalência, à qual X pertence. Usando (I2), seja $Y \in \ell$. Evidentemente, X e Y são distintos e podemos obter, por (B2), um ponto Z tal que $X \star Y \star Z$. Logo, $\overline{XZ} \cap \ell = \{Y\}$ e, portanto, $X \dot{\div}_\ell Z$. Existem, então, pelo menos duas classes de equivalência: uma contendo X e outra, Z .

Mostremos, por fim, que o número de classes é exatamente 2. Para tanto, basta provarmos que, se $P \dot{\div}_\ell R$ e $Q \dot{\div}_\ell R$, então $P \dot{\sim}_\ell Q$. Há dois casos a analisar (veja Fig. 2.7):

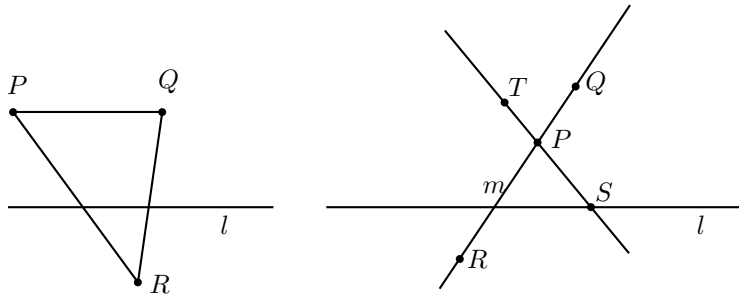


Fig. 2.7

- Caso 1: P , Q e R não são colineares
Como $P \dot{\div}_\ell R$, temos que $\overline{PR} \cap \ell \neq \emptyset$. Analogamente, $Q \dot{\div}_\ell R$ implica $\overline{QR} \cap \ell \neq \emptyset$. Pelo axioma de Pasch, ℓ não pode ter ponto em comum com \overline{PQ} e, por conseguinte, $P \dot{\sim}_\ell Q$.
- Caso 2: P , Q e R são colineares
Sejam P , Q e R incidentes a uma reta m . Obtemos os pontos S e T como no Caso 2 do lema anterior, sendo $S \in \ell$ e $P \dot{\sim}_\ell T$. Então, por hipótese, $P \dot{\div}_\ell R$. Como $P \dot{\sim}_\ell T$, segue que $T \dot{\div}_\ell R$, já que $\dot{\sim}_\ell$ é uma relação de equivalência. Usando o Caso 1 em relação aos pontos Q , R e T , sabendo que $T \dot{\div}_\ell R$ e $Q \dot{\div}_\ell R$, concluímos que $Q \dot{\sim}_\ell T$. Mas $P \dot{\sim}_\ell T$ e, por transitividade, temos que $P \dot{\sim}_\ell Q$. ■

Os resultados destes dois últimos lemas podem ser assim resumidos:

Teorema 2.6 (Separação do Plano). *Uma reta ℓ particiona o conjunto $\mathbb{P} - \ell$ em dois subconjuntos L_1 e L_2 , denominados lados de ℓ , de forma que, dados dois pontos $A, B \in \mathbb{P} - \ell$:*

- *A e B estão do mesmo lado de ℓ se, e somente se, $A = B$ ou $A \dot{-}_\ell B$;*
- *A e B estão em lados opostos de ℓ se, e somente se, $A \div_\ell B$.*

No decorrer do texto, usaremos frequentemente as expressões *o ponto A está do mesmo lado que B* e *A está do lado oposto a B* , em relação a uma reta ℓ .

No modelo do Plano Cartesiano sobre \mathbb{R} , podemos verificar facilmente se dois pontos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$ estão do mesmo lado ou em lados opostos da reta ℓ de equação $ax + by + c = 0$. Basta considerar a função $\phi(x, y) = ax + by + c$, utilizada na verificação do Axioma de Pasch (Seção 2.5.2). Se P e Q estiverem em lados opostos de ℓ , existirá um ponto $R = (x_r, y_r)$ entre P e Q tal que $\phi(x_r, y_r) = 0$; portanto, $\phi(x_p, y_p)$ e $\phi(x_q, y_q)$ deverão ter sinais contrários. Estando P e Q de um mesmo lado de ℓ , ϕ não se anulará para nenhum ponto entre P e Q , donde $\phi(x_p, y_p)$ e $\phi(x_q, y_q)$ terão o mesmo sinal.

Da mesma forma que uma reta *separa* o plano em dois subconjuntos disjuntos, um ponto incidente a uma reta também a separa, conforme a proposição seguinte.

Teorema 2.7 (Separação da Reta). *Um ponto P incidente a uma reta ℓ particiona o conjunto $\ell - \{P\}$ em dois subconjuntos S_1 e S_2 , denominados lados da reta com respeito a P , de forma que, dados dois pontos $A, B \in \ell - \{P\}$, temos:*

- *A e B pertencem ao mesmo conjunto (S_1 ou S_2) se, e somente se, $A = B$ ou $P \notin \overline{AB}$;*
- *A e B pertencem a conjuntos opostos (um a S_1 e outro a S_2) se, e somente se, $P \in \overline{AB}$.*

Demonstração: Dados a reta ℓ e o ponto $P \in \ell$, sabemos que existe um ponto $Q \notin \ell$ (Teorema 2.1). Consideremos a reta PQ , que, pelo teorema anterior, separa o plano em dois lados L_1 e L_2 . Tomemos $S_1 = L_1 \cap \ell$ e $S_2 = L_2 \cap \ell$. É claro que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, restando mostrar, apenas, que $S_1 \neq \emptyset$ e $S_2 \neq \emptyset$.

Por (I2), existe um ponto $B \in \ell$ distinto de P ; por (B2), existe um ponto D tal que $B \star P \star D$. Portanto, B e D estão em lados opostos da reta ℓ em relação a P , mostrando que S_1 e S_2 não podem ser vazios. ■

Assim, dados uma reta ℓ , um ponto $O \in \ell$ e outro ponto $A \in \ell$, distinto de O , podemos nos referir aos pontos de ℓ situados do mesmo lado de A ou do lado oposto de A em relação a O .

Deixamos ao leitor a tarefa de interpretar, no modelo do Plano Cartesiano sobre \mathbb{R} , estes resultados sobre a separação da reta. Lembre-se de detalhar como se verifica se dois pontos $A, B \in \ell$ estão de um mesmo lado ou em lados opostos com respeito a um ponto $P \in \ell$.

2.5.5 A Ordenação dos Pontos na Reta

Nesta seção mostraremos que, com a introdução dos axiomas de ordem, deixamos de ter geometrias finitas, pois as retas passam a ter, obrigatoriamente, infinitos pontos.

No Teorema 2.5, mostramos que o interior de um segmento \overline{AB} é um conjunto não vazio, construindo um ponto F entre os extremos A e B . Poderíamos pensar em iterar esta construção, obtendo um ponto F_1 entre A e F , depois um ponto F_2 entre A e F_1 e assim por diante. Com isso, “provaríamos” que existem infinitos pontos entre dois pontos dados, já que este processo poder-se-ia estender tanto quanto desejássemos.

Apesar de coincidir com a intuição que temos do conceito de “estar entre”, há, porém, uma falha neste raciocínio: nada nos garante, até o presente momento, que esses novos pontos F_1 e F_2 estarão também entre A e B .

Vamos, então, na sequência de proposições, estabelecer um resultado mais forte: a ordenação linear de $n > 2$ pontos colineares.

Começemos por examinar como a relação *estar entre*, sobre ternos de pontos, se estende para quatro pontos colineares:

Teorema 2.8. *Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos.*

- (i) *Se $A \star B \star C$ e $B \star C \star D$, então $A \star C \star D$.*
- (ii) *Se $A \star B \star C$ e $B \star C \star D$, então $A \star B \star D$.*
- (iii) *Se $A \star B \star C$ e $A \star C \star D$, então $B \star C \star D$.*
- (iv) *Se $A \star B \star C$ e $A \star C \star D$, então $A \star B \star D$.*
- (v) *Se $A \star B \star D$ e $B \star C \star D$, então $A \star B \star C$.*
- (vi) *Se $A \star B \star D$ e $B \star C \star D$, então $A \star C \star D$.*

Demonstração: Vamos demonstrar apenas o item (i), utilizando o Teorema de Separação da Reta. Os demais itens ficam como exercícios.

Das hipóteses $A \star B \star C$ e $B \star C \star D$, concluímos que os quatro pontos são colineares e incidem a uma reta ℓ . $A \star B \star C$ implica que A e B estão do mesmo lado de ℓ em relação a C , ao passo que $B \star C \star D$ acarreta que B e D estão em lados opostos de ℓ em relação a C . Portanto A e D devem estar também em lados opostos de ℓ

em relação a C , donde $A \star C \star D$. ■

O próximo teorema estende este resultado para $n > 2$ pontos.

Teorema 2.9 (Ordenação de n pontos sobre uma reta). *Dados $n > 2$ pontos colineares, é possível numerá-los P_1, P_2, \dots, P_n de forma que, se $1 \leq i < j < k \leq n$, então $P_i \star P_j \star P_k$.*

Demonstração: A demonstração se faz por indução finita sobre o número n de pontos, aplicando-se o Teorema da Separação da Reta. ■

Evidentemente, a ordenação obtida no teorema anterior não é única, uma vez que $P_i \star P_j \star P_k$ é o mesmo que $P_k \star P_j \star P_i$. Então, certamente os n pontos poderiam ser numerados ao contrário da ordem sugerida pelo teorema. Entretanto, outras ordenações não são possíveis, pois qualquer uma delas, em vista das duas admissíveis, causaria uma contradição com o Teorema 2.3.

Utilizando os resultados obtidos nesta seção, podemos deduzir uma importante conclusão acerca da cardinalidade das retas numa geometria em que valem os axiomas (I1)-(I3), (B1)-(B4). O teorema seguinte mostra que toda reta possui infinitos pontos. Sem mais axiomas, o máximo que podemos afirmar é que toda reta tem cardinalidade pelo menos \aleph_0 .

Teorema 2.10. *Se existem $n > 0$ pontos distintos entre A e B , então existe um ponto Q , também entre A e B , distinto desses n pontos.*

Demonstração: Pelo Teorema anterior, existe uma numeração dos $n + 2$ pontos $P_1 = A, \dots, B = P_{n+2}$, tal que, se $1 \leq i < j < k \leq n + 2$, então $P_i \star P_j \star P_k$.

Seja s tal que $2 \leq s \leq n + 1$. Pelo Teorema 2.5, existe um ponto Q tal que $P_s \star Q \star P_{s+1}$. É fácil ver que $Q \neq P_i$, para $1 \leq i \leq n + 2$, pois, se tivéssemos $Q = P_k$, para algum k , teríamos $s < k < s + 1$, o que é um absurdo.

Falta, então, mostrar que vale $P_1 \star Q \star P_{n+2}$. Não podemos ter $P_s \star P_1 \star P_{s+1}$, já que, como temos $P_1 \star P_s \star P_{n+2}$, isto acarretaria $P_s \star P_1 \star P_{n+2}$, pelo item (ii) do Teorema 2.8, contradizendo $P_1 \star P_s \star P_{n+2}$. Restam então:

- $P_1 \star P_s \star P_{s+1}$. Mas

$$P_1 \star P_s \star P_{s+1} \wedge P_s \star Q \star P_{s+1} \Rightarrow P_1 \star Q \star P_{s+1},$$

pelo item (vi) do Teorema 2.8. Além disso,

$$P_1 \star Q \star P_{s+1} \wedge P_1 \star P_{s+1} \star P_{n+2} \Rightarrow P_1 \star Q \star P_{n+2},$$

pelo item (iv) do Teorema 2.8.

- $P_1 \star P_{s+1} \star P_s$. Mas

$$P_1 \star P_{s+1} \star P_s \wedge P_{s+1} \star Q \star P_s \Rightarrow P_1 \star Q \star P_s,$$

pelo item (vi) do Teorema 2.8. Mas

$$P_1 \star Q \star P_s \wedge P_1 \star P_s \star P_{n+2} \Rightarrow P_1 \star Q \star P_{n+2},$$

pelo item (v) do Teorema 2.8. ■

Voltemos ao nosso modelo do Plano Cartesiano sobre \mathbb{R} . Consideremos os $n > 2$ pontos colineares $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$. Tomando dois deles distintos como base, P_j e P_k , $j \neq k$, podemos expressar a colinearidade através da relação:

$$(x_i - x_j, y_i - y_j) = t_i(x_k - x_j, y_k - y_j),$$

onde $t_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Evidentemente, $t_j = 0$ e $t_k = 1$. A ordenação linear corresponde, portanto, a ordenar, crescente ou decrescentemente, os n valores t_1, \dots, t_n .

2.5.6 Semirretas, Ângulos e o Teorema da Trave

Definição 2.2. Dados dois pontos distintos A e B , a semirreta \overrightarrow{AB} é assim definida:

$$\overrightarrow{AB} = \{A\} \cup \{P \in AB \mid P \text{ e } B \text{ estão do mesmo lado de } AB \text{ em relação a } A\}.$$

O ponto A é denominado origem da semirreta.

É fácil mostrar que $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset AB$. Além disso: $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$. Assim, a reta AB é denominada *reta suporte* do segmento \overline{AB} e da semirreta \overrightarrow{AB} .

Pelo Teorema da Separação da Reta, pode-se mostrar que um ponto qualquer sobre uma reta dá origem a duas semirretas, denominadas *opostas*.

Definição 2.3. Dadas duas semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , com origem comum A e não contidas na mesma reta, o ângulo $\angle BAC$ é assim definido:

$$\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}.$$

A origem comum A é denominada vértice do ângulo $\angle BAC$. As semirretas são os lados do ângulo.

É claro que $\angle BAC = \angle CAB$. Observe que, pela definição, estão excluídos os ângulos nulo e raso.

O interior do ângulo $\angle BAC$ é o conjunto de pontos que estão do mesmo lado que C em relação à reta AB e do mesmo lado que B em relação à reta AC . O interior de um ângulo nunca é vazio, pois, pelo Teorema 2.5, o interior do segmento \overline{BC} não é vazio.

Teorema 2.11 (Teorema da Trave). *Sejam $\angle BAC$ um ângulo e D um ponto em seu interior. Então $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} \neq \emptyset$.*

Demonstração: Tomemos o ponto E tal que $C \star A \star E$. A ideia é aplicar (B4') em relação aos pontos E, A, C e a reta AD . Para isto, precisamos antes garantir que não exista um ponto de AD entre B e E .

Como o segmento \overline{BE} encontra a reta AB no ponto B , os pontos de $\overline{BE} - \{B\}$ estão todos do mesmo lado de AB . Por outro lado, $C \star A \star E$ significa que C e E estão em lados opostos em relação a AB .

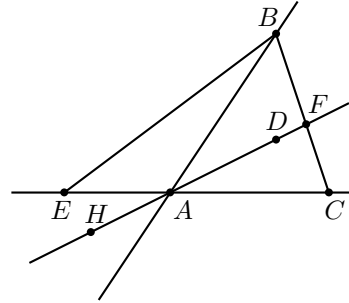


Fig. 2.8

Então, os pontos de $\overline{BE} - \{B\}$ estão todos do lado oposto de C em relação a AB . Como D , por hipótese, está no interior do ângulo $\angle BAC$, o que significa que, em relação a AB , D está do mesmo lado que C . Logo, os pontos de $\overrightarrow{AD} - \{A\}$ estão todos do mesmo lado de C com respeito a AB , donde $\overline{BE} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$.

Tomando H tal que $D \star A \star H$, o mesmo raciocínio se aplica à semirreta \overrightarrow{AH} , oposta a \overrightarrow{AD} , em relação à reta AC . Portanto, $\overline{BE} \cap \overrightarrow{AH} = \emptyset$.

Aplicando (B4'), a reta AD deve possuir um ponto F tal que $B \star F \star C$. Resta mostrar que este ponto pertence à semirreta \overrightarrow{AD} .

Mas B e F estão do mesmo lado de AC , já que $B \star F \star C$ e $C \in AC$; B e D estão do mesmo lado de AC , pois D , por hipótese, está no interior de $\angle BAC$. Logo, F e D estão do mesmo lado de AC , ou seja $\overline{DF} \cap AC = \emptyset$. Como $DF \cap AC = \{A\}$, segue que $A \notin \overline{DF}$, de modo que D e F estão do mesmo lado de AD em relação ao A . Donde $F \in \overrightarrow{AD}$. ■

No enunciado anterior, por abuso de linguagem, diremos que a semirreta \overrightarrow{AD} está no interior do ângulo $\angle BAC$, apesar de a origem A , que coincide com o vértice do ângulo, não pertencer ao interior deste. O próximo teorema nos mostra que, se uma semirreta tem origem no vértice de um ângulo e possui pelo menos um

ponto no interior deste ângulo, então ela estará no interior do ângulo, exceto pela origem.

Teorema 2.12. *Sejam $\angle BAC$ um ângulo e F um ponto no interior de $\angle BAC$. Então \overrightarrow{AF} , exceto pela origem A , está no interior de $\angle BAC$.*

Demonstração: A figura é a mesma do teorema anterior. Tomemos outro ponto qualquer $D \in \overrightarrow{AF}$, $D \neq A$. Então D e F estão do mesmo lado da reta AF em relação a A (definição de semirreta); logo $A \notin \overrightarrow{DF}$. Sendo $AF \cap AB = \{A\}$, concluímos que $\overrightarrow{DF} \cap AB = \emptyset$, donde D , F e C estão do mesmo lado da reta AB . Analogamente, podemos concluir que D , F e B estão do mesmo lado da reta AC . Portanto, D também pertence ao interior de $\angle BAC$. ■

Um fato interessante de observar é que, se substituirmos, no conjunto de axiomas, (B4) pelo Teorema da Separação do Plano, podemos facilmente deduzir (B4) como teorema a partir deste novo conjunto. Isto mostra que o Axioma de Pasch e o Teorema da Separação do Plano são equivalentes na presença dos axiomas (I1), (I2), (I3), (B1), (B2) e (B3).

No modelo do Plano Cartesiano sobre \mathbb{R} , a semirreta \overrightarrow{AB} , sendo $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, é interpretada como o conjunto:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_a, y - y_a) = t(x_b - x_a, y_b - y_a), t \geq 0\}.$$

O ângulo $\angle BAC$ interpretado como a união de dois conjuntos descrevendo seus lados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

E como você, leitor, expressaria o fato de um ponto $P = (x_p, y_p)$ estar no interior do ângulo $\angle BAC$, sendo $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$?

2.6 Congruência entre Segmentos

2.6.1 Axiomas e Primeiros Teoremas

Três axiomas postulam a relação de *congruência entre segmentos*, representada pelo símbolo \cong .

(C1) Dados um segmento \overline{AB} e uma semirreta \overrightarrow{CD} , existe um único ponto $E \in \overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{CE} \cong \overline{AB}$.¹

¹A rigor, a unicidade do ponto E pode ser provada como teorema, se se consideram também os axiomas de congruência para ângulos, que serão introduzidos na próxima seção. Optamos, aqui, pela versão de Hartshorne [10], que nos parece mais adequada do ponto de vista didático, pois permite trabalhar em separado a congruência de segmentos e ângulos.

(C2) Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ e $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Todo segmento é congruente a ele mesmo.

(C3) Se $A \star B \star C$, $D \star E \star F$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

O Axioma (C1) é útil em construções, funcionando como *transportador de segmentos*. Observe que, para seu correto emprego, o transporte de um segmento se dá a partir da origem de uma semirreta.

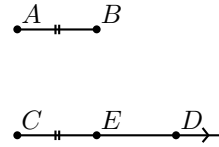


Fig. 2.9

(C1), no entanto, não permite transportar segmentos arbitrariamente, como ilustrado na Fig. 2.10. Para isto, é necessário um outro axioma, conhecido como *Axioma do Compasso*, que não faz parte da Geometria Neutra.

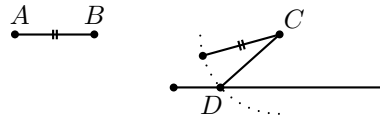


Fig. 2.10

Teorema 2.13. A relação binária \cong sobre o conjunto de todos os segmentos é uma relação de equivalência.

Demonstração: Devemos mostrar que \cong é reflexiva, simétrica e transitiva. A reflexividade está expressa em (C2). Para mostrarmos a simetria, suponhamos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Como $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (reflexividade) e $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, por (C2), concluímos que $\overline{CD} \cong \overline{AB}$. Para a transitividade, suponhamos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{CD} \cong \overline{EF}$. Usando a simetria, vem $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{EF} \cong \overline{CD}$, donde, por (C2), $\overline{AB} \cong \overline{EF}$. ■

Se denominarmos \mathbb{S} o conjunto de todos os segmentos, a relação binária \cong sobre \mathbb{S} , sendo de equivalência, dá origem ao conjunto quociente \mathbb{S}/\cong . Os elementos de \mathbb{S}/\cong são classes de equivalência, ou seja, subconjuntos reunindo, cada um deles, todos os segmentos congruentes entre si. A estas classes de equivalência chamaremos *segmentos livres*. Qualquer segmento de uma classe é dito um *representante* da classe. Existem, portanto, infinitos segmentos livres, cada um deles possuindo infinitos representantes.

2.6.2 Interpretação da Congruência entre Segmentos no Modelo do Plano Cartesiano

Continuando o modelo do Plano Cartesiano sobre o Corpo \mathbb{R} , que vimos desenvolvendo no texto, vamos, agora, interpretar nele a relação \cong , de congruência entre segmentos.

Dados dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , sendo $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$, $C = (x_c, y_c)$ e $D = (x_d, y_d)$, interpretamos

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \iff \Delta(A, B) = \Delta(C, D),$$

onde $\Delta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a conhecida distância euclidiana, assim definida:

$$\Delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

A função Δ satisfaz claramente as quatro propriedades seguintes, para todo $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, sendo denominada uma *métrica*:

- $\Delta(A, B) \geq 0$;
- $\Delta(A, B) = 0 \iff A = B$;
- $\Delta(A, B) = \Delta(B, A)$;
- $\Delta(A, C) \leq \Delta(A, B) + \Delta(B, C)$.

Passemos, então, a verificar que os Axiomas (C1)-(C3) são satisfeitos no modelo do Plano Cartesiano sobre o Corpo \mathbb{R} com a métrica euclidiana:

(C1) Tomemos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, $C = (x_c, y_c)$ e $D = (x_d, y_d)$. A semirreta \overrightarrow{CD} é o conjunto de pontos

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_c, y - y_c) = t(x_d - x_c, y_d - y_c), t \geq 0\}.$$

É fácil ver que o ponto $E = (x_e, y_e)$ sobre \overrightarrow{CD} tal que $\overline{CE} \cong \overline{AB}$ é unicamente determinado para $t = \frac{\Delta(A, B)}{\Delta(C, D)}$.

(C2) Segue diretamente do fato de a congruência ter sido interpretada como igualdade.

(C3) Mostraremos que, se $A \star B \star C$, então $\Delta(A, C) = \Delta(A, B) + \Delta(B, C)$ e o Axioma (C3) seguirá diretamente deste fato.

Sendo $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$, a interpretação da relação “estar entre” nos diz que, se $A \star B \star C$, então existe $t \in]0, 1[$ tal que

$$(x_b - x_a, y_b - y_a) = t(x_c - x_a, y_c - y_a).$$

Basta ver que $\Delta(A, B) = t\Delta(A, C)$ e $\Delta(B, C) = (1-t)\Delta(A, C)$ para concluir o resultado.

O leitor fica convidado a experimentar as seguintes métricas e verificar em quais delas os Axiomas (C1)-(C3) são satisfeitos:

- $\Delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.
- $\Delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$.
- $\Delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x_1, y_1) = (x_2, y_2); \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

2.6.3 Soma e Comparação de Segmentos

Definição 2.4. *Dados três pontos A , B e C tais que $A \star B \star C$, dizemos que o segmento \overline{AC} é a soma dos segmentos \overline{AB} e \overline{BC} :*

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Teorema 2.14. *Se $A \star B \star C$, $D \star E \star F$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AB} + \overline{BC} \cong \overline{DE} + \overline{EF}$.*

Demonstração: O enunciado é mera releitura de (C3), usando a notação de soma recém-introduzida. ■

A Definição 2.4 prevê apenas a soma de segmentos consecutivos e apoiados numa mesma reta. Vamos estendê-la a segmentos livres, o que nos permitirá somar quaisquer dois segmentos.

Definição 2.5. *Um segmento livre \bar{m} é a soma dos segmentos livres \bar{n} e \bar{p}*

$$\bar{p} = \bar{m} + \bar{n}$$

quando existirem A , B e C satisfazendo $A \star B \star C$, tais que \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} sejam representantes das classes de equivalência \bar{m} , \bar{n} e \bar{p} , respectivamente.

Teorema 2.15. *A operação de soma, estendida a segmentos livres, não depende dos representantes escolhidos.*

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 2.14. ■

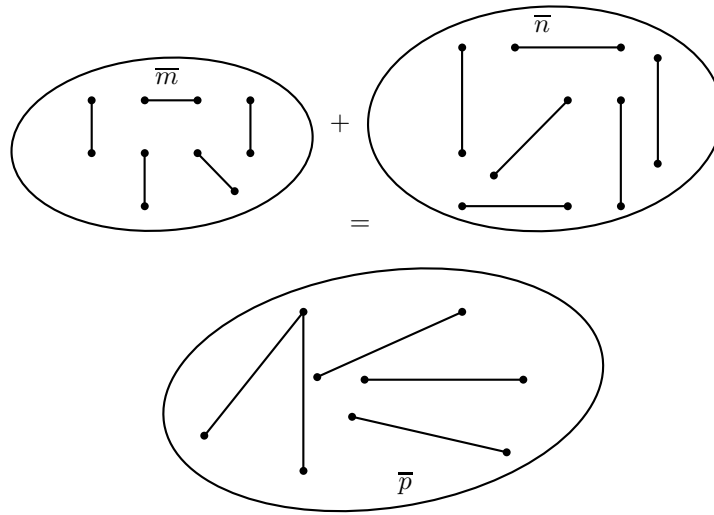


Fig. 2.11

O conceito de *diferença* entre segmentos surge com a demonstração do seguinte teorema, deixada a cargo do leitor:

Definição 2.6 (*Diferença entre Segmentos*). Dados $A \star B \star C$, o segmento \overline{BC} é denominado diferença entre \overline{AC} e \overline{AB} :

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}.$$

O próximo teorema, cuja demonstração é deixada a cargo do leitor, tem como consequência imediata a extensão do conceito de diferença entre segmentos a segmentos livres:

Teorema 2.16. *Sejam os pontos A, B, C tais que $A \star B \star C$ e os pontos E e F sobre uma semirreta com origem D . Se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então $D \star E \star F$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.*

Desigualdades entre segmentos podem ser definidas a partir das relações de ordem e congruência, como se segue.

Definição 2.7. *Sejam \overline{AB} e \overline{CD} dois segmentos. Dizemos que \overline{AB} é menor que \overline{CD} , denotando este fato por $\overline{AB} < \overline{CD}$, se existir um ponto E tal que $C \star E \star D$ e $\overline{AB} \cong \overline{CE}$. Neste caso, também dizemos que \overline{CD} é maior que \overline{AB} , representando este fato por $\overline{CD} > \overline{AB}$.*

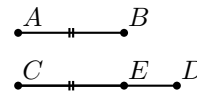


Fig. 2.12

Os próximos teoremas analisam propriedades das relações \cong e $<$ sobre segmentos. O primeiro deles estende a relação $<$ a segmentos livres; o segundo, mostra que $<$ é transitiva; finalmente, o terceiro estabelece a tricotomia, permitindo comparar dois segmentos quaisquer. As demonstrações são deixadas a cargo do leitor.

Teorema 2.17. *Dados os segmentos $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, $\overline{AB} < \overline{CD}$ se, e somente se, $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$.*

Teorema 2.18. *Dados três segmentos \overline{AB} , \overline{CD} e \overline{EF} , se $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{CD} < \overline{EF}$, então $\overline{AB} < \overline{EF}$.*

Teorema 2.19. *Dados dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , apenas uma das opções seguintes é verdadeira: ou $\overline{AB} < \overline{CD}$; ou $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; ou $\overline{AB} > \overline{CD}$.*

Existe, aqui, um ponto importante a ser observado. Com os axiomas e definições introduzidos até este ponto, a comparação entre segmentos é possível sem a necessidade de medi-los, como habitualmente se faz nos cursos de Geometria Euclidiana. A métrica euclidiana $\Delta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que agregamos ao modelo do Plano Cartesiano sobre \mathbb{R} para interpretar a relação de congruência entre segmentos, fornece-nos também uma interpretação para o conceito de segmentos livres. Considerando que a função $\mu : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mu(\overline{AB}) = ((x_a, y_a), (x_b, y_b)),$$

onde (x_a, y_a) são as coordenadas de A e (x_b, y_b) as de B , é injetiva (mas não sobrejetiva - verifique!), a função composta

$$\Delta \circ \mu : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

associa números reais a segmentos, de forma que todos os segmentos congruentes a um dado \overline{AB} (e apenas estes) terão como imagem o mesmo número real. Assim, $\Delta \circ \mu$ induz uma injeção de \mathbb{S}/\cong em \mathbb{R} , estabelecendo uma associação entre segmentos livres e números reais. Deste modo, as operações e desigualdades sobre segmentos livres podem ser naturalmente interpretadas como as operações homônimas sobre números reais.

2.7 Congruência entre Ângulos

2.7.1 Axiomas e Primeiros Teoremas

Três axiomas postulam a relação de *congruência entre ângulos*, também representada pelo símbolo \cong .

- (C4) Dados um ângulo $\angle BAC$ e uma semirreta \overrightarrow{DF} , existe uma única semirreta \overrightarrow{DE} de um dos lados da reta DF tal que $\angle BAC \cong \angle EDF$.
- (C5) Se $\angle BAC \cong \angle HGI$ e $\angle EDF \cong \angle HGI$, então $\angle BAC \cong \angle EDF$. Todo ângulo é congruente a ele mesmo.
- (C6) Dados os ângulos $\angle BAC \cong \angle EDF$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então $\angle ABC \cong \angle DEF$ e também, por renomeação de letras, $\angle BCA \cong \angle EFD$.

O Axioma (C4) é essencial em construções, funcionando como *transportador de ângulos*. Observe que, para seu correto emprego, o transporte de um ângulo se dá a partir da origem de uma semirreta, para um dos lados da reta suporte.

Teorema 2.20. *A relação binária \cong sobre o conjunto de todos os ângulos é uma relação de equivalência.*

Demonstração: A prova é análoga à do Teorema 2.13. ■

Se denominarmos \mathbb{A} o conjunto de todos os ângulos, a relação binária \cong sobre \mathbb{A} , sendo de equivalência, dá origem ao conjunto quociente \mathbb{A}/\cong . Os elementos de \mathbb{A}/\cong são classes de equivalência, reunindo, cada uma delas, todos os ângulos congruentes entre si. A estas classes de equivalência chamaremos *ângulos livres*. Qualquer ângulo pertencente a uma classe é um *representante* da classe.

Teorema 2.21. *Sob as mesmas hipóteses do Axioma (C6), a congruência $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ também se verifica.*

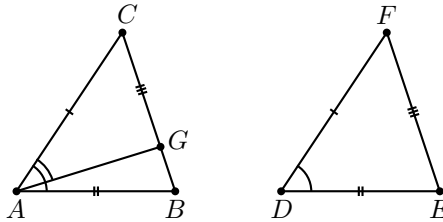


Fig. 2.13

Demonstração: Além das congruências $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, assumidas por hipótese, o axioma (C6) nos dá duas congruências adicionais: $\angle ACB \cong \angle DFE$ e $\angle CBA \cong \angle FED$. Suponhamos por absurdo, e sem perda de generalidade, que $\overline{BC} > \overline{EF}$.

Sobre a semirreta \overrightarrow{CB} , a partir do ponto C , tomamos $\overline{CG} \cong \overline{FE}$. Observando os ângulos $\angle ACG = \angle ACB \cong \angle DFE$ e os segmentos $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\overline{FE} \cong \overline{CG}$,

podemos aplicar novamente o axioma (C6), dele resultando: $\angle CAG \cong \angle FDE \cong \angle CAB$, o que contraria o Axioma (C4), já que $C \star G \star B$ implica, pelo Teorema 2.12, que \overrightarrow{AG} está no interior de $\angle CAB$, quando deveria, na verdade, coincidir com \overrightarrow{AB} .

■

Definição 2.8. Se $\angle BAC$ é um ângulo e D é um ponto sobre a semirreta oposta a \overrightarrow{AC} , os ângulos $\angle BAD$ e $\angle BAC$ são suplementares, ou ainda, $\angle BAD$ é suplemento de $\angle BAC$ e vice-versa. Veja Fig. 2.14.

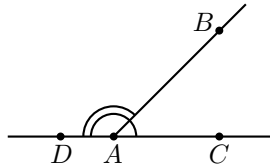


Fig. 2.14

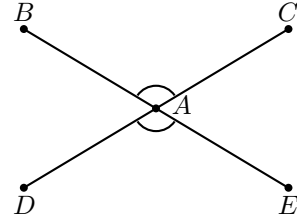


Fig. 2.15

Definição 2.9. Seja $\angle BAC$ um ângulo e consideremos as semirretas \overrightarrow{AE} , oposta a \overrightarrow{AB} , e \overrightarrow{AD} , oposta a \overrightarrow{AC} . Os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DAE$, bem como $\angle BAD$ e $\angle CAE$, são chamados opostos pelo vértice, ou verticalmente opostos. Veja Fig. 2.15.

O conceito de ângulos suplementares estende-se naturalmente a ângulos livres, através do seguinte teorema:

Teorema 2.22 (Congruência do Suplementar). Se $\angle BAC$ e $\angle CAD$ são ângulos suplementares, $\angle B'A'C'$ e $\angle C'A'D'$ são ângulos suplementares e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, então $\angle CAD \cong \angle C'A'D'$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos considerar $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$, $\overline{A'D'} \cong \overline{AD}$ e $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$, já que, por (C1), é possível determinar A', B', C', D' nestas condições.

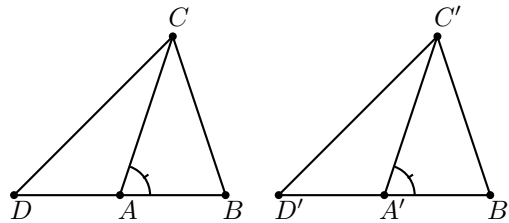


Fig. 2.16

Pelo Teorema 2.21, concluímos as congruências adicionais: $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$, $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. Além disso,

$$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} \cong \overline{B'A'} + \overline{A'D'} = \overline{B'D'}.$$

Novamente pelo Teorema 2.21, aplicado agora aos ângulos $\angle CBD$ e $\angle C'B'D'$, concluímos que $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ e $\angle CDB \cong \angle C'D'B'$.

Finalmente, aplicando de novo o Teorema 2.21 aos ângulos $\angle CDA$ e $\angle C'D'A'$, concluímos que $\angle CAD \cong \angle C'A'D'$. ■

O teorema seguinte estabelece a recíproca:

Teorema 2.23. *Se $\angle BAC$ e $\angle CAD$ são suplementares, $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$, $\angle C'A'D' \cong \angle CAD$ e os pontos B' e D' estão em lados opostos da reta $A'C'$, então os pontos B' , A' e D' são colineares.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que B' , A' e D' não sejam colineares e consideremos a semirreta $\overrightarrow{A'D''}$, oposta a $\overrightarrow{A'B'}$, que será, portanto, distinta de $\overrightarrow{A'D'}$. Além disso, B' e D'' estão em lados opostos de $A'C'$, o que significa que D' e D'' estão de um mesmo lado.

Como $\angle C'A'D''$ e $\angle C'A'B'$ são suplementares, pelo teorema anterior, temos que $\angle C'A'D'' \cong \angle CAD \cong \angle C'A'D'$. Mas estando D' e D'' situados do mesmo lado de $A'C'$, as semirretas $\overrightarrow{A'D'}$ e $\overrightarrow{A'D''}$ deveriam coincidir, por (C4). ■

A prova do próximo teorema é aplicação direta do Teorema 2.22 e é deixada como exercício.

Teorema 2.24. *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

2.7.2 Interpretação da Congruência entre Ângulos no Modelo do Plano Cartesiano

De maneira análoga à que fizemos para segmentos, vamos definir uma função φ que associa a cada ângulo um número real, baseada na métrica euclidiana $\Delta(x, y)$, utilizada para verificar a congruência entre segmentos. Assim, dados dois ângulos $\angle BAC$ e $\angle EDF$, teremos

$$\angle BAC \cong \angle EDF \iff \varphi(B, A, C) = \varphi(E, D, F),$$

onde a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow]-1, 1[$ tem a seguinte definição:

$$\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) = \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(y_3 - y_2)}{\Delta((x_1, y_1), (x_2, y_2))\Delta((x_3, y_3), (x_2, y_2))}.$$

O leitor reconhecerá, de imediato, que $\varphi(B, A, C)$ nada mais é do que o *coseno* de $\angle BAC$, que também pode ser expresso:

$$\varphi(B, A, C) = \frac{\Delta^2(B, A) + \Delta^2(C, A) - \Delta^2(B, C)}{2\Delta(B, A)\Delta(C, A)}.$$

Verifique!

Pela Definição 2.3, os lados de um ângulo não podem ter a mesma reta suporte, o que exclui os ângulos nulo e raso, por vezes introduzidos nos estudos secundários de geometria; por isso, os extremos -1 e 1 foram excluídos do intervalo imagem de φ .

Passemos, portanto, à verificação dos Axiomas (C4)-(C6):

(C4) Buscamos um ponto $E = (x_e, y_e)$ tal que

$$\frac{\Delta^2(E, D) + \Delta^2(F, D) - \Delta^2(E, F)}{2\Delta(E, D)\Delta(F, D)} = \varphi(B, A, C),$$

ou, em coordenadas:

$$\frac{(x_e - x_d)(x_f - x_d) + (y_e - y_d)(y_f - y_d)}{\sqrt{(x_e - x_d)^2 + (y_e - y_d)^2} \sqrt{(x_f - x_d)^2 + (y_f - y_d)^2}} = \varphi(B, A, C).$$

Abreviando os termos constantes $\alpha = x_f - x_d$, $\beta = y_f - y_d$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ e $\varphi(B, A, C) = \phi$, vem:

$$\frac{\alpha(x_e - x_d) + \beta(y_e - y_d)}{\gamma \sqrt{(x_e - x_d)^2 + (y_e - y_d)^2}} = \phi,$$

ou ainda:

$$\frac{\alpha X + \beta Y}{\gamma \sqrt{X^2 + Y^2}} = \phi,$$

se tomarmos $X = x_e - x_d$ e $Y = y_e - y_d$. Elevando ao quadrado e reagrupando:

$$[\beta^2 - \phi^2 \gamma^2] Y^2 + [2\alpha\beta X] Y + [\alpha^2 - \phi^2 \gamma^2] X^2 = 0.$$

Resolvendo em Y , chegamos a:

$$y_e - y_d = \left[\frac{-\alpha\beta \pm \phi\gamma^2 \sqrt{1 - \phi^2}}{\beta^2 - \phi^2 \gamma^2} \right] (x_e - x_d),$$

que mostra ser $y_e - y_d$ linear em $x_e - x_d$, já que a expressão entre colchetes envolve apenas constantes. As duas soluções obtidas correspondem aos dois lados da reta DF , o que significa que, escolhido um lado, como afirmado na hipótese, haverá uma única semirreta formando um ângulo congruente a $\angle BAC$ com \overrightarrow{DF} .

(C5) Segue do fato de a congruência ter sido interpretada como igualdade.

(C6) Pela definição da função φ , temos

$$\begin{aligned}\Delta^2(B, C) &= \Delta^2(B, A) + \Delta^2(C, A) - 2\Delta(B, A)\Delta(C, A)\varphi(B, A, C) \\ \Delta^2(E, F) &= \Delta^2(E, D) + \Delta^2(F, D) - 2\Delta(E, D)\Delta(F, D)\varphi(E, D, F),\end{aligned}$$

donde, pelas congruências assumidas na hipótese, $\Delta(B, C) = \Delta(E, F)$, ou seja $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. Como

$$\begin{aligned}\varphi(D, E, F) &= \frac{\Delta^2(D, E) + \Delta^2(F, E) - \Delta^2(F, D)}{2\Delta(D, E)\Delta(F, E)} \\ \varphi(A, B, C) &= \frac{\Delta^2(A, B) + \Delta^2(C, B) - \Delta^2(C, A)}{2\Delta(A, B)\Delta(C, B)},\end{aligned}$$

segue que $\varphi(D, E, F) = \varphi(A, B, C)$, donde $\angle DEF \cong \angle ABC$.

Observe que a congruência $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, deduzida aqui em primeiro lugar, foi expressa no Teorema 2.21.

2.7.3 Soma e Comparação de Ângulos

De maneira análoga à que fizemos para segmentos, vamos examinar, agora, a questão da soma entre dois ângulos. Começemos pela definição.

Definição 2.10. *Sejam $\angle BAC$ um ângulo e \overrightarrow{AD} uma semirreta no interior de $\angle BAC$, exceto pelo vértice A . O ângulo $\angle BAC$ é denominado soma dos ângulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$:*

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC.$$

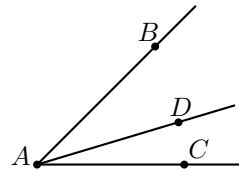


Fig. 2.17

Os ângulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$ na Fig. 2.17 são ditos *adjacentes*, pois possuem um dos lados em comum (\overrightarrow{AD}).

Esta definição se estende naturalmente a ângulos livres:

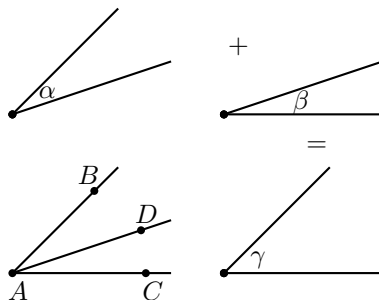


Fig. 2.18

Definição 2.11. Um ângulo livre γ é a soma dos ângulos livres α e β

$$\gamma = \alpha + \beta$$

quando existirem um ângulo $\angle BAC$ e uma semirreta \overrightarrow{AD} no interior de $\angle BAC$ (exceto pelo vértice A), tais que $\angle BAC$ é representante de γ , $\angle BAD$ de α e $\angle DAC$ de β .

Ao contrário do que acontece com segmentos livres, nem todo par de ângulos livres possui uma soma, conforme é ilustrado na Fig. 2.19: a semirreta \overrightarrow{AD} , comum aos representantes $\angle BAD$ e $\angle DAC$, não está no interior do ângulo $\angle BAC$.

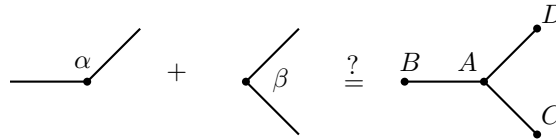


Fig. 2.19

Precisamos mostrar que a soma, estendida a ângulos livres, não depende dos representantes escolhidos.

Teorema 2.25. Sejam $\angle BAC$ um ângulo e \overrightarrow{AD} uma semirreta no interior de $\angle BAC$. Suponhamos $\angle D'A'C' \cong \angle DAC$ e $\angle B'A'D' \cong \angle BAD$ e as semirretas $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{A'C'}$ em lados opostos da reta $A'D'$, exceto pela origem A' . Então as semirretas $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{A'C'}$ formam um ângulo $\angle B'A'C'$, sendo $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$, em cujo interior está a semirreta $\overrightarrow{A'D'}$.

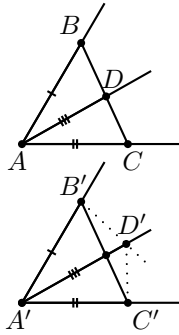


Fig. 2.20

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos considerar $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$, $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$, $\overline{A'D'} \cong \overline{AD}$ e $B \star D \star C$.

Por (C6), temos que $\angle A'D'B' \cong \angle ADB$ e $\angle A'C'D' \cong \angle ACD$. Sendo $\angle ADB$ e $\angle ADC$ suplementares, $\angle A'D'B'$ e $\angle A'D'C'$ também o são e, portanto, B', D' e C' são colineares (Teorema 2.23). Pelo Teorema 2.21, temos que $\overline{BD} \cong \overline{B'D'}$ e $\overline{DC} \cong \overline{D'C'}$, donde $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, por (C3).

Novamente por (C6), aplicado agora aos ângulos $\angle ABC$ e $\angle A'B'C'$, resulta que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

Para ver que $\overrightarrow{A'D'}$ está no interior de $\angle B'A'C'$, basta levar em conta que $B' \star D' \star C'$ e aplicar o Teorema 2.12. ■

O conceito de diferença entre ângulos pode ser deduzido da prova do teorema precedente. Dizemos que o ângulo $\angle DAC$ é a diferença entre os ângulos $\angle BAC$ e $\angle BAD$:

$$\angle DAC = \angle BAC - \angle BAD.$$

A extensão para ângulos livres se dá naturalmente.

Da mesma forma que fizemos para segmentos, as relações $<$ e $>$ podem ser definidas também para ângulos, utilizando o axioma (C4) e o conceito de semirreta no interior de um ângulo.

Definição 2.12. *Sejam dois ângulos $\angle BAC$ e $\angle DEF$. Dizemos que $\angle BAC < \angle DEF$ quando existir uma semirreta \overrightarrow{EG} , no interior de $\angle DEF$, tal que $\angle BAC \cong \angle GEF$. Neste caso, também podemos dizer que $\angle DEF > \angle BAC$.*

Os próximos teoremas cumprem o mesmo papel dos teoremas análogos para segmentos.

Teorema 2.26. *Sejam os ângulos $\alpha \cong \alpha'$ e $\beta \cong \beta'$. Então $\alpha < \beta \iff \alpha' < \beta'$.*

Teorema 2.27. *Sejam os ângulos α , β e γ . Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha < \gamma$.*

Teorema 2.28. *Entre dois ângulos α e β , apenas uma das opções seguintes é verdadeira: ou $\alpha < \beta$; ou $\alpha \cong \beta$; ou $\alpha > \beta$.*

A mesma observação feita para segmentos aplica-se aos ângulos: é possível compará-los sem medi-los.

O conceito de ângulo livre possui interpretação imediata no modelo do Plano Cartesiano sobre \mathbb{R} , utilizando a métrica euclidiana para interpretar a congruência de segmentos e a função coseno para interpretar a congruência entre ângulos. Com raciocínio análogo ao que fizemos para segmentos, podemos concluir que existe uma função injetiva do conjunto \mathbb{A}/\cong no intervalo $] -1, 1[$.

As operações sobre ângulos, no entanto, não se expressam diretamente sobre números reais neste intervalo, uma vez que a função coseno não tem comportamento linear. As desigualdades, por exemplo, expressam-se inversamente, já que, no nosso caso, $\alpha < \beta$ implica $\cos \alpha > \cos \beta$.

2.7.4 Alguns Abusos de Linguagem

Apesar de a soma não estar definida para todo par de ângulos livres, por comodidade de linguagem, vamos formalizar alguns abusos. Sejam α e β dois ângulos livres, com representantes adjacentes $\angle BAC$ e $\angle CAD$, estando B e D em lados opostos da reta AC , suporte do lado \overrightarrow{AC} comum aos dois ângulos:

- Se C e D estão do mesmo lado de AB , pela Definição 2.10, $\angle DAB = \angle CAB + \angle DAC$, donde $\alpha + \beta$ também está definida. Diremos que esta soma é *menor que dois ângulos retos*, indicando este fato por:

$$\alpha + \beta < 2R.$$

- Se D é incidente a AB , $\angle BAC$ e $\angle CAD$ são suplementares e a soma entre $\angle BAC$ e $\angle CAD$ não está definida. Igualmente, a soma entre α e β não está definida, mas diremos que esta soma é *igual a dois ângulos retos*, indicando este fato por:

$$\alpha + \beta = 2R.$$

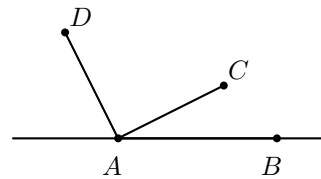


Fig. 2.21

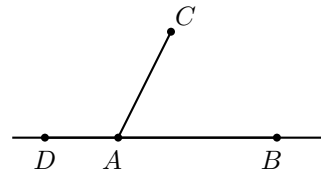


Fig. 2.22

- Se C e D estão em lados opostos da reta AB , a soma entre $\angle BAC$ e $\angle CAD$ não está definida, tampouco a soma entre α e β . Porém, diremos que esta soma é *maior do que dois ângulos retos*, indicando este fato por:

$$\alpha + \beta > 2R.$$

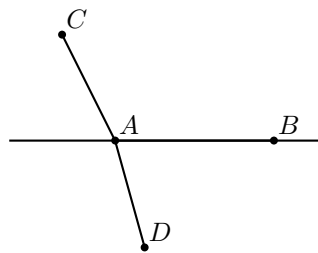


Fig. 2.23

Estas definições serão úteis no Capítulo 3, quando nos referirmos à soma dos ângulos internos de um triângulo.

2.7.5 Ângulos Retos, Agudos e Obtusos

A partir dos conceitos de congruência, suplementaridade e a relação $<$ introduzida no conjuntos dos ângulos, é possível definir ângulo reto, agudo e obtuso, *sem fazer menção a medida*.

Definição 2.13. *Um ângulo é reto quando é congruente a um de seus suplementares. Um ângulo não reto é dito agudo ou obtuso, conforme seja menor ou maior que um ângulo reto, respectivamente.*

A Fig. 2.24 ilustra esta definição.

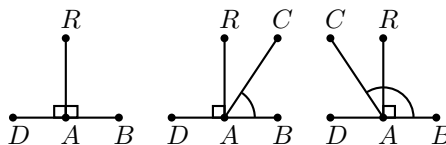


Fig. 2.24

Observe novamente o leitor que as definições de ângulo reto, agudo e obtuso não dependem de nenhum processo de medida, baseando-se apenas nas relações $<$ e $>$, introduzidas anteriormente também sem a necessidade de medir os ângulos.

A proposição seguinte aparece em *Os Elementos*, de Euclides, como quarto postulado. Em nosso contexto, ela é demonstrável a partir dos resultados já obtidos.

Teorema 2.29. *Dois ângulos retos quaisquer são congruentes.*

Demonstração: Sejam $\angle BAC$ e $\angle FEH$ dois ângulos retos. Suponhamos, por absurdo e sem perda de generalidade, que $\angle BAC < \angle FEH$.

Portanto, se transportarmos, por (C4), $\angle BAC$ sobre a semirreta \overrightarrow{EH} para o mesmo lado de EH onde está F , obteremos a semirreta \overrightarrow{EJ} , no interior do ângulo $\angle FEH$, tal que $\angle JEH \cong \angle BAC$.

É fácil verificar que \overrightarrow{EF} está no interior de $\angle GEJ$; daí, $\angle FEG < \angle GEJ$. Como $\angle FEH$ é reto, por hipótese, e $\angle FEG$ é suplementar a $\angle FEH$, temos $\angle FEG \cong \angle FEH$. Logo $\angle FEH < \angle GEJ$.

Porém $\angle GEJ$ e $\angle JEH$ são suplementares, $\angle BAC$ e $\angle BAD$ são suplementares e $\angle BAC \cong \angle JEH$; pelo Teorema 2.22, temos que $\angle GEJ \cong \angle BAD$.

Portanto, $\angle FEH < \angle BAD$. Como $\angle BAD \cong \angle BAC$, pela definição de ângulo reto, temos $\angle FEH < \angle BAC$, contrariando a hipótese. ■

Definir um objeto não implica em absoluto a sua existência. Assim, não temos ainda a garantia de que existam, de fato, ângulos retos. Construir um exemplar de ângulo reto, utilizando os axiomas e teoremas desenvolvidos até agora, seria suficiente para garantir a existência dos mesmos. A construção feita na prova do teorema seguinte é devida a Hilbert.

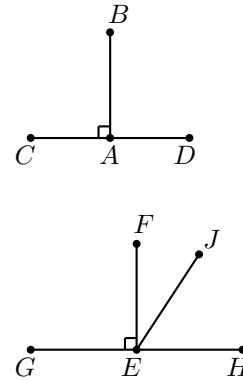


Fig. 2.25

Teorema 2.30. *Existem ângulos retos.*

Demonstração: Sejam a reta ℓ e os pontos $P, T \in \ell$, $P \neq T$, e $Q \notin \ell$.

Usando (C4), transportamos o ângulo $\angle QPT$ para o lado oposto de ℓ e, sobre a semirreta obtida, a partir do ponto P , usando (C1), tomamos $\overline{PR} \cong \overline{PQ}$. Como Q e R estão em lados opostos de ℓ , pelo Teorema da Separação do Plano, $\overline{QR} \cap \ell = \{S\}$.

Se $P \neq S$, por (C6), concluímos que $\angle PSQ \cong \angle PSR$ e, como esses ângulos são suplementares, pois Q, S, R são colineares, ambos são retos.

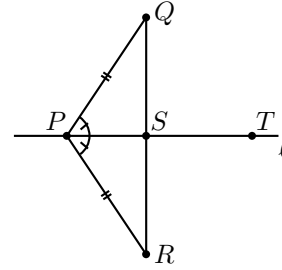


Fig. 2.26

Se $P = S$, basta repetir a construção para o outro ponto $T \in \ell$. ■

Uma vez comprovada a existência de ângulos retos, podemos definir retas perpendiculares:

Definição 2.14. *Duas retas ℓ e m são perpendiculares quando possuem um ponto P em comum e os quatro ângulos formados pelos pares de semirretas não opostas forem retos.*

2.8 O Teorema do Ângulo Externo

Esta seção introduz um dos teoremas mais importantes da Geometria Neutra – o Teorema do Ângulo Externo, a partir do qual demonstra-se grande parte das proposições que se seguirão.

Começemos por definir *triângulo*:

Definição 2.15. *Dados três pontos não colineares A, B e C , o triângulo $\triangle ABC$ é assim definido:*

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}.$$

Os pontos A, B e C denominam-se vértices e os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ e \overline{CA} são os lados do triângulo. O interior de $\triangle ABC$ é a interseção dos interiores dos ângulos $\angle ABC, \angle BCA$ e $\angle CAB$, denominados ângulos internos de $\triangle ABC$.

Em um triângulo, dizemos que um ângulo é *oposto* ao lado que não é subconjunto das semirretas que definem o ângulo. Assim, em um triângulo $\triangle ABC$, o ângulo $\angle BAC$, por exemplo, é oposto ao lado \overline{BC} e vice-versa.

Definição 2.16. Em um triângulo, os ângulos suplementares aos três ângulos são denominados ângulos externos.

Vejam, então, o Teorema do Ângulo Externo.

Teorema 2.31. Em um triângulo, todo ângulo externo é maior do que os internos não adjacentes a ele.

Demonstração: Sejam o triângulo $\triangle ABC$ e o ângulo $\angle DBA$, suplementar ao ângulo interno $\angle ABC$ e, portanto, externo ao triângulo. Suponhamos, por absurdo, que $\angle DBA \not\cong \angle BAC$.

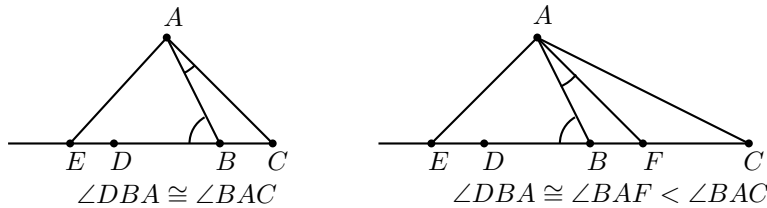


Fig. 2.27

Temos, então, dois casos a analisar, ambos ilustrados na Fig. 2.27:

- $\angle DBA \cong \angle BAC$
Neste caso, tomemos o ponto E sobre a semirreta \overrightarrow{BD} de forma que $\overline{BE} \cong \overline{AC}$ (C1). Por (C6), temos que $\angle ABC \cong \angle BAE$. Mas $\angle DBA$ e $\angle ABC$ são suplementares, o que significa que $\angle ABC$ e $\angle BAE$ também o são. Logo, os pontos C , A e E são colineares (Teorema 2.23), o que acarreta $A \in BC$, donde $\triangle ABC$ não é um triângulo.
- $\angle DBA < \angle BAC$
Usando (C4), transportamos o ângulo externo $\angle DBA$ para o interior do ângulo $\angle BAC$. A semirreta obtida interceptará o lado \overline{BC} do triângulo no ponto F , pelo Teorema da Trave. Reçaimos, portanto, no caso anterior, considerando agora o ângulo $\angle DBA$ externo ao triângulo $\triangle ABF$. ■

A formulação da Geometria Neutra para o Teorema do Ângulo Externo aqui apresentada é a mesma que aparece em *Os Elementos*, de Euclides, como a Proposição 16 do Livro I ([11]). A prova que utilizamos, no entanto, é a proposta por Hilbert ([15]), que dispensa a construção do ponto médio, utilizado na prova de Euclides.

Este teorema reaparece posteriormente, em Euclides, como a Proposição I.32, em sua versão conhecida na Geometria Euclidiana: um ângulo externo vale a soma dos internos não adjacentes. Esta versão mais restrita, no entanto, só pode ser comprovada mediante a introdução do axioma das paralelas.

Como consequência imediata do Teorema do Ângulo Externo, podemos afirmar que todo triângulo possui sempre dois ângulos agudos e, no máximo, um ângulo reto ou obtuso. Confira.

A existência de retas perpendiculares decorre da existência de ângulos retos. O próximo teorema responde a uma importante questão: por um ponto dado, quantas perpendiculares a uma reta também dada é possível traçar?

Teorema 2.32. *Dados um ponto e uma reta, existe exatamente uma perpendicular à reta dada passando pelo ponto dado.*

Demonstração: Se o ponto e a reta são incidentes, a proposição decorre da congruência de todos os ângulos retos. Se o ponto está fora da reta e supusermos, por absurdo, a existência de mais de uma perpendicular, veremos que o Teorema do Ângulo Externo é claramente violado. ■

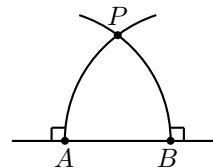


Fig. 2.28

O ponto de encontro entre ℓ e a única perpendicular a ℓ incidente a um ponto $P \notin \ell$ é denominado *pé da perpendicular a ℓ baixada por P* .

A construção da única perpendicular a uma reta ℓ passando por um ponto P dado pode ser feita da seguinte maneira:

- Se $P \notin \ell$, a construção devida a Hilbert utilizada na prova do Teorema 2.30 nos fornece a perpendicular desejada;
- Se $P \in \ell$, tomamos um ponto Q fora de ℓ , baixamos a perpendicular a ℓ por Q (caso anterior). Esta perpendicular formará com a reta ℓ quatro ângulos retos, suplementares dois a dois. Basta, então, transportar um deles, por (C4), a partir de uma das semirretas de ℓ com origem em P .

O Teorema 2.32 tem uma importante consequência na teoria que estamos desenvolvendo. Sendo impossível tirar, por um ponto externo, mais de uma perpendicular a uma reta dada, a Geometria Esférica certamente não é derivada da Geometria Neutra.

2.9 Relações entre Lados e Ângulos em um Triângulo

Definição 2.17. *Um triângulo é isósceles quando possui dois de seus lados congruentes. O terceiro lado é denominado base do triângulo. Se os três lados são congruentes, o triângulo é dito equilátero.*

A existência de triângulos isósceles na Geometria Neutra pode ser comprovada através de uma simples construção: dados um ângulo $\angle DAE$ e um segmento \overline{FG} , tomamos, sobre as semirretas \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{AE} , a partir do ponto A , respectivamente, os segmentos \overline{AB} e \overline{AC} , ambos congruentes a \overline{FG} (C1). O triângulo $\triangle ABC$ será claramente isósceles.

Examinemos então a relação existente entre os ângulos formados pela base em um triângulo isósceles, através da proposição seguinte, que caracteriza tais triângulos:

Teorema 2.33. *Um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos formados pela base e os lados congruentes são congruentes.*

Demonstração:

(\Rightarrow) Seja o $\triangle ABC$ onde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Como $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ (simetria da relação \cong) e, por (C5), $\angle BAC \cong \angle CAB$ (são o mesmo ângulo), segue, por (C6) que $\angle ABC \cong \angle ACB$.

(\Leftarrow) Suponhamos por absurdo, e sem perda de generalidade, que $\angle ABC \cong \angle ACB$ e $\overline{AC} < \overline{AB}$. Tomemos \overline{AD} sobre a semirreta \overrightarrow{AB} tal que $\overline{AD} \cong \overline{AC}$. Sendo $\overline{AB} > \overline{AC}$ por hipótese, teremos $A \star D \star B$ e, pelo Teorema 2.12, a semirreta \overrightarrow{CD} estará no interior do ângulo $\angle ACB$, donde $\angle ACB > \angle ACD$. O triângulo $\triangle ACD$ é isósceles e, usando o caso anterior da prova, $\angle ACD \cong \angle ADC$. Mas $\angle ADC$ é ângulo externo ao triângulo $\triangle DBC$, donde

$$\angle ACB > \angle ACD \cong \angle ADC > \angle DBC = \angle ABC,$$

contrariando a hipótese. ■

A implicação (\Rightarrow) aparece em *Os Elementos* como a Proposição 5 do Livro I, apelidada de *pons asinorum*, que, em português, significa *ponte dos asnos*. Explica-se popularmente o apelido pelo fato de ser esta a primeira proposição na referida obra cuja demonstração exige do leitor maior compreensão, funcionando como divisor entre as proposições mais elementares e as seguintes. Bons tempos os de Euclides...

Uma questão de existência distinta da anterior consiste em demonstrar que, fixado um segmento, existe um triângulo isósceles que tem esse segmento por base. O vício euclidiano nos tentaria a construir um ângulo agudo qualquer sobre um extremo do segmento e transportá-lo, com (C4), para o outro extremo, completando assim o triângulo desejado. Entretanto, sem o axioma euclidiano de paralelismo, não é possível afirmar que o terceiro vértice existirá, pois não há garantia de que as semirretas se encontrem.

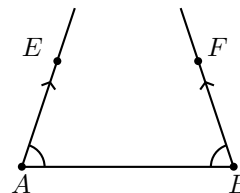


Fig. 2.29

A demonstração da proposição seguinte descreve a construção correta.

Teorema 2.34. *Tomando-se um segmento qualquer, é possível construir um triângulo isósceles que tenha o segmento dado como base.*

Demonstração: Seja \overline{AB} um segmento qualquer e tomemos um ponto P fora da reta AB . No triângulo $\triangle PAB$, se $\angle PAB \cong \angle PBA$, então $\triangle PAB$ é o triângulo isósceles desejado. Caso contrário, suponhamos, sem perda de generalidade, que $\angle PAB > \angle PBA$. Utilizando o axioma (C4), seja \overrightarrow{AQ} a semirreta no interior de $\angle PAB$ tal que $\angle QAB \cong \angle PBA$. Pelo Teorema da Trave, \overrightarrow{AQ} encontra o segmento \overline{PB} no ponto C e, pela proposição anterior, $\triangle CAB$ é isósceles. ■

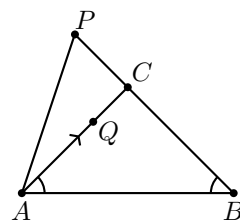


Fig. 2.30

As desigualdades conhecidas da Geometria Euclidiana, envolvendo lados e ângulos em um triângulo, são válidas na Geometria Neutra, de acordo com as proposições seguintes.

Teorema 2.35. *Em um triângulo $\triangle ABC$, $\overline{AB} > \overline{AC}$ se, e somente se, $\angle ACB > \angle ABC$.*

Demonstração:

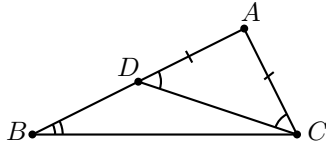


Fig. 2.31

(\Rightarrow) Tomemos \overline{AD} sobre a semirreta \overrightarrow{AB} tal que $\overline{AD} \cong \overline{AC}$. Sendo $\overline{AB} > \overline{AC}$ por hipótese, teremos $A * D * B$ e, pelo Teorema 2.12, a semirreta \overrightarrow{CD} estará no interior do ângulo $\angle ACB$, donde $\angle ACB > \angle ACD$. O triângulo $\triangle ACD$ é isósceles e, portanto, $\angle ACD \cong \angle ADC$. Mas $\angle ADC$ é ângulo externo ao triângulo $\triangle DBC$, donde

$$\angle ACB > \angle ACD \cong \angle ADC > \angle DBC = \angle ABC.$$

(\Leftarrow) Suponhamos, por absurdo, que $\angle ACB > \angle ABC$ e que $\overline{AB} \not\cong \overline{AC}$. Se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\triangle ABC$ é isósceles e $\angle ACB \cong \angle ABC$, contradizendo a hipótese. Suponhamos, então, que $\overline{AB} < \overline{AC}$. Por (C1), existe um único ponto D sobre a semirreta \overrightarrow{AB} tal que $\overline{AD} \cong \overline{AC}$. Como $\overline{AB} < \overline{AC}$, temos $A * B * D$, de modo que, pelo Teorema 2.12, $\angle ACD > \angle ACB$. Mas $\triangle ACD$ é isósceles, donde $\angle ACD \cong \angle ADC$. Como $\angle ABC$ é ângulo externo ao triângulo $\triangle BDC$, $\angle ABC > \angle BDC = \angle ADC$.

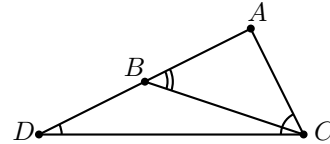


Fig. 2.32

Logo, $\angle ABC > \angle ACD > \angle ACB$, contrariando a hipótese de que $\angle ACB > \angle ABC$. ■

Portanto, pelo teorema anterior, em qualquer triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

Teorema 2.36. *Em um triângulo qualquer, todo lado é menor que a soma dos outros dois.*

Demonstração: Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer. Vamos mostrar que $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$.

Sobre a semirreta \overrightarrow{AC} , a partir do ponto C , tomamos $\overline{CD} \cong \overline{CB}$. O $\triangle BCD$ é, portanto, isósceles e $\angle CBD \cong \angle CDB$. Além disso, por construção, $A * C * D$, de modo que, pelo Teorema 2.12, temos a semirreta \overrightarrow{BC} no interior do ângulo $\angle ABD$, donde

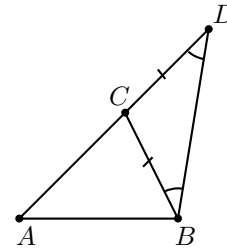


Fig. 2.33

$$\angle ABD > \angle CBD \cong \angle CDB = \angle ADB.$$

Utilizando a proposição anterior no triângulo $\triangle ABD$, temos que $\angle ABD > \angle ADB$ acarreta

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AB}. \quad \blacksquare$$

2.10 Congruência de Triângulos

A relação de congruência \cong , *postulada* para segmentos e ângulos através dos axiomas (C1)-(C6), é, agora, *definida* para triângulos, como se segue:

Definição 2.18. *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes quando existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices $\varphi : \{A, B, C\} \rightarrow \{D, E, F\}$ de maneira que*

$$\begin{aligned} \overline{AB} &\cong \overline{\varphi(A)\varphi(B)}, & \angle CAB &\cong \angle \varphi(C)\varphi(A)\varphi(B), \\ \overline{AC} &\cong \overline{\varphi(A)\varphi(C)}, & \angle ABC &\cong \angle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C), \\ \overline{BC} &\cong \overline{\varphi(B)\varphi(C)}, & \angle BCA &\cong \angle \varphi(B)\varphi(C)\varphi(A). \end{aligned}$$

Este fato é representado por $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Apenas por convenção e comodidade, quando declararmos congruentes dois triângulos, iremos sempre dispor os vértices em ordem de correspondência. Assim, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ significa que $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) = E$ e $\varphi(C) = F$.

Todos os casos de congruência de triângulos, estudados da Geometria Euclidiana, são também válidos na Geometria Neutra, como mostram as proposições seguintes.

Teorema 2.37 (Caso LAL). *Se, em dois triângulos, dois lados e o ângulo por eles formado forem congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração: Aplicação direta do Teorema 2.21. ■

Teorema 2.38 (Caso ALA). *Se, em dois triângulos, um lado e os ângulos por ele formados são congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração: Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ em que $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\angle BCA \cong \angle EFD$. Basta provarmos que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$; assim, por (C6), teremos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

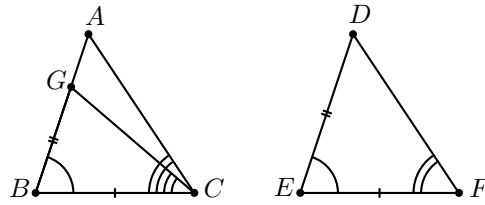


Fig. 2.34

Suponhamos, então, por absurdo e sem perda de generalidade, que $\overline{AB} > \overline{DE}$. Sobre \overline{BA} , a partir de B , tomamos $\overline{BG} \cong \overline{ED}$ e teremos $B \star G \star A$. Por (C6), $\angle BGC \cong \angle EDF$. Como, por hipótese, $\angle EFD \cong \angle BCA$, por (C4), \overline{CG} deveria coincidir com \overline{CA} . Mas, pelo Teorema 2.12, como $B \star G \star A$, a semirreta \overline{CG} é interior ao ângulo $\angle BCA$. ■

Teorema 2.39 (Caso ALA_o). *Se, em dois triângulos, um lado, um dos ângulos por ele formado e o ângulo oposto a ele são congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração: Exercício. ■

Definição 2.19. *Um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos for reto. O lado oposto ao ângulo reto denomina-se hipotenusa e os outros dois lados denominam-se catetos.*

A existência de triângulos retângulos decorre diretamente da existência de ângulos retos, provada no Teorema 2.30: partindo de um ângulo reto, basta escolher um ponto sobre cada lado do ângulo, distinto da origem comum, para construir um triângulo retângulo. A hipotenusa será, necessariamente, o maior lado em um triângulo retângulo, visto estar oposta ao maior ângulo: o ângulo reto.

Em se tratando de triângulos retângulos, há um caso especial de congruência a ser considerado, que não vale para triângulos gerais:

Teorema 2.40 (Caso $ARLL$). *Se dois triângulos retângulos têm dois lados congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração: Se os lados congruentes são os catetos, a proposição segue por aplicação direta de (C6), já que, pelo Teorema 2.29, dois ângulos retos quaisquer são congruentes.

Suponhamos, então, que os dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tenham as hipotenusas $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ e os catetos $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

Sobre a semirreta oposta a \overrightarrow{AB} , tomamos D tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Os triângulos $\triangle A'B'C'$ e $\triangle ADC$ são congruentes (LAL). Portanto $\overline{CD} \cong \overline{CB} \cong \overline{C'B'}$ e o triângulo $\triangle CBD$ é isósceles, donde, pelo Teorema 2.33, os ângulos $\angle CBA$ e $\angle CDA$ são congruentes.

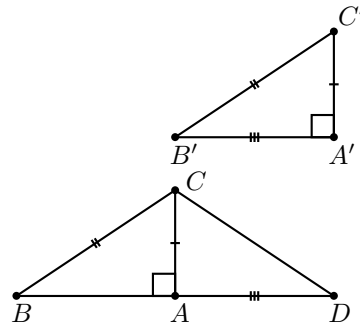


Fig. 2.35

Como $\angle CDA \cong \angle C'B'A'$, temos $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$. Portanto, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes, pelo caso ALA_o. ■

Teorema 2.41 (Caso LLL). *Se, em dois triângulos, os três lados são congruentes dois a dois, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração: O leitor inspire-se na prova do teorema anterior e faça esta demonstração como exercício. ■

2.11 Divisão de Segmentos e Ângulos

Na Geometria Euclidiana, utilizando o Teorema de Tales, é possível dividir um dado segmento em n segmentos congruentes, para qualquer n natural dado. Na Geometria Neutra, entretanto, dispomos apenas de um subconjunto dos axiomas da Geometria Euclidiana, o que nos impossibilita validar a construção tão conhecida dos cursos de desenho.

Porém, se n é uma potência de 2, esta divisão é possível na Geometria Neutra e fundamenta-se no teorema seguinte.

Teorema 2.42 (Ponto Médio). *Todo segmento \overline{AB} é divisível ao meio, isto é, existe um único ponto $M \in AB$ satisfazendo $\overline{AM} \cong \overline{MB}$. Além disso, M pertence ao interior de \overline{AB} , sendo denominado ponto médio de \overline{AB} .*

Demonstração: Vejamos primeiro que, se existir M nas condições dadas, M deve estar no interior de \overline{AB} . Evidentemente, M não pode coincidir com A ou B , pois, neste caso, não faria sentido mencionar o segmento \overline{AM} ou \overline{BM} . Suponhamos, então, sem perda de generalidade, que se tenha $M \star A \star B$. Neste caso, pela definição

da relação $<$ entre segmentos, teremos $\overline{MA} < \overline{MB}$, contrariando a hipótese de que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

Mostremos, agora, que existe o ponto M existe, mediante uma construção proposta por Hilbert. Seja o segmento \overline{AB} e tomemos o ponto $P \notin AB$. Por (C4), transportamos o ângulo $\angle PAB$ a partir de B , sobre a semirreta \overrightarrow{BA} e do lado oposto da reta BA àquele onde está P , obtendo a semirreta \overrightarrow{BQ} .

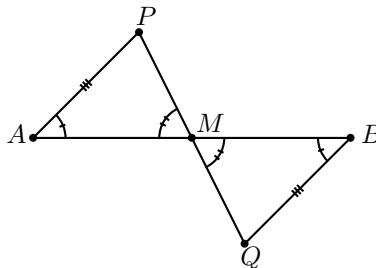


Fig. 2.36

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\overline{BQ} \cong \overline{AP}$, o que é sempre possível conseguir usando (C1) para transportar \overline{AP} a partir de B sobre a semirreta anteriormente obtida.

A reta PQ interceptará necessariamente a reta AB em um ponto M , já que P e Q estão em lados opostos de AB . Para ver que M estará obrigatoriamente no interior de \overline{AB} , basta supor $M = B$ ou $A \star B \star M$, por exemplo, e constatar a violação do Teorema do Ângulo Externo. Veja a Fig. 2.37.

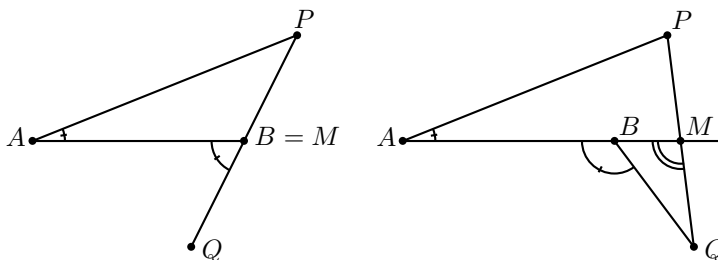


Fig. 2.37

Assim, M está no interior do segmento \overline{AB} e, pela congruência dos triângulos $\triangle APM$ e $\triangle BQM$ (caso ALA_o), concluímos que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$. Portanto, existe M no interior de \overline{AB} satisfazendo as hipóteses desejadas.

Resta ver que M é único. Suponhamos, por absurdo, que existam M_1 e M_2 distintos no interior de \overline{AB} satisfazendo $\overline{AM_1} \cong \overline{M_1B}$ e $\overline{AM_2} \cong \overline{M_2B}$. Sem perda de generalidade, suponhamos $A \star M_1 \star M_2$.

De $A \star M_1 \star M_2$ e $A \star M_2 \star B$, pelo item (iii) do Teorema 2.8, segue que $M_1 \star M_2 \star B$, donde $\overline{M_1B} > \overline{M_2B}$. Mas $\overline{AM_1} \cong \overline{M_1B}$ e $\overline{AM_2} \cong \overline{M_2B}$. Portanto $\overline{AM_1} > \overline{AM_2}$, contrariando a hipótese $A \star M_1 \star M_2$. ■

Corolário 2.1. *Todo segmento é divisível em 2^k segmentos congruentes, $k \geq 0$.*

Teorema 2.43 (Mediatriz). *A perpendicular a um segmento \overline{AB} tirada por seu ponto médio é o lugar geométrico dos pontos P tais que $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, denominado mediatriz do segmento \overline{AB} .*

Demonstração: Sejam M o ponto médio de \overline{AB} e m a perpendicular à reta AB levantada por M . Para caracterizar m como um lugar geométrico de pontos satisfazendo certa propriedade, devemos mostrar que os pontos de m – e apenas eles – satisfazem a propriedade. Em nosso caso, devemos mostrar que

$$P \in m \iff \overline{AP} \cong \overline{BP}.$$

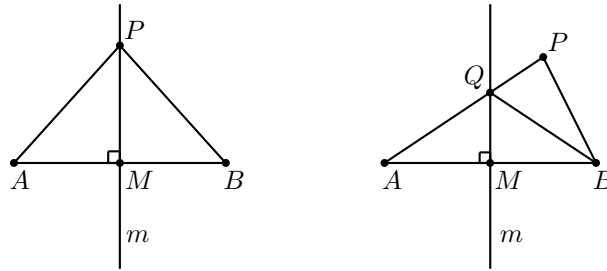


Fig. 2.38

- (\Rightarrow) Seja $P \in m$. Se $P = M$, o resultado vale, por ser M o ponto médio de \overline{AB} . Se $P \neq M$, consideremos os triângulos retângulos $\triangle PMA$ e $\triangle PMB$, congruentes por (C6). Logo, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.
- (\Leftarrow) Seja $P \notin m$. Devemos mostrar que $\overline{AP} \not\cong \overline{BP}$. Se $P \in AB$, teremos $P \neq M$ e, certamente, $\overline{AP} \not\cong \overline{BP}$, pelo teorema anterior. Se $P \notin AB$, consideremos o $\triangle PAB$. Como $m \cap \overline{AB} = \{M\}$ e $P \notin m$, m deve interceptar \overline{PA} ou \overline{PB} , por (B4). Sem perda de generalidade, suponhamos que $m \cap \overline{PA} = \{Q\}$. Então, $\overline{QA} \cong \overline{QB}$, já que $Q \in m$. Como $A \star Q \star P$, temos que

$$\overline{AP} = \overline{AQ} + \overline{QP} = \overline{QB} + \overline{QP} > \overline{BP},$$

utilizando a desigualdade triangular em $\triangle QPB$. Se tivéssemos suposto $m \cap \overline{PB} = \{Q\}$, teríamos concluído, com raciocínio similar, que $\overline{BP} > \overline{AP}$. ■

Analogamente para ângulos, podemos formular o seguinte:

Teorema 2.44 (Bissetriz). *Todo ângulo $\angle BAC$ é divisível ao meio, isto é, é possível encontrar uma única semirreta \overrightarrow{AM} no interior de $\angle BAC$ tal que $\angle BAM \cong \angle MAC$. Esta semirreta é denominada bissetriz do ângulo.*

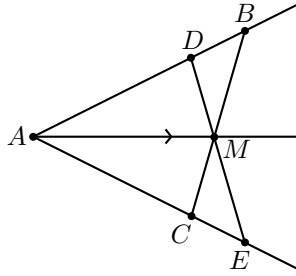


Fig. 2.39

Demonstração: Detalharemos apenas a construção da bissetriz, deixando a prova de unicidade a cargo do leitor.

Sem perda de generalidade, suponhamos $\overline{AB} > \overline{AC}$. Por (C1), transportamos \overline{AB} sobre a semirreta \overrightarrow{AC} a partir de A, obtendo E tal que $\overline{AE} \cong \overline{AB}$ e $A * C * E$. Analogamente, obtemos D sobre a semirreta \overrightarrow{AB} tal que $\overline{AD} \cong \overline{AC}$ e $A * D * B$.

Duas aplicações sucessivas de (B4) permitem afirmar que $\overline{DE} \cap \overline{BC} = \{M\}$, estando M no interior de $\angle BAC$. Aplicações sucessivas de congruência de triângulos levam-nos a concluir que $\angle BAM \cong \angle EAM = \angle CAM$. ■

Corolário 2.2. *Todo ângulo é divisível em 2^k ângulos congruentes, $k \geq 0$.*

Teorema 2.45. *Em um triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo oposto à base é uma semirreta contida na mediatriz da base.*

Demonstração: Exercício. ■

2.12 Paralelismo

No Teorema 2.2, vimos que duas retas podem possuir, no máximo, um ponto em comum. Este fato motiva a seguinte definição:

Definição 2.20. *Dois retas são ditas paralelas quando são idênticas ou quando não possuem ponto comum.*

Diferentemente do que ocorre na Geometria Euclidiana, a relação binária de paralelismo entre retas nem sempre é uma relação de equivalência, pois a transitividade não é sempre garantida.

Analisemos, então, a questão da existência de retas paralelas na Geometria Neutra. Sejam ℓ uma reta e P um ponto. Se $P \in \ell$, é claro que a própria reta ℓ é a reta paralela a ℓ incidente a P . Se $P \notin \ell$, vejamos as proposições seguintes.

Quando duas retas distintas ℓ e m , concorrentes ou não, encontram uma terceira reta t - denominada uma *transversal comum* a ℓ e m - em dois pontos P e Q distintos, sendo $\{P\} = t \cap m$ e $\{Q\} = t \cap \ell$, 8 ângulos são formados ao todo: 4 entre ℓ e t e 4 entre m e t . Todos eles têm a reta t como suporte de um dos lados. Sejam B, C em lados opostos de ℓ em relação a Q e A, D em lados opostos de m em relação a P . Suponhamos, ainda, A e C de um mesmo lado de t (e, portanto, B e D do lado oposto). Os pares de ângulos $\angle APQ, \angle PQB$ e $\angle CQP, \angle QPD$ denominam-se *alternos internos*. Veja a Fig. 2.40.

Teorema 2.46. *Se duas retas distintas formam com uma transversal comum ângulos alternos internos congruentes, então elas são paralelas.*

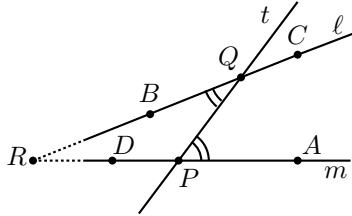


Fig. 2.40

Demonstração: Sejam a reta t , que encontra as retas ℓ e m nos pontos Q e P , respectivamente. Denominemos $\angle APQ$ e $\angle PQB$ os ângulos alternos internos formados, congruentes por hipótese. Suponhamos, por absurdo, que ℓ e m tenham o ponto R em comum, que, sobre a reta m , está do lado oposto a A em relação a P . Forma-se, desta maneira, o triângulo $\triangle PQR$.

Então o ângulo $\angle APQ$ é externo ao triângulo $\triangle PQR$ e congruente ao interno não-adjacente $\angle PQB$, o que contraria o Teorema do Ângulo Externo. Logo, ℓ e m não podem possuir ponto em comum. À mesma conclusão chegaríamos se houvéssimos suposto A e R do mesmo lado de m em relação a P . ■

Em consequência, temos que

Teorema 2.47. *Duas retas distintas que possuem uma perpendicular comum são paralelas.*

A recíproca do Teorema 2.46 - *retas paralelas distintas formam com uma transversal comum ângulos alternos internos congruentes* - vale na Geometria Euclidiana, mas é uma das proposições que não pode ser provada nem “desprovada” na Geometria Neutra.

A existência de pelo menos uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto exterior a ela, é garantida pelo teorema seguinte.

Teorema 2.48. *Por um ponto exterior a uma reta dada, passa pelo menos uma reta paralela à primeira.*

Demonstração: Sejam a reta ℓ e o ponto $P \notin \ell$. Tomemos dois pontos distintos $B, Q \in \ell$. Seja a reta PQ . Utilizando (C4), transportamos o ângulo $\angle PQB$ a partir da semirreta \overrightarrow{PQ} para o lado oposto ao de B em relação à reta PQ , obtendo a semirreta \overrightarrow{PA} , exatamente como na Fig. 2.40. Então as retas PA e ℓ fazem ângulos alternos congruentes com a reta PQ e, pela proposição anterior, são paralelas. ■

A construção realizada na prova do teorema anterior poderia ser repetida para infinitas escolhas do ponto B sobre a reta ℓ . Entretanto, não podemos afirmar que as (infinitas) paralelas obtidas sejam todas distintas ou iguais.

Em outras palavras, na Geometria Neutra, garantimos a existência mas não podemos garantir a unicidade da paralela a uma reta dada passando por um ponto exterior a ela.

Por outro lado, a existência de pelo menos uma paralela exclui de imediato os planos chamados *elípticos* como geometrias derivadas da Geometria Neutra, uma vez que eles se caracterizam essencialmente pela inexistência de paralelas.

2.13 Exercícios

1. Complete as provas de todos os teoremas deixados como exercícios.
2. Mostre que o interior de um triângulo é um conjunto não vazio.
3. Mostre que existem infinitas retas passando por um ponto.
4. Mostre que, se uma reta possui um ponto no interior e outro no exterior de um triângulo, então a reta corta o triângulo em exatamente dois pontos.
5. Um subconjunto $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{P}$ é dito *convexo* quando, para todo par de pontos distintos $A, B \in \mathbb{S}$, $\overline{AB} \subset \mathbb{S}$. Mostre que o interior de um triângulo é um subconjunto convexo do plano, ao passo que o exterior do triângulo não é convexo. Mostre também que os lados de uma reta são subconjuntos convexos.
6. Assumindo o Teorema da Separação do Plano como axioma no lugar de (B4), deduza (B4) como teorema.
7. Se permitíssemos, na definição, que os lados de um ângulo tivessem a mesma reta suporte, o que aconteceria ao conceito de *interior* de um ângulo quando isto acontecesse?
8. Mostre que uma reta e um segmento possuem, no máximo, um ponto comum.

9. Por que não se podem levantar duas perpendiculares a uma reta por um ponto pertencente a ela ?
10. Duas retas concorrentes podem ter uma perpendicular comum? Por quê?
11. Seja o ângulo $\angle AOB$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $\overline{OA} < \overline{OB}$ (se ocorrer $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, tome um ponto C qualquer tal que $O \star A \star C$). Utilizando o axioma (C1), sabemos que, sobre a semi-reta \overrightarrow{OA} , existe um único ponto B' tal que $\overline{OB'} \cong \overline{OB}$ e, sobre a semi-reta \overrightarrow{OB} , existe um único ponto A' tal que $\overline{OA'} \cong \overline{OA}$. Mostre que os segmentos \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ interceptam-se em um ponto N no interior do ângulo $\angle AOB$.
12. Sejam o ângulo $\angle AOB$ e \overrightarrow{OM} sua bissetriz. Tome $N \in \overrightarrow{OM}$, $N \neq O$, e, por N , baixe as perpendiculares às retas OA e OB . Sejam P e Q os pés dessas perpendiculares. Mostre que $\overline{NP} \cong \overline{NQ}$.
13. Mostre que, em todo triângulo isósceles, a mediatriz da base é a reta suporte da bissetriz do ângulo a ela oposto.
14. Mostre que as três bissetrizes internas dos ângulos de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto (cuidado: bissetrizes são semirretas).
15. Mostre que, se as mediatrizes de dois lados de um triângulo se encontram em um ponto, então a mediatriz do terceiro lado é incidente a este ponto.
16. Dado o segmento livre \overline{s} , defina o que vem a ser o segmento $(n2^{-k})\overline{s}$, sendo $n > 0$ e $k \geq 0$.
17. Na Geometria Neutra, o círculo com centro O e raio \overline{OA} é definido como o conjunto

$$Circ(O, \overline{OA}) = \{B \in \mathbb{P} \mid \overline{OB} \cong \overline{OA}\}.$$

Mostre que:

- Toda reta incidente a O possui exatamente dois pontos em comum com $Circ(O, \overline{OA})$, situados em lados opostos da reta em relação a O .
 - Mostre que o centro O do círculo é único.
18. Um ponto P é *interior* em relação ao círculo $Circ(O, \overline{OA})$ quando $P = O$ ou $\overline{OP} < \overline{OA}$. Analogamente, P é *exterior* a $Circ(O, \overline{OA})$ quando $\overline{OP} > \overline{OA}$. Mostre que, se uma reta t possui um ponto P no interior de $Circ(O, \overline{OA})$, então t possui um ponto Q no exterior de $Circ(O, \overline{OA})$.
 19. Uma reta t e um círculo $Circ(O, \overline{OA})$ são *tangentes no ponto T* quando possuem apenas o ponto T em comum. Mostre que t e $Circ(O, \overline{OA})$ são tangentes em T se, e somente se, OT é perpendicular a t .

Capítulo 3

Classificação dos Planos de Hilbert

Dentre os estudiosos do passado que se dedicaram a tentar deduzir o quinto postulado de Euclides como teorema, encontra-se o padre jesuíta Giovanni Girolamo Saccheri, nascido no ano de 1667 e falecido em 1733. No mesmo ano de sua morte, Saccheri legou à posteridade o texto latino *Euclides ab omni naevo vindicatus* ([21]), que pretendia, conforme o título, vingar Euclides de toda mancha, dando ao quinto postulado a pretensa demonstração que, supostamente, escapara a Euclides.

Em seu tratado, Saccheri define um quadrilátero cuja base forma ângulos retos com dois lados congruentes. Por aplicação repetida de congruência entre triângulos, mostra-se que o quarto lado - denominado topo - forma, com os dois lados, ângulos também congruentes, sobre cuja natureza formulam-se três hipóteses: esses ângulos do topo podem ser agudos, retos ou obtusos. Livrar Euclides de toda mancha significava, em última análise, comprovar a hipótese do ângulo reto, invalidando as outras duas. Este fato conduziria, com pouca elaboração adicional, à ambicionada prova do quinto postulado.

Hoje é sabido que Saccheri descartou de forma errônea e precipitada as outras duas hipóteses, assumindo implicitamente o Axioma de Arquimedes e o fato de que uma reta não pode estar integralmente contida no interior de um ângulo - o que, segundo suas próprias palavras, “repugna sua natureza”. Sendo a geometria da época uma ciência vinculada ao que se podia visualizar, tais assunções eram inadmissíveis, por antagonizarem a realidade tangível. Com idênticas palavras, expressou-se Legendre algumas décadas mais tarde ([18]), quando tentou demonstrar que a soma dos ângulos internos em um triângulo deveria igualar dois ângulos retos.

O objetivo deste capítulo é destacar algumas propriedades do quadrilátero estudado por Saccheri, à luz do sistema axiomático que desenvolvemos no Capítulo 2. Com os axiomas e teoremas de que já dispomos da Geometria Neutra, temos ferramental suficiente para analisar as três hipóteses levantadas por Saccheri, que nos levarão a uma classificação dos Planos de Hilbert.

3.1 Quadriláteros de Saccheri

Definição 3.1. *Sejam A, B, C e D quatro pontos não colineares três a três. O quadrilátero $ABCD$ é o conjunto $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$.*

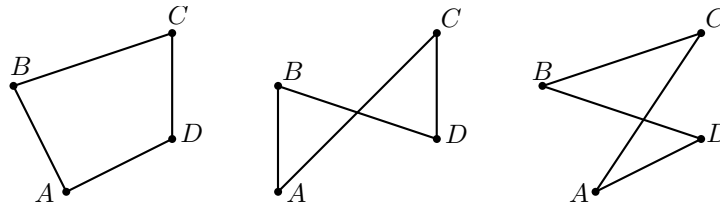


Fig. 3.1

Observe que a ordem dos pontos é importante, pois, em geral, $ABCD \neq ACBD$. Os pontos A, B, C e D são denominados *vértices* e os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} *lados* do quadrilátero. Quando os lados se interceptam apenas em vértices, dizemos que o quadrilátero é *simples*.

De forma análoga aos triângulos, dois quadriláteros são ditos *congruentes* quando existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices que preserve a congruência dos lados e dos ângulos por eles formados.

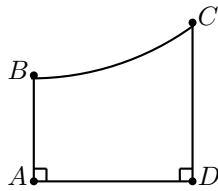


Fig. 3.2

Dada a reta AD , levantamos duas perpendiculares a ela, incidentes a A e D ; sobre estas perpendiculares, tomamos os pontos B e C , de um mesmo lado de AD . O quadrilátero $ABCD$ terá, portanto, dois ângulos retos, sendo denominado *quadrilátero birretângulo*. Os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são os *lados* do quadrilátero, \overline{AD} é a *base* e \overline{BC} é o *topo*. Os ângulos $\angle ABC$ e $\angle DCB$ denominam-se *ângulos do topo*.

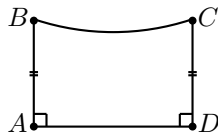


Fig. 3.3

Quando os lados de um quadrilátero birretângulo são congruentes, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, ele é denominado *Quadrilátero de Saccheri*.

Teorema 3.1. *Em um quadrilátero de Saccheri, os ângulos do topo são congruentes.*

Demonstração: Como os triângulos retângulos $\triangle ABD$ e $\triangle DCA$ são congruentes (LAL), temos $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. Portanto, os triângulos $\triangle BAC$ e $\triangle CDB$ são também congruentes (LLL), donde $\angle ABC \cong \angle DCB$. ■

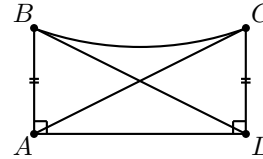


Fig. 3.4

Teorema 3.2. *Em um quadrilátero de Saccheri, as mediatrizes da base e do topo coincidem.*

Demonstração: Primeiramente, devemos mostrar que a mediatriz m da base \overline{AD} encontra o topo \overline{BC} em um ponto N tal que $B \star N \star C$. Pelo Teorema 2.47, as retas AB , m e CD são paralelas, pois possuem uma perpendicular comum (AD). Como M é ponto médio de \overline{AD} , temos $A \star M \star D$, ou seja, A e D estão em lados opostos de m .

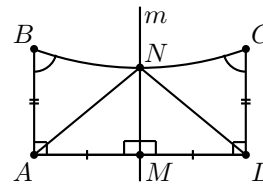


Fig. 3.5

O mesmo se dará para qualquer par de pontos pertencentes a AB e CD , em especial B e C . Portanto, B e C estão em lados opostos de m , donde $\overline{BC} \cap m = \{N\}$. Temos que mostrar que N é ponto médio de \overline{BC} .

Os triângulos retângulos $\triangle AMN$ e $\triangle DMN$ são congruentes, donde $\overline{AN} \cong \overline{DN}$. Os triângulos $\triangle BAN$ e $\triangle CDN$ também são congruentes. Logo, $\overline{BN} \cong \overline{CN}$.

Finalmente $\angle BNM = \angle BNA + \angle ANM$. Mas $\angle BNA \cong \angle CND$ e $\angle ANM \cong \angle DNM$. Portanto, $\angle BNM \cong \angle CND + \angle DNM = \angle CNM$. Como $\angle BNM$ e $\angle CNM$ são suplementares, ambos são retos.

Concluimos que, de fato, m é a mediatriz comum ao topo e à base. ■

O segmento \overline{MN} , na prova do teorema anterior, que tem por extremos os pontos médios da base e do topo é denominado *segmento médio* do quadrilátero de Saccheri.

Teorema 3.3. *Seja um quadrilátero birretângulo $ABCD$, com base \overline{AD} e lados \overline{AB} e \overline{CD} . Então $\overline{AB} < \overline{CD}$ se, e somente se, $\angle ABC > \angle DCB$.*

Demonstração:

(\Rightarrow) Transportemos \overline{AB} sobre a semirreta \overrightarrow{DC} a partir de D , obtendo o ponto E tal que $\overline{DE} \cong \overline{AB}$. O quadrilátero $ABED$ é, portanto, de Saccheri e $\angle ABE \cong \angle DEB$. Mas $\angle DEB$ é ângulo externo do triângulo $\triangle BEC$, donde $\angle DEB > \angle DCB$, donde $\angle ABE \cong \angle DEB > \angle ECB = \angle DCB$. Como $\angle ABC > \angle ABE$ (verifique!), $\angle ABC > \angle DCB$.

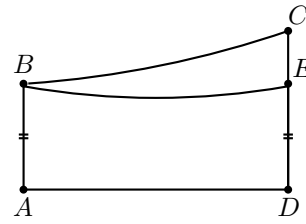


Fig. 3.6

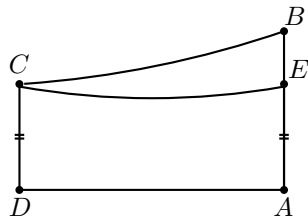


Fig. 3.7

(\Leftarrow) Suponhamos, por absurdo, que $\angle ABC > \angle DCB$ e $\overline{AB} \not\cong \overline{CD}$. Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri e $\angle ABC \cong \angle DCB$, contradizendo a hipótese. Se $\overline{AB} > \overline{CD}$, transportamos \overline{DC} sobre \overline{AB} , obtendo E tal que $\overline{AE} \cong \overline{CD}$. Por raciocínio análogo ao do caso anterior, concluímos que $\angle AEC \cong \angle DCE > \angle ABC$. Mas $\angle DCB > \angle DCE$ (confira!), donde $\angle DCB > \angle ABC$, contrariando a hipótese. Logo, $\overline{AB} < \overline{CD}$. ■

Teorema 3.4. *Sejam $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, P um ponto tal que $B \star P \star C$ e PQ a perpendicular à reta suporte da base AD por P , onde Q é o pé da perpendicular. Chamemos α o ângulo do topo. Então*

- $\overline{PQ} < \overline{CD} \Rightarrow \alpha$ é agudo;
- $\overline{PQ} \cong \overline{CD} \Rightarrow \alpha$ é reto;
- $\overline{PQ} > \overline{CD} \Rightarrow \alpha$ é obtuso.

Demonstração: Demonstraremos o primeiro item. Os demais têm prova análoga. β e γ estão indicados na Fig. 3.8.

Pelo teorema anterior, aplicado ao quadrilátero birretângulo $QPCD$, $\overline{PQ} < \overline{CD}$ implica $\alpha < \beta$. Como $\overline{CD} \cong \overline{AB}$, temos $\overline{PQ} < \overline{AB}$. Aplicando novamente o teorema anterior, agora ao quadrilátero $ABPQ$, temos que $\alpha < \gamma$.

Portanto, $\alpha < \min\{\beta, \gamma\}$. Sendo β e γ suplementares, $\min\{\beta, \gamma\}$ será, no máximo, um ângulo reto. Logo, α é agudo. ■

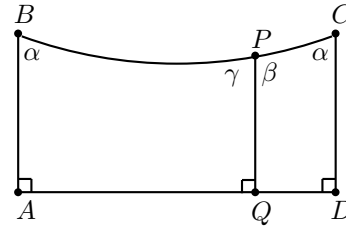


Fig. 3.8

Nos três itens do enunciado do Teorema 3.4, os antecedentes e consequentes nas implicações lógicas são mutuamente exclusivos. Portanto, essas implicações valem como equivalências:

- $\overline{PQ} < \overline{CD} \iff \alpha$ é agudo;
- $\overline{PQ} \cong \overline{CD} \iff \alpha$ é reto;
- $\overline{PQ} > \overline{CD} \iff \alpha$ é obtuso.

Teorema 3.5. *Sejam $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, P um ponto tal que $B \star C \star P$ e PQ a perpendicular à reta suporte da base \overline{AD} por P , onde Q é o pé da perpendicular. Chamemos α o ângulo do topo. Então*

- $\overline{PQ} > \overline{CD} \Rightarrow \alpha$ é agudo;
- $\overline{PQ} \cong \overline{CD} \Rightarrow \alpha$ é reto;
- $\overline{PQ} < \overline{CD} \Rightarrow \alpha$ é obtuso.

Demonstração:

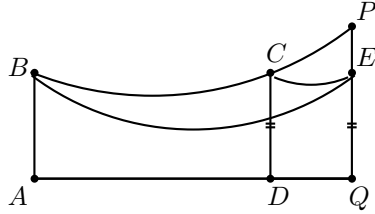


Fig. 3.9

O ângulo $\angle PCE$ é externo ao triângulo $\triangle CBE$, donde $\angle PCE > \angle CBE = \angle ABC - \angle ABE$. Também $\angle DCE \cong \angle QEC > \angle QEB \cong \angle ABE$ (verifique!); logo $\angle DCE > \angle ABE$. Portanto,

$$2R = \angle PCE + \angle DCE + \angle DCB > \angle ABC - \angle ABE + \angle ABE + \angle DCB,$$

donde $2R > \angle ABC + \angle DCB$. Mas $\angle ABC \cong \angle DCB \cong \alpha$ e, portanto, α é agudo.

• $\overline{PQ} \cong \overline{CD} \Rightarrow \alpha$ é reto: exercício.

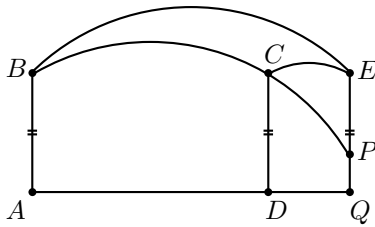


Fig. 3.10

O mesmo comentário que fizemos para o Teorema 3.4 vale para o Teorema 3.5: as implicações são, na verdade, equivalências:

- $\overline{PQ} > \overline{CD} \iff \alpha$ é agudo;
- $\overline{PQ} \cong \overline{CD} \iff \alpha$ é reto;
- $\overline{PQ} < \overline{CD} \iff \alpha$ é obtuso.

• $\overline{PQ} > \overline{CD} \Rightarrow \alpha$ é agudo:

Tomemos E na semirreta \overrightarrow{QP} tal que $\overline{QE} \cong \overline{CD}$. Como $\overline{PQ} > \overline{CD}$, teremos E entre P e Q . Tracemos os segmentos \overline{CE} e \overline{BE} , originando mais dois quadriláteros de Saccheri além de $ABCD$: $ABEQ$ e $DCEQ$.

• $\overline{PQ} < \overline{CD} \Rightarrow \alpha$ é obtuso:

A prova é análoga à do primeiro item, porém usando a Fig. 3.10. ■

3.2 As Três Hipóteses

Vamos investigar, nesta seção, uma importante correspondência entre triângulos e quadriláteros de Saccheri na Geometria Neutra, que nos levará a uma classificação dos Planos de Hilbert segundo a natureza dos ângulos do topo dos quadriláteros de Saccheri.

Lema 3.1. *Sejam dois quadriláteros de Saccheri $ABCD$ e $A'B'C'D'$ com segmentos médios \overline{MN} e $\overline{M'N'}$, respectivamente, tais que $\overline{MN} \cong \overline{M'N'}$. Então existe um quadrilátero de Saccheri $PQRS$ com segmento médio \overline{MN} , tal que $PQRS$ e $A'B'C'D'$ são congruentes.*

Demonstração: A Fig. 3.11 corresponde ao caso em que $\overline{AD} > \overline{A'D'}$; as outras possibilidades têm demonstração análoga.

Usando o Axioma (C1), transportamos $\overline{M'D'}$ para \overline{MS} , $\overline{M'A'}$ para \overline{MP} , $\overline{N'C'}$ para \overline{NR} e $\overline{N'B'}$ para \overline{NQ} .

Por aplicação sucessiva de congruência de triângulos ($\triangle NQM \cong \triangle N'B'M'$ e $\triangle MPN \cong \triangle M'A'N'$), concluímos que o quadrilátero $PQRS$ é de Saccheri e congruente a $A'B'C'D'$. ■

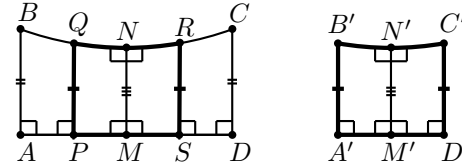


Fig. 3.11

Apesar de ainda não havermos formalizado o conceito de movimento, o lema anterior nos diz que o quadrilátero $A'B'C'D'$ pode ser copiado para o quadrilátero $PQRS$, que possui em comum com $ABCD$ o segmento médio e as retas suportes da base e do topo.

Sobre os ângulos do topo (que são congruentes) de um quadrilátero de Saccheri, distinguem-se três possibilidades:

- os ângulos do topo são agudos;
- os ângulos do topo são retos;
- os ângulos do topo são obtusos.

O objetivo de Saccheri era excluir as hipóteses do ângulo agudo e do ângulo obtuso, mostrando que os ângulos do topo deveriam ser retos. A partir disso, seria fácil deduzir o quinto postulado de Euclides como teorema. Atualmente, no entanto, sabe-se que, na Geometria Neutra, nenhuma das três hipóteses leva a inconsistências: as três podem ocorrer, *porém não simultaneamente*. É disso que nos fala o próximo teorema.

Teorema 3.6. *Em um Plano de Hilbert, se um quadrilátero de Saccheri possui ângulo do topo agudo (reto, obtuso), então todos os quadriláteros de Saccheri possuem ângulos do topo agudos (retos, obtusos).*

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri com base \overline{AD} , lados \overline{AB} e \overline{CD} e segmento médio \overline{MN} . Suponhamos que o ângulo $\alpha = \angle ABC \cong \angle BCD$ seja agudo. Consideremos, então, um outro quadrilátero de Saccheri $A'B'C'D'$ com base $\overline{A'D'}$, lados $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ e segmento médio $\overline{M'N'}$. Seja $\alpha' = \angle A'B'C' \cong \angle B'C'D'$. Vamos mostrar que α' também é agudo.

Temos dois casos a considerar:

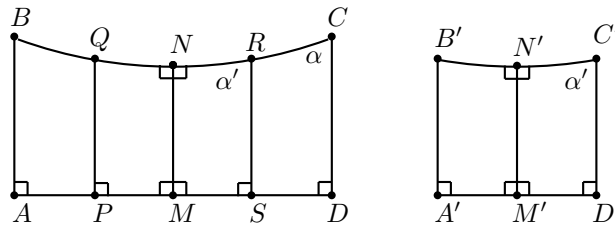


Fig. 3.12

- $\overline{MN} \cong \overline{M'N'}$ (Fig. 3.12)
Neste caso, pelo lema anterior, existe o quadrilátero de Saccheri $PQRS$ com segmento médio \overline{MN} tal que as bases \overline{PS} e \overline{AD} têm a mesma reta suporte, bem como os topos \overline{QR} e \overline{BC} . Sem perda de generalidade, suponhamos $\overline{AD} > \overline{A'D'}$.

Sendo α agudo, pelo Teorema 3.4 aplicado a $ABCD$ e ao segmento \overline{RS} , temos que $\overline{RS} < \overline{CD}$. Portanto, pelo Teorema 3.5, aplicado a $PQRS$ e ao segmento \overline{CD} , temos que α' é agudo.

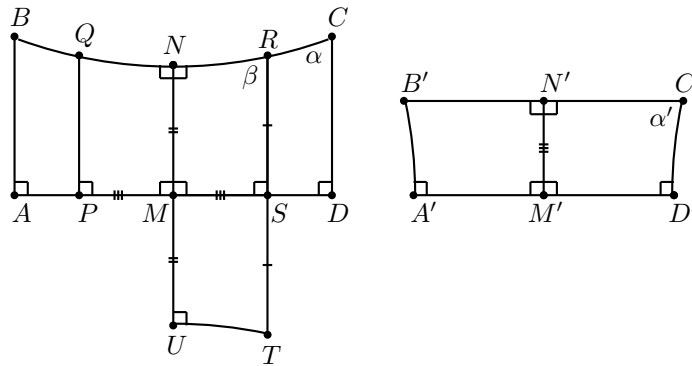


Fig. 3.13

- $\overline{MN} \not\cong \overline{M'N'}$ (Fig. 3.13)

Vamos reduzir ao caso anterior através de uma construção sugerida em [10]. Sem perda de generalidade, consideremos $\overline{M'N'} < \overline{MD}$. Transportamos $\overline{M'N'}$ sobre \overline{MD} , obtendo S entre M e D . Por S , levantamos a perpendicular a MD , que interceptará o topo \overline{BC} no ponto R . Tomamos $\overline{ST} \cong \overline{RS}$ e $\overline{MU} \cong \overline{MN}$. $NRTU$ é, portanto, um quadrilátero de Saccheri e, se tomarmos $\overline{MP} \cong \overline{MS}$ e $\overline{NQ} \cong \overline{NR}$, $PQRS$ também será um quadrilátero de Saccheri (verifique).

Usando o caso anterior, como $ABCD$ e $PQRS$ têm o mesmo segmento médio, sendo α agudo, β também será agudo. Mas, por construção, $NRTU$ e $A'B'C'D'$ também têm segmentos médios congruentes e, sendo β agudo, α' também o será.

As provas para o caso de α ser reto ou obtuso são análogas. ■

Vamos, agora, examinar uma importante relação entre triângulos e quadriláteros de Saccheri na Geometria Neutra. Para isto, consideremos um triângulo $\triangle ABC$, sendo M e N os pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{AC} . Pelo ponto A , baixemos a perpendicular AH à reta MN , sendo H o pé da perpendicular.

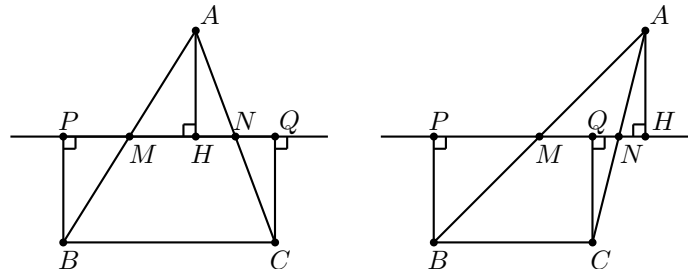


Fig. 3.14

Tomamos $\overline{MP} \cong \overline{MH}$ e $\overline{NQ} \cong \overline{NH}$. Como M é ponto médio de \overline{AB} , os triângulos $\triangle PMB$ e $\triangle HMA$ são congruentes (LAL) e, portanto, $\overline{PB} \cong \overline{AH}$ e o ângulo $\angle BPM$ é reto. Da mesma forma, os triângulos $\triangle QNC$ e $\triangle HNA$ são também congruentes (LAL), donde $\overline{QC} \cong \overline{AH}$ e o ângulo $\angle NQC$ é reto.

Concluimos, então, que $PBCQ$ é um quadrilátero de Saccheri. À mesma conclusão se chega quando H não está entre M e N .

O quadrilátero de Saccheri assim obtido é denominado *quadrilátero associado* ao triângulo.

O próximo teorema nos dá uma importante relação entre os ângulos internos de um triângulo e os ângulos do topo do quadrilátero associado.

Teorema 3.7. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual à soma dos ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri a ele associado.*

Demonstração: No primeiro caso, ilustrado na Fig. 3.14, basta ver que $\angle BAC = \angle MAH + \angle HAN \cong \angle PBM + \angle QCN$. Logo, $\angle PBC + \angle QCB \cong \angle PBM + \angle ABC + \angle QCN + \angle ACB = \angle PBM + \angle QCN + \angle ABC + \angle ACB = \angle MAH + \angle HAN + \angle ABC + \angle ACB = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$.

No segundo caso (Fig. 3.14), é só usar diferença de ângulos para concluir o mesmo resultado. ■

3.3 Classificação dos Planos de Hilbert

Já mencionamos, na seção anterior, que as hipóteses do ângulo agudo, reto ou obtuso não apresentam inconsistência na Geometria Neutra. Se, num Plano de Hilbert, um dado quadrilátero de Saccheri tem ângulos do topo de uma certa natureza (agudo, reto, obtuso), então *todos* os quadriláteros de Saccheri terão ângulos do topo da mesma natureza.

Podendo, então, ocorrer qualquer uma das três hipóteses sobre a natureza do ângulo do topo de um quadrilátero de Saccheri, juntamente com o importante resultado expresso no Teorema 3.6, é possível classificar os Planos de Hilbert em três espécies:

- aqueles em que os quadriláteros de Saccheri possuem ângulos do topo agudos. Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que dois ângulos retos. Um Plano de Hilbert que satisfaça esta hipótese denomina-se *semi-hiperbólico*.
- aqueles em que os quadriláteros de Saccheri possuem ângulos do topo retos. Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Um Plano de Hilbert que satisfaça esta hipótese denomina-se *semieuclidiano*.
- aqueles em que os quadriláteros de Saccheri possuem ângulos do topo obtusos. Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior do que dois ângulos retos. Um Plano de Hilbert que satisfaça esta hipótese denomina-se *semielíptico*.

No entanto, com os 13 axiomas que introduzimos até agora, não é possível decidir por uma dentre as três hipóteses. A prova disso é que existem modelos para os três casos (veja [9], por exemplo). Mais uma vez concluímos que a Geometria Neutra, portanto, *não* é um sistema axiomático completo.

A Geometria Hiperbólica Plana situa-se no primeiro grupo: nela, os ângulos internos de um triângulo somam menos que dois ângulos retos. A hipótese do ângulo agudo aparece nesta geometria como consequência da introdução de dois axiomas ao conjunto de 13 que já conhecemos: o Axioma de Paralelismo Hiperbólico e o Axioma de Continuidade de Dedekind ([9]).

A Geometria Euclidiana Plana, com a qual estamos todos habituados, situa-se claramente no segundo grupo: os quadriláteros de Saccheri, neste caso, são os retângulos. Novamente, isto é consequência da introdução de dois axiomas aos 13 da Geometria Neutra: o Axioma de Paralelismo Euclidiano (na versão de Playfair/Hilbert) e também o Axioma de Continuidade de Dedekind ([9]).

Por fim, os Planos de Hilbert semielípticos, estudados em 1900 por Max Dehn em sua tese de doutorado ([6]) supervisionada por David Hilbert, possuem modelos algébricos bastante abstratos, construídos sobre fechos pitagóricos de corpos não arquimedianos. Neles não vale o Axioma de Continuidade de Dedekind ([9]).

3.4 Exercícios

1. Considere um quadrilátero birretângulo. Mostre que, se os ângulos do topo forem congruentes, esse quadrilátero é de Saccheri.
2. Mostre que, em um quadrilátero de Saccheri, se os ângulos do topo forem agudos (retos, obtusos), então o topo é maior que (congruente a, menor que) a base.
3. Mostre que, em um quadrilátero de Saccheri, se os ângulos do topo forem agudos (retos, obtusos), então o lado é maior que (congruente a, menor que) o segmento médio.
4. Mostre que a mediatriz de um dos lados de um triângulo é perpendicular à reta definida pelos pontos médios dos outros dois lados.
5. Mostre que, se consideramos, em um triângulo $\triangle ABC$, o ponto médio M do lado \overline{AB} e, por esse ponto, tiramos a perpendicular à mediatriz do lado \overline{BC} , esta reta encontra o lado \overline{AC} em seu ponto médio N .
6. Mostre que a reta unindo os pontos médios dos lados de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular à mediatriz comum à base e ao topo.
7. Considere um ponto P no interior de um ângulo reto. Baixe, por P , as perpendiculares às retas suporte dos lados do ângulo. Discuta a natureza do ângulo formado por essas perpendiculares em função do tipo de Plano de Hilbert.
8. Em um Plano de Hilbert, considere um círculo $Circ(O, \overline{OA})$ (veja definição de círculo no Exercício 17, ao final do Capítulo 2). Mostre que um ângulo inscrito em um semicírculo é agudo (reto, obtuso) conforme o Plano de Hilbert seja semi-hiperbólico (semieuclediano, semielíptico).
9. Mostre que, num Plano de Hilbert, a distância entre duas retas concorrentes aumenta, à medida em que nos afastamos do ponto de encontro.
10. Mostre que duas retas paralelas distintas só podem ser *equidistantes* em um Plano de Hilbert semieuclediano.
11. Em um Plano de Hilbert semi-hiperbólico, considere duas retas distintas com uma perpendicular comum. Mostre que a distância entre as retas aumenta à medida em que nos afastamos da perpendicular. Se o Plano de Hilbert fosse semielíptico, o que aconteceria com a distância?

12. Em um Plano de Hilbert, dois triângulos são *semelhantes* quando existe uma correspondência entre os vértices tais que os ângulos correspondentes sejam congruentes. Mostre que, em um Plano de Hilbert semi-hiperbólico ou semielíptico, dois triângulos semelhantes são congruentes.

Capítulo 4

Movimentos Rígidos

A ideia de poder mover uma figura no plano sem deformá-la, isto é, preservando a congruência entre segmentos e ângulos, já aparece em *Os Elementos* de Euclides, quando, nas provas de diversas proposições, o *princípio da superposição* é invocado. O próprio quarto postulado, segundo o qual todos os ângulos retos são congruentes, parece aludir ao fato de que o plano é homogêneo ([12]). Euclides, entretanto, não formaliza em nenhum axioma o princípio da superposição, deixando uma lacuna em sua teoria.

Ao incluir o axioma (C6)¹, do qual o caso de congruência conhecido como (LAL) é consequência quase que imediata, Hilbert estabelece axiomáticamente a homogeneidade do plano: todas as cópias de um determinado triângulo serão congruentes ao original.

O objetivo deste capítulo é formalizar o conceito de *movimento não deformante*, introduzindo o que se denomina *Movimento Rígido*. Em nosso estudo, os Movimentos Rígidos serão definidos como aplicações bijetivas do conjunto \mathbb{P} nele mesmo, mantendo invariantes as noções básicas de incidência, ordem e congruência. Desta forma, não reproduzimos a noção de uma figura movendo-se continuamente pelo plano, mas formalizamos a possibilidade de as clonar e superpor.

Ao abordarmos o estudo dos movimentos rígidos como elementos de um grupo, o leitor notará que as demonstrações dos teoremas vão gradualmente perdendo o caráter geométrico que possuíam até este ponto do texto e assumindo uma feição puramente algébrica. Terá destaque, nesta abordagem, o papel das reflexões como elementos involutórios do grupo de movimento rígidos, bem como a dualidade que se revela entre as relações de incidência e perpendicularidade. Estas ideias são os pilares que fundamentam a Geometria Absoluta de Bachmann, assunto do próximo

¹Na verdade, (C5) na versão original de Hilbert ([16]).

capítulo.

4.1 Livre Mobilidade

No decorrer desta seção, chamaremos de um *Quase-Plano de Hilbert* qualquer sistema axiomático que inclua pelo menos os axiomas (I1)-(I3), (B1)-(B4), (C1)-(C5), possivelmente omitindo o axioma (C6). É claro que todo Plano de Hilbert é um Quase-Plano de Hilbert.

Definição 4.1. *Em um Quase-Plano de Hilbert, uma aplicação $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ é um movimento rígido quando satisfaz as seguintes condições:*

- (i) φ é bijetiva;
- (ii) φ leva retas em retas;
- (iii) φ preserva a relação de incidência:

$$A \in \ell \Rightarrow \varphi(A) \in \varphi(\ell);$$

- (iv) φ preserva a relação estar entre:

$$A \star B \star C \Rightarrow \varphi(A) \star \varphi(B) \star \varphi(C);$$

- (v) φ preserva a relação de congruência entre segmentos:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow \overline{\varphi(A)\varphi(B)} \cong \overline{\varphi(C)\varphi(D)};$$

- (vi) φ preserva a relação de congruência entre ângulos:

$$\angle ABC \cong \angle DEF \Rightarrow \angle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C) \cong \angle \varphi(D)\varphi(E)\varphi(F).$$

A aplicação identidade $\mathcal{I} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, definida por $\mathcal{I}(P) = P$, para todo $P \in \mathbb{P}$, é certamente um movimento rígido. Além disso, é fácil mostrar que a composição movimentos rígidos é uma operação associativa que resulta sempre em um movimento rígido. Levando em conta que um movimento rígido é uma função bijetiva, todo movimento possui um inverso. Assim, se pensarmos no conjunto de todos os movimentos rígidos munido da operação de composição, estamos diante da estrutura algébrica denominada *grupo*. Este ponto de vista será melhor explorado a partir da Seção 4.3.

Em um Plano de Hilbert, não é óbvio, à primeira vista, que existam movimentos rígidos além da identidade \mathcal{I} . Precisamos, com urgência, construir um.

Dada uma reta ℓ qualquer, vamos construir uma transformação denominada *reflexão em torno de ℓ* , assim definida para todo ponto P :

$$\mathcal{R}_\ell(P) = \begin{cases} P, & \text{se } P \in \ell; \\ P', & \text{se } P \notin \ell. \end{cases}$$

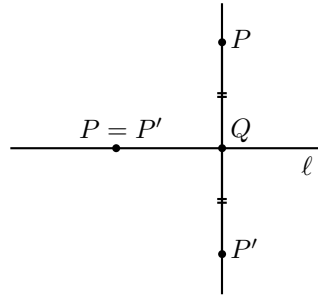


Fig. 4.1

P' , no segundo caso é obtido da seguinte maneira: por P baixamos a perpendicular a ℓ ; seja Q o pé dessa perpendicular; P' é o único ponto sobre a semirreta oposta a \overrightarrow{QP} tal que $\overline{QP'} \cong \overline{QP}$.

Teorema 4.1. *Em um Plano de Hilbert, a reflexão \mathcal{R}_ℓ em torno da reta ℓ é um movimento rígido.*

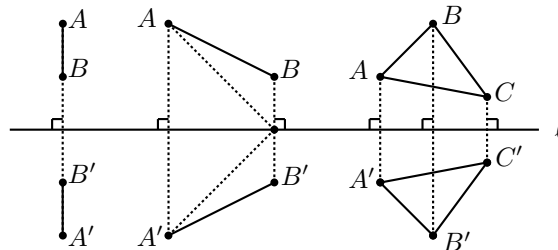


Fig. 4.2

Demonstração: A demonstração é deixada como exercício. Os casos envolvendo congruência entre segmentos e entre ângulos a serem analisados estão ilustrados na Fig. 4.2, onde X' significa abreviadamente a imagem de X por \mathcal{R}_ℓ , para $X = A, B, C$. Nos dois primeiros casos, o leitor deverá mostrar que $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$; no último, que $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$. ■

Definição 4.2. *Dizemos que um Quase-Plano de Hilbert é dotado de livre mobilidade (LM) quando forem cumpridas as seguintes condições:*

- (i) *Para toda reta ℓ , existe um movimento rígido que deixa fixos os pontos de ℓ e intercambia os dois lados de ℓ ;*
- (ii) *Para todo par de pontos A e A' , existe um movimento rígido que leva A em A' ;*

(iii) Para todo par de semirretas \overrightarrow{OA} e $\overrightarrow{OA'}$, com origem comum O , existe um movimento rígido φ que deixa O fixo e leva \overrightarrow{OA} em $\overrightarrow{OA'}$.

Teorema 4.2. *Todo Plano de Hilbert é dotado de livre mobilidade.*

Demonstração:

- Começemos por (i). Dada a reta ℓ , \mathcal{R}_ℓ deixa fixos os pontos de ℓ e intercambia os dois lados de ℓ .
- Para mostrar (ii), se $A \neq A'$, basta tomar ℓ como a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$. A reflexão \mathcal{R}_ℓ será o movimento rígido desejado. Se $A = A'$, ℓ pode ser qualquer reta incidente a A .
- Para mostrar (iii), se \overrightarrow{OA} e $\overrightarrow{OA'}$ não possuem a mesma reta suporte, basta tomar ℓ como a bissetriz do ângulo $\angle AOA'$ e \mathcal{R}_ℓ será o movimento rígido desejado. Se \overrightarrow{OA} e $\overrightarrow{OA'}$ são semirretas opostas, basta tomar ℓ como a perpendicular à reta suporte por O . Por fim, se \overrightarrow{OA} e $\overrightarrow{OA'}$ coincidem, basta tomar ℓ como a própria reta suporte de ambas as semirretas. ■

Teorema 4.3. *No Sistema Axiomático da Geometria Neutra, se substituirmos o axioma (C6) pelo axioma de livre mobilidade (LM), então (C6) pode ser deduzido como teorema.*

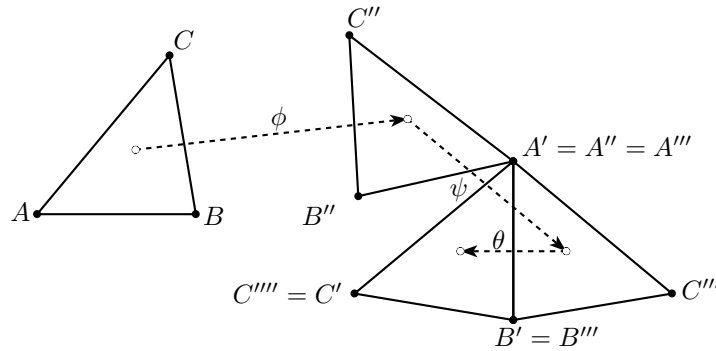


Fig. 4.3

Demonstração: Supondo (LM), para provar (C6) como teorema, tomemos dois ternos de pontos A, B, C e A', B', C' satisfazendo $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\overline{BA} \cong \overline{B'A'}$ e $\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$. Devemos mostrar que $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Valendo (LM), sabemos que existe um movimento rígido ϕ que leva A em A' . Denominemos $\phi(B) = B''$ e $\phi(C) = C''$ as imagens dos outros dois pontos. Pela

definição de movimento rígido, devemos ter $\angle B''A'C''' \cong \angle BAC$, $\overline{B''A'} \cong \overline{BA}$ e $\overline{C'''A'} \cong \overline{CA}$.

Novamente, usando (LM), existe um movimento rígido ψ que leva a semirreta $\overrightarrow{A'B''}$ em $\overrightarrow{A'B'}$, deixando o ponto A' fixo. Sejam $\psi(B'') = B'''$ e $\psi(C''') = C''''$. Temos, pela definição de movimento rígido, $\angle B'''A'C'''' \cong \angle B''A'C''' \cong \angle BAC$, $\overline{B'''A'} \cong \overline{B''A'} \cong \overline{BA}$ e $\overline{C''''A'} \cong \overline{C'''A'} \cong \overline{CA}$. Mas $\overline{B'''A'} \cong \overline{B''A'}$ acarreta que $\psi(B'') = B''' = B'$, por (C1).

Temos, então, duas possibilidades:

- C'''' e C' estão do mesmo lado da reta $A'B'$

Neste caso, por (C4), as semirretas $\overrightarrow{A'C''''}$ e $\overrightarrow{A'C'}$ coincidem e, por (C1), teremos $C'''' = C'$. Tomamos $\varphi = \psi\phi$.

- C'''' e C' estão em lados opostos da reta $A'B'$

Usando novamente (LM), existe um movimento rígido θ que deixa fixos os pontos da reta $A'B'$, intercambiando seus dois lados. O ponto $C'''' = \theta(C''''')$ coincidirá com C' , por (C4) e (C1). Tomamos $\varphi = \theta\psi\phi$.

Em qualquer alternativa, $\varphi(\angle ABC) = \angle A'B'C'$, e a congruência se verifica pelo fato de φ ser uma composição de movimentos rígidos e, portanto, também um movimento rígido. ■

Os Teoremas 4.2 e 4.3 podem ser resumidos no seguinte:

Teorema 4.4. *Na presença dos axiomas (I1)-(I3), (B1)-(B4) e (C1)-(C5), ou seja, em um Quase-Plano de Hilbert, (LM) e (C6) são equivalentes.*

Examinemos, agora, a seguinte questão: para que um movimento rígido $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ esteja unicamente determinado, exatamente quantos pares da forma $(P, \varphi(P))$, sendo $P \in \mathbb{P}$ devem ser especificados? A resposta é assunto do próximo teorema.

Teorema 4.5. *Sejam A, B, C três pontos não colineares e A', B', C' três pontos também não colineares. Existe, no máximo, um movimento rígido que leva A em A' , B em B' e C em C' .*

Demonstração: É claro que só poderá existir um movimento rígido nas condições estabelecidas se $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Mostremos, então, que existe uma única maneira de obter a imagem X' de um ponto qualquer X , distinto de A, B e C , por um movimento rígido que leve A em A' , B em B' e C em C' .

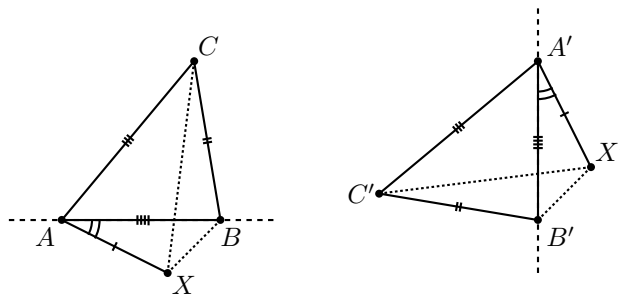


Fig. 4.4

Sem perda de generalidade, suponhamos que X não pertença à reta suporte do lado \overline{AB} de $\triangle ABC$. Como um movimento rígido preserva a relação *estar entre*, há duas possibilidades:

- Se X e C estiverem do mesmo lado de AB , X' e C' também deverão estar do mesmo lado de $A'B'$.

Transportamos, então, o ângulo $\angle XAB$ a partir da semirreta $\overrightarrow{A'B'}$ para o lado da reta $A'B'$ onde está C' e, sobre a *única* semirreta $\overrightarrow{A'Y'}$ assim obtida ((C4)), tomamos o *único* ponto X' tal que $\overrightarrow{A'X'} \cong \overrightarrow{AX}$ ((C1)).

- Se X e C estiverem em lados opostos de AB , agimos da mesma forma, fazendo, no entanto, o transporte de $\angle XAB$ para o lado oposto de $A'B'$ ao de C' e, conseqüentemente, obtendo X' e C' em lados opostos de $A'B'$.

Em ambos os casos, as demais congruências entre segmentos e ângulos se verificam facilmente. ■

Teorema 4.6. *Todo movimento rígido distinto de \mathcal{I} se expressa como composição de, no máximo, três reflexões.*

Demonstração: A construção é idêntica à da prova do Teorema 4.3. Vamos, aqui, apenas mostrar que os três movimentos obtidos são, cada um deles, ou uma reflexão em torno de alguma reta, ou a identidade \mathcal{I} .

Seja, então, $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ um movimento rígido. Pelo Teorema 4.5, φ fica unicamente determinado se especificarmos a imagem de um triângulo: $\varphi(\triangle ABC) = \triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$, sendo $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ e $C' = \varphi(C)$.

Inicialmente, vamos construir um movimento rígido ϕ que leva A em A' . Temos dois casos:

- se $A' = A$: tomamos $\phi = \mathcal{I}$;

- se $A' \neq A$: tomamos $\phi = \mathcal{R}_m$, onde m é a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$.

Nos dois casos, os triângulos $\triangle A'B'C'$ e $\phi(\triangle ABC)$ têm pelo menos o vértice $A' = \phi(A)$ em comum.

Agora, estabelecemos o movimento rígido ψ que leva a semirreta $\overrightarrow{A'\phi(B)}$ em $\overrightarrow{A'B'}$, deixando fixo o ponto $A' = \phi(A)$. Surgem, igualmente, duas possibilidades:

- se $\overrightarrow{A'\phi(B)} = \overrightarrow{A'B'}$: tomamos $\psi = \mathcal{I}$;
- se $\overrightarrow{A'\phi(B)} \neq \overrightarrow{A'B'}$: tomamos $\psi = \mathcal{R}_b$, onde b é a bissetriz do ângulo $\angle \phi(B)A'B'$.

Nos dois casos, teremos $\psi(\overrightarrow{A'\phi(B)}) = \overrightarrow{A'B'}$ e, sendo ψ um movimento rígido, $\psi(\phi(B)) = B'$, já que $\overrightarrow{A'\phi(B)} \cong \overrightarrow{A'B'} \cong \overrightarrow{AB}$.

Por último, precisamos levar $\psi(\phi(C))$ em C' , deixando fixo ponto a ponto a reta $A'B'$. Há também duas possibilidades:

- se $\psi(\phi(C))$ e C' estão do mesmo lado da reta $A'B'$: tomamos $\theta = \mathcal{I}$;
- se $\psi(\phi(C))$ e C' estão em lados opostos da reta $A'B'$: tomamos $\theta = \mathcal{R}_{A'B'}$, que levará $\psi(\phi(C))$ em C' (verifique!), deixando fixo ponto a ponto a reta $A'B'$.

Assim, $\varphi = \theta\psi\phi$, de maneira que φ é a composta de, no máximo três reflexões. ■

Evidentemente não existe uma única forma de decompor um movimento em uma composta de até três reflexões.

4.2 Subconjuntos Invariantes

Definição 4.3. *Seja $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ uma transformação qualquer, não necessariamente um movimento rígido. Dizemos que um subconjunto $S \subseteq \mathbb{P}$ é invariante por φ quando, para todo $P \in S$, tivermos $\varphi(P) \in S$. Mais abreviadamente, denotamos este fato por: $\varphi(S) \subseteq S$.*

Sendo φ um movimento rígido, sabemos, pela definição, que φ é bijetiva e, portanto, S e $\varphi(S)$ têm a mesma cardinalidade. Neste caso particular, a definição se simplifica: um subconjunto $S \subseteq \mathbb{P}$ será invariante por φ quando $S = \varphi(S)$.

Interessa-nos, neste estudo, a invariância de dois subconjuntos particulares sob movimentos rígidos: os subconjuntos constituídos por um só ponto e as retas.

Diremos, então, que $P \in \mathbb{P}$ é um *ponto fixo* de φ (ou *permanece fixo sob* φ) quando $\varphi(P) = P$. De modo semelhante, uma *reta fixa* de φ (ou *permanece fixa sob* φ) quando $\varphi(m) = m$.

Se m é uma *reta fixa* de φ , pode ocorrer que todo ponto de m seja um ponto fixo de φ . Neste caso, dizemos que m é uma *reta fixa de* φ *ponto a ponto* (ou *permanece fixa ponto a ponto sob* φ).

A reflexão \mathcal{R}_ℓ em torno da *reta* ℓ , conforme foi definida na seção anterior, deixa a *reta* ℓ *fixa ponto a ponto*. É fácil também constatar que os únicos pontos fixos de \mathcal{R}_ℓ são os pontos de ℓ , já que qualquer outro ponto em $\mathbb{P} - \ell$ terá sua imagem no lado oposto de ℓ .

Surge então a pergunta: quais são os movimentos rígidos que deixam fixos apenas os pontos de uma dada *reta* ℓ ? A resposta está nas proposições seguintes.

Lema 4.1. *Se um movimento rígido φ deixa fixos dois pontos P e Q distintos, então deixa fixa ponto a ponto a *reta* PQ .*

Demonstração: Segue da definição de movimento rígido. ■

Lema 4.2. *Se um movimento rígido φ deixa a *reta* ℓ fixa ponto a ponto, então também deixa fixa toda *reta* m perpendicular a ℓ .*

Demonstração: Sejam $Q \in \ell$, $\{T\} = \ell \cap m$ e P um ponto qualquer de m . O ângulo reto $\angle PTQ$ deve ser preservado sob φ , donde $\angle \varphi(P)\varphi(T)\varphi(Q)$ deve também ser reto. Mas $\varphi(Q) = Q$ e $\varphi(T) = T$, donde $\angle \varphi(P)TQ$ é reto. Como a semirreta \overrightarrow{TQ} é comum aos dois ângulos, ou $\angle PTQ = \angle \varphi(P)TQ$ ou $\angle PTQ$ e $\angle \varphi(P)TQ$ são suplementares. Em qualquer das duas hipóteses, $\varphi(P) \in m$. ■

Lema 4.3. *Se um movimento rígido φ deixa a *reta* ℓ fixa ponto a ponto e também deixa fixa outra *reta* m distinta de ℓ e não perpendicular a ℓ , então $\varphi = \mathcal{I}$.*

Demonstração: Vamos mostrar, primeiro, que m permanece fixa ponto a ponto, tomando um ponto $M \in m$ qualquer. Se $M \in \ell$, é claro que $\varphi(M) = M$, pois ℓ , por hipótese, permanece fixa ponto a ponto. Se $M \notin \ell$, baixamos por M a perpendicular n a ℓ . Sendo φ um movimento rígido e $n \perp \ell$, $\varphi(n) = n$. Assim, $M \in m \cap n$ e $\varphi(M) \in \varphi(m) \cap \varphi(n) = m \cap n = \{M\}$. Portanto, m permanece fixa ponto a ponto.

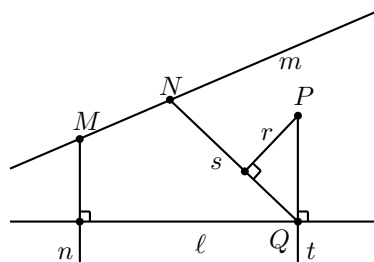


Fig. 4.5

Para mostrar que $\varphi = \mathcal{I}$, tomemos um ponto P arbitrário. Se $P \in \ell$ ou $P \in m$, já sabemos que $\varphi(P) = P$. Se $P \notin \ell$ e $P \notin m$, baixamos por P a perpendicular t a ℓ . Sejam Q o pé desta perpendicular e $N \in m$ tal que $N \notin t$ e $N \notin \ell$. Chamemos s a reta NQ e, por P , baixamos a perpendicular r a s .

É fácil ver que $\varphi(s) = s$, uma vez que $s = NQ$, sendo N e Q pontos fixos de φ , por pertencerem a m e ℓ , respectivamente. Além disso, s não pode ser perpendicular a ℓ , do contrário seria $s = t$, contrariando a escolha do ponto N .

Logo s é fixa ponto a ponto e, como $r \perp s$, temos que r permanece fixa por φ . Como $r \neq t$, temos $P \in r \cap t$, donde $\varphi(P) \in \varphi(r) \cap \varphi(t) = r \cap t = \{P\}$. ■

Os lemas anteriores podem ser resumidos no seguinte teorema:

Teorema 4.7. *Seja ℓ uma reta qualquer.*

- (i) *Os únicos pontos fixos da reflexão \mathcal{R}_ℓ são os pontos incidentes a ℓ .*
- (ii) *As únicas retas fixas da reflexão \mathcal{R}_ℓ são ℓ e as retas perpendiculares a ℓ .*
- (iii) *O único movimento rígido distinto de \mathcal{I} que deixa fixos apenas os pontos incidentes a ℓ é \mathcal{R}_ℓ .*

4.3 O Grupo dos Movimentos Rígidos

Um *grupo* é uma estrutura algébrica (G, \bullet) , que consiste de um conjunto G munido de uma operação binária fechada $\bullet : G \times G \rightarrow G$ satisfazendo os seguintes requisitos:

- (i) \bullet é associativa:
 $\forall x, y, z \in G, x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$.
- (ii) \bullet tem um elemento neutro e :
 $\forall x \in G, x \bullet e = e \bullet x = x$.
- (iii) Todo elemento de G possui um inverso com respeito a \bullet :
 $\forall x \in G, \exists x^{-1}$ tal que $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = e$.

Como exemplos de grupos sobre conjuntos numéricos, podemos citar: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q} - \{0\}, \times)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \times)$. Observe que $(\mathbb{N}, +)$ e (\mathbb{Z}, \times) não são grupos.

Em geral, em um grupo (G, \bullet) , não se exige que a operação \bullet seja comutativa. Quando isto ocorre, dizemos que G é um *grupo comutativo* ou *abeliano*.

Definição 4.4. *Um elemento $x \in G$, é dito involutório ou uma involução quando ele é distinto do elemento neutro e coincide com seu inverso x^{-1} . Isto equivale a dizer que $x \bullet x = e$, por economia de notação, escreveremos: $x \bullet x = x^2 = e$.*

Seja D um conjunto qualquer, é fácil ver que o conjunto de todas as funções bijetivas $\phi : D \rightarrow D$, munido da operação \circ de composição entre funções, é um grupo: a composição de funções é uma operação associativa, a função identidade de D em D definida por $\mathcal{I}_D(x) = x, \forall x \in D$, é o elemento neutro e toda função $\phi : D \rightarrow D$, sendo bijetiva, possui uma inversa $\phi^{-1} : D \rightarrow D$.

Portanto, o conjunto de todos os movimentos rígidos de \mathbb{P} , munido da operação \circ de composição, forma um grupo, denominado *Grupo dos Movimentos Rígidos* e abreviado por GMR.

No restante deste capítulo, vamos examinar algumas propriedades dos movimentos rígidos vistos como elementos de GMR. Daqui em diante, iremos omitir o sinal \circ que designa a operação de composição de funções, dizendo simplesmente $\theta\phi$ no lugar de $\theta \circ \phi$. Também vamos nos referir à composição entre dois movimentos como seu *produto*. Alguns resultados básicos da Álgebra, estudados em Teoria de Grupos, serão necessários. Não os demonstraremos aqui, mas o leitor esquecido poderá encontrá-los em [3].

4.4 Reflexões e Perpendicularidade

Seja ℓ uma reta qualquer. Da maneira como foi definida, a reflexão \mathcal{R}_ℓ em torno da reta ℓ é uma involução em GMR: ela é distinta da identidade \mathcal{I} e, se aplicada duas vezes, reproduz o ponto original. Assim

$$\mathcal{R}_\ell^2(P) = \mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_\ell(P) = P,$$

para todo $P \in \mathbb{P}$, o que equivale a dizer que $\mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_\ell^{-1}$.

Nesta seção, vamos expressar a condição de perpendicularidade entre duas retas em função do produto das reflexões em torno destas retas. Este será um dos resultados fundamentais deste capítulo. Precisamos, antes, do seguinte lema:

Lema 4.4. *Sejam ℓ, m e m' retas. Então $m' = \mathcal{R}_\ell(m)$ se, e somente se, $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_{m'}$.*

Demonstração:

(\Rightarrow) Suponhamos que $m' = \mathcal{R}_\ell(m)$ e seja $P' \in m'$. Então $\mathcal{R}_\ell(P') = P \in m$ e

$$\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_\ell(P') = \mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m(P) = \mathcal{R}_\ell(P) = P'.$$

Portanto, $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_\ell$ deixa fixos os pontos de m' . Temos duas possibilidades: $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_\ell = \mathcal{I}$ ou $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_{m'}$. Mas se $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_\ell = \mathcal{I}$, multiplicando à esquerda e à direita por \mathcal{R}_ℓ , teríamos $\mathcal{R}_m = \mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_\ell = \mathcal{I}$, contrariando o fato de \mathcal{R}_m ser uma reflexão. Resta-nos $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_{m'}$.

(\Leftarrow) Suponhamos que $\mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_m \mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_{m'}$ e seja $m'' = \mathcal{R}_\ell(m)$. Usando a primeira parte da prova, temos que $\mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_m \mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_{m''}$. Portanto, $\mathcal{R}_{m''} = \mathcal{R}_{m'}$, o que implica $m'' = m'$. ■

Teorema 4.8. *Duas retas m e n são perpendiculares se, e somente se, $m \neq n$ e $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n \mathcal{R}_m$.*

Demonstração: Sabemos que $m \perp n$ se, e somente se, $m \neq n$ e $\mathcal{R}_m(n) = n$ (verifique!). Usando o lema anterior, temos que $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n \mathcal{R}_m = \mathcal{R}_n$, ou seja, $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n \mathcal{R}_m$. ■

No teorema anterior, podemos expressar o fato $m \neq n$ como $\mathcal{R}_m \neq \mathcal{R}_n$, que é o mesmo que $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n \neq \mathcal{I}$. Além disso $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n \mathcal{R}_m = \mathcal{R}_n$ pode ser reescrito como

$$(\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n)(\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n) = (\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n)^2 = \mathcal{I}.$$

Portanto, o teorema pode ser assim lido: m é perpendicular a n se, e somente se, $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n$ é uma involução.

4.5 Dois Teoremas sobre Três Reflexões

Teorema 4.9 (Primeiro Teorema das Três Reflexões). *Se três retas ℓ , m , n concorrem em um ponto comum P , então existe uma quarta reta t , também incidente a P , tal que $\mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_m \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_t$.*

Demonstração: Sejam $A \in \ell$, $A \neq P$, seu reflexo $A' = \mathcal{R}_m(A)$ e novamente o reflexo $A'' = \mathcal{R}_n(A')$. Como $\overline{PA} \cong \overline{PA'} \cong \overline{PA''}$, o triângulo $\triangle A''PA$ é isósceles, donde a mediatriz t de $\overline{AA''}$ incidirá ao vértice P .

Como $A \neq P$ é um ponto arbitrário sobre ℓ , $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n \mathcal{R}_t(A) = A$ e $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n \mathcal{R}_t(P) = P$, concluímos que $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n \mathcal{R}_t$ deixa fixos todos os pontos de ℓ . Vamos mostrar que $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n \mathcal{R}_t \neq \mathcal{I}$.

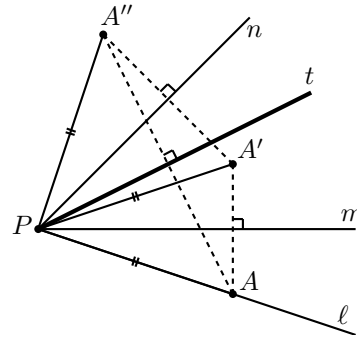


Fig. 4.6

Se tivéssemos $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n \mathcal{R}_t = \mathcal{I}$, decorreria que $\mathcal{R}_n \mathcal{R}_t = \mathcal{R}_m$ e também $\mathcal{R}_t \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_m$, donde $\mathcal{R}_n \mathcal{R}_t = \mathcal{R}_t \mathcal{R}_n$. Portanto, como $n \neq t$ (verifique!), devemos ter $n \perp t$. Analogamente podemos concluir que $m \perp t$. Logo, m e n possuem uma

perpendicular comum t e, pelo Teorema 2.47, são paralelas e não podem concorrer em um ponto P .

Portanto, $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n\mathcal{R}_t \neq \mathcal{I}$ e, como $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n\mathcal{R}_t$ deixa a reta ℓ fixa ponto a ponto, $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n\mathcal{R}_t = \mathcal{R}_\ell$, donde $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_t$. ■

Teorema 4.10 (Segundo Teorema das Três Reflexões). *Se três retas ℓ , m , n possuem uma perpendicular comum s , então existe uma quarta reta t , também perpendicular a s , tal que $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_t$.*

Demonstração: Sejam P , Q e T os pontos de encontro das retas ℓ , m , n com a perpendicular comum s . Tomemos um ponto $A \in \ell$, $A \neq P$, seu reflexo $A' = \mathcal{R}_m(A)$ e o reflexo deste, $A'' = \mathcal{R}_n(A')$.

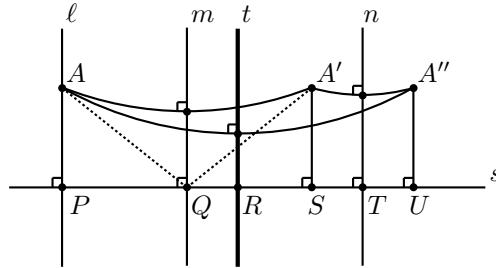


Fig. 4.7

Analogamente à prova do teorema anterior, a reta t desejada será a mediatriz de $\overline{AA''}$ e devemos mostrar que t é perpendicular a s .

Por A' e A'' , baixemos duas perpendiculares a s , cujos pés chamaremos S e U . Por sucessivas congruências de triângulos, é fácil mostrar que $\overline{AP} \cong \overline{A'S}$. Da mesma forma, mostra-se que $\overline{A'S} \cong \overline{A''U}$. Portanto, $\overline{AP} \cong \overline{A''U}$ e o quadrilátero $PAA''U$ é de Saccheri, sendo t a mediatriz de seu topo $\overline{AA''}$.

Logo, pelo Teorema 3.2, t é também mediatriz da base \overline{PU} , sendo perpendicular a s . ■

Os dois teoremas precedentes sobre um produto de três reflexões valem também quando duas ou até mesmo as três retas coincidem.

4.6 Meios-Giros e Incidência

Já vimos que a condição de perpendicularidade entre duas retas m e n exprime-se naturalmente em função do produto das reflexões $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n$, bastando que ele seja comutativo e, portanto, involutório: $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n\mathcal{R}_m$. Vamos estudar o movimento rígido expresso por essa composição.

Definição 4.5. Sejam m e n retas perpendiculares, com o ponto P em comum. Definimos o meio-giro em torno de P como o movimento rígido $\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_m \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n \mathcal{R}_m$.

É fácil constatar que um meio-giro é uma involução: pela definição, $\mathcal{G}_P \neq \mathcal{I}$ e $(\mathcal{G}_P)^2 = (\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n)(\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n) = (\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n)(\mathcal{R}_n \mathcal{R}_m) = \mathcal{R}_m \mathcal{R}_m = \mathcal{I}$.

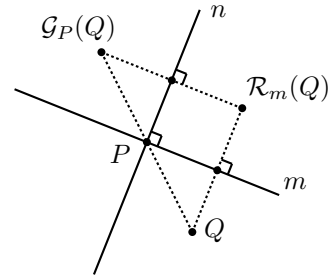


Fig. 4.8

Teorema 4.11. Um meio-giro $\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_m \mathcal{R}_n$ depende apenas de P , isto é, dadas duas retas perpendiculares quaisquer m' e n' incidentes a P , temos $\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_{m'} \mathcal{R}_{n'} = \mathcal{R}_{n'} \mathcal{R}_{m'}$.

Demonstração: Seja m' uma reta qualquer incidente a P . Pelo Primeiro Teorema das Três Reflexões, sabemos que existe a reta n'' , também incidente a P , tal que $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n \mathcal{R}_{m'} = \mathcal{R}_{n''}$, donde $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{n''} \mathcal{R}_{m'}$. Como m e n são perpendiculares, $(\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n)^2 = \mathcal{I}$, donde $(\mathcal{R}_{n''} \mathcal{R}_{m'})^2 = \mathcal{I}$ e, portanto, $\mathcal{R}_{n''} \mathcal{R}_{m'} = \mathcal{R}_{m'} \mathcal{R}_{n''}$. Logo, n'' e m' são perpendiculares concorrentes em P e segue-se que $n'' = n'$. ■

Teorema 4.12. Toda reta incidente a P permanece fixa sob \mathcal{G}_P , mas não ponto a ponto.

Demonstração: Seja ℓ uma reta incidente a P . Sabemos, pelo Teorema 4.11, que $\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_m$, sendo $m \perp \ell$ e passando por P . Logo $\mathcal{G}_P(\ell) = \mathcal{R}_m \mathcal{R}_\ell(\ell) = \mathcal{R}_m(\ell) = \ell$, já que as retas perpendiculares a m ficam fixas por \mathcal{R}_m , mas não ponto a ponto. ■

Como corolário deste último teorema, concluímos facilmente que, para todo ponto $Q \neq P$, Q , P e $\mathcal{G}_P(Q)$ são colineares.

Teorema 4.13. O único ponto fixo de \mathcal{G}_P é P .

Demonstração: Se houvesse outro ponto fixo $Q \neq P$ de \mathcal{G}_P , a reta PQ ficaria fixa ponto a ponto sob \mathcal{G}_P , contrariando o teorema anterior. ■

Teorema 4.14. As únicas retas fixas de \mathcal{G}_P são as retas incidentes a P .

Demonstração: Seja $\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_m \mathcal{R}_n$ e suponhamos, por absurdo, que a reta ℓ , não incidente a P , permaneça fixa sob \mathcal{G}_P . Tomemos um ponto $Q \in \ell$ qualquer.

Pelo Teorema 4.12, a reta PQ fica fixa sob \mathcal{G}_P e, como $\mathcal{G}_P(Q) \in \ell$, devemos ter $\mathcal{G}_P(Q) \in \ell \cap PQ = \{Q\}$. Logo, Q é um ponto fixo de \mathcal{G}_P distinto de P , contrariando o Teorema 4.13. ■

Lema 4.5. $P' = \mathcal{R}_\ell(P)$ se, e somente se, $\mathcal{G}_{P'} = \mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P \mathcal{R}_\ell$.

Demonstração:

(\Rightarrow) Se $P' = \mathcal{R}_\ell(P)$, $P' \neq P$, sabemos que a reta $m = PP'$ é perpendicular a ℓ e, portanto, $\mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_m = \mathcal{R}_m \mathcal{R}_\ell$. Por P , levantamos a perpendicular n a m e, por seu reflexo P' , a perpendicular n' a m . É óbvio que $n' = \mathcal{R}_\ell(n)$. Além disso, $\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_m \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n \mathcal{R}_m$ e $\mathcal{G}_{P'} = \mathcal{R}_m \mathcal{R}_{n'} = \mathcal{R}_{n'} \mathcal{R}_m$.

Portanto, $\mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P \mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_n \mathcal{R}_m \mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_n \mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_m$.

Mas, pelo Lema 4.4, $\mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_n \mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_{n'}$, já que $n' = \mathcal{R}_\ell(n)$. Logo, $\mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P \mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_{n'} \mathcal{R}_m = \mathcal{G}_{P'}$.

(\Leftarrow) Suponhamos $\mathcal{G}_{P'} = \mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P \mathcal{R}_\ell$. Pelo Teorema 4.11, $\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_m \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n \mathcal{R}_m$, onde m e n são duas perpendiculares com P em comum. Chamemos $m' = \mathcal{R}_\ell(m)$ e $n' = \mathcal{R}_\ell(n)$.

Logo, $\mathcal{G}_{P'}(m') = \mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P \mathcal{R}_\ell(m') = \mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P \mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_\ell(m) = \mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P(m) = \mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_n \mathcal{R}_m(m) = \mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_n(m) = \mathcal{R}_\ell(m) = m'$.

Portanto, m' permanece fixa sob $\mathcal{G}_{P'}$, donde $P' \in m'$. Analogamente mostramos que $\mathcal{G}_{P'}(n') = n'$; logo, n' também é uma reta fixa de $\mathcal{G}_{P'}$ e deve passar por P' .

Como $m \cap n = \{P\}$, $m' \cap n' = \{P'\}$, $m' = \mathcal{R}_\ell(m)$ e $n' = \mathcal{R}_\ell(n)$, concluímos que $P' = \mathcal{R}_\ell(P)$. ■

O próximo teorema expressa a relação de incidência entre ponto e reta em função do meio giro em torno do ponto e da reflexão em torno da reta: um ponto P incide a uma reta ℓ se, e somente se, o produto $\mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P$ é involutório.

Teorema 4.15. $P \in \ell$ se, e somente se, $\mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P = \mathcal{G}_P \mathcal{R}_\ell$.

Demonstração: Sabemos que $P \in \ell \iff \mathcal{R}_\ell(P) = P$. Mas, pelo lema anterior, $\mathcal{R}_\ell(P) = P \iff \mathcal{G}_P = \mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P \mathcal{R}_\ell$, donde $\mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P = \mathcal{G}_P \mathcal{R}_\ell$. ■

4.7 A Correspondência Algébrica

O leitor atento terá notado alguma similaridade entre os resultados obtidos nas seções 4.4 e 4.6. Senão vejamos:

Seção 4.4	Seção 4.6
Lema 4.4: $m' = \mathcal{R}_\ell(m) \iff \mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_m \mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_{m'}$	Lema 4.5: $P' = \mathcal{R}_\ell(P) \iff \mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P \mathcal{R}_\ell = \mathcal{G}_{P'}$
Teorema 4.8: $m \perp n \iff (\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n)^2 = \mathcal{I}$	Teorema 4.15: $P \in \ell \iff (\mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P)^2 = \mathcal{I}$

Estes resultados sugerem uma correspondência entre pontos e meios-giros e retas e reflexões de modo que a relação de incidência entre um ponto P e uma reta ℓ se traduz no fato de o produto $\mathcal{G}_P \mathcal{R}_\ell$ ser involutório, assim como a relação de perpendicularidade entre as retas m e n se exprime pelo fato de o produto $\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n$ ser involutório.

Fato Geométrico		Equivalente Algébrico
Ponto	P	Meio-giro \mathcal{G}_P
Reta	ℓ	Reflexão \mathcal{R}_ℓ
Incidência	$P \in \ell$	$\mathcal{G}_P \mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_\ell \mathcal{G}_P$
Perpendicularidade	$m \perp n$	$\mathcal{R}_m \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n \mathcal{R}_m$

Pontos e retas, que são noções primitivas em um contexto geométrico, possuem correspondentes algébricos no grupo dos movimentos rígidos GMR: os meios-giros e as reflexões, respectivamente, sendo ambos involuções em GMR.

Este raciocínio será a base para a construção da Geometria Absoluta de Bachmann, que abordaremos como assunto do próximo capítulo.

4.8 Feixes de Retas

O Primeiro Teorema das Três Reflexões nos diz que, se três retas ℓ , m e n concorrem em um ponto P , existirá sempre uma quarta reta t , também incidente a P , de maneira que o produto $\mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_m \mathcal{R}_n$ corresponda exatamente a \mathcal{R}_t . Podemo-nos

indagar sobre a seguinte questão: se duas retas ℓ e m concorrem em um ponto P e existem outras duas retas n e t tais que $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_t$, podemos afirmar que n e t também concorrem no mesmo ponto P , comum a ℓ e m ?

A resposta vem com o próximo teorema, que estabelece a recíproca do Primeiro Teorema das Três Reflexões:

Teorema 4.16. *Sejam ℓ e m retas distintas, concorrentes no ponto P . Seja n uma outra reta. Se $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n$ é uma reflexão, então $P \in n$.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_t$ seja uma reflexão e que $P \notin n$. Baixemos a perpendicular s a n por P e seja Q o pé desta perpendicular.

As retas ℓ , m e s concorrem em P e, pelo Primeiro Teorema das Três Reflexões, existe uma reta u incidente a P tal que $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_s = \mathcal{R}_u$. Portanto, $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m = \mathcal{R}_u\mathcal{R}_s$. Então $\mathcal{R}_u\mathcal{R}_s\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n$ e $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_t$, por hipótese. Portanto, $\mathcal{R}_s\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_u\mathcal{R}_t$. Mas s e n são perpendiculares e incidem a Q , donde $\mathcal{R}_s\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n\mathcal{R}_s = \mathcal{G}_Q$. Assim, $\mathcal{R}_u\mathcal{G}_Q = \mathcal{R}_u\mathcal{R}_s\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_t$. Mas \mathcal{R}_t é uma involução, logo $\mathcal{R}_t^2 = \mathcal{I}$, donde $(\mathcal{R}_u\mathcal{R}_s\mathcal{R}_n)(\mathcal{R}_u\mathcal{R}_s\mathcal{R}_n) = \mathcal{I}$, ou seja, $\mathcal{R}_u\mathcal{R}_s\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n\mathcal{R}_s\mathcal{R}_u$. Portanto, $\mathcal{G}_Q\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_n\mathcal{R}_s\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_t = \mathcal{R}_u\mathcal{G}_Q$, donde $Q \in u$, pelo Teorema 4.15. Como $P \neq Q$, temos $s = u$ e, portanto, $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m = \mathcal{R}_u\mathcal{R}_s = \mathcal{I}$, acarretando $\ell = m$, que contraria a hipótese de ℓ e m serem distintas. ■

A mesma pergunta pode ser formulada quando as retas ℓ e m possuem uma perpendicular comum s : uma terceira reta n tal que $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n$ seja uma reflexão será também perpendicular a s ? A recíproca do Segundo Teorema das Três Reflexões é estabelecida na proposição seguinte, cuja prova, análoga à do anterior, é deixada a cargo do leitor.

Teorema 4.17. *Sejam ℓ e m retas distintas, perpendiculares a s . Seja n uma terceira reta. Se $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n$ é uma reflexão, então n é também perpendicular a s .*

No primeiro caso analisado, as retas ℓ e m possuem em comum o ponto P ; no segundo, a perpendicular s . Juntando os resultados desta seção com os dois Teoremas sobre Três Reflexões demonstrados na Seção 4.5, concluímos que uma reta qualquer n possuirá o mesmo elemento comum a ℓ e m (o ponto P ou a perpendicular s) se, e somente se, o produto $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n$ corresponder a uma reflexão \mathcal{R}_t .

Podemos, então, generalizar da seguinte maneira estas ideias: dadas duas retas quaisquer ℓ e m , o feixe de retas definido por ℓ e m é o conjunto

$$\mathcal{F}_{\ell,m} = \{n \mid n \text{ é uma reta e } \mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n \text{ é uma reflexão}\}.$$

Distinguimos, então, três situações:

- Quando o elemento comum a ℓ e m é o ponto P , $\mathcal{F}_{\ell,m}$ será constituído exatamente por todas as retas que incidem a P e será denominado um *feixe de primeira espécie*;
- Quando o elemento comum a ℓ e m é a perpendicular s , $\mathcal{F}_{\ell,m}$ será constituído exatamente por todas as retas perpendiculares a s e será denominado um *feixe de segunda espécie*;
- Nos demais casos, $\mathcal{F}_{\ell,m}$ será denominado um *feixe de terceira espécie*.

Os leitores familiarizados com a Geometria Hiperbólica, devem lembrar-se exatamente das três posições relativas entre duas retas: ou elas concorrem em um ponto ordinário, ou elas possuem uma perpendicular comum (e, neste caso, são denominadas *ultraparalelas*) ou elas são paralelas assintóticas.

Uma questão interessante surge quando se consideram dois feixes distintos de retas: é possível garantir que eles possuam pelo menos uma reta em comum? O Teorema de Hjelmslev nos dá a resposta, após o seguinte lema:

Lema 4.6. *Sejam P e Q pontos distintos e $m = PQ$. Então $\mathcal{G}_P\mathcal{R}_\ell\mathcal{G}_Q$ é uma reflexão se, e somente se, ℓ e m são perpendiculares.*

Demonstração:

(\Rightarrow) Suponhamos que $\mathcal{G}_P\mathcal{R}_\ell\mathcal{G}_Q = \mathcal{R}_s$ e representemos os meios-giros $\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_m\mathcal{R}_u$ e $\mathcal{G}_Q = \mathcal{R}_v\mathcal{R}_m$, sendo $u \perp m$ e $v \perp m$ incidentes a P e Q , respectivamente. Então

$$\mathcal{R}_s = \mathcal{G}_P\mathcal{R}_\ell\mathcal{G}_Q = \mathcal{R}_m\mathcal{R}_u\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_v\mathcal{R}_m,$$

e, portanto, $\mathcal{R}_u\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_v = \mathcal{R}_m\mathcal{R}_s\mathcal{R}_m$, que, pelo Lema 4.4, é uma reflexão \mathcal{R}_t , onde $t = \mathcal{R}_m(s)$. Como $u \perp m$ e $v \perp m$, pela recíproca do Segundo Teorema das Três Reflexões, temos que $\ell \perp m$.

(\Leftarrow) Suponhamos $\ell \perp m$. Tomemos, como na primeira parte da prova, $\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_u\mathcal{R}_m$ e $\mathcal{G}_Q = \mathcal{R}_m\mathcal{R}_v$. Então

$$\mathcal{G}_P\mathcal{R}_\ell\mathcal{G}_Q = \mathcal{R}_u\mathcal{R}_m\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_v.$$

Sendo $\ell \perp m$, temos $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m$, donde

$$\mathcal{G}_P\mathcal{R}_\ell\mathcal{G}_Q = \mathcal{R}_u\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_m\mathcal{R}_v = \mathcal{R}_u\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_v,$$

que, pelo Segundo Teorema das Três Reflexões, é uma reflexão. ■

Teorema 4.18 (Hjelmslev). *Sejam $\mathcal{R}_a\mathcal{R}_{a'} = \mathcal{G}_A$, $\mathcal{R}_c\mathcal{R}_{c'} = \mathcal{G}_C$, onde $A \neq C$. Sejam ainda $\mathcal{R}_a\mathcal{R}_b\mathcal{R}_c = \mathcal{R}_d$ e $v = AC$. Então $\mathcal{R}_{a'}\mathcal{R}_b\mathcal{R}_{c'}$ é uma reflexão se, e somente se, $d \perp v$.*

Demonstração: Temos que $\mathcal{R}_{a'}\mathcal{R}_b\mathcal{R}_{c'} = \overline{\mathcal{R}_{a'}\mathcal{R}_a\mathcal{R}_a\mathcal{R}_b\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c\mathcal{R}_{c'}} = \mathcal{G}_A\mathcal{R}_a\mathcal{R}_b\mathcal{R}_c\mathcal{G}_C = \mathcal{G}_A\mathcal{R}_d\mathcal{G}_C$, que, pelo lema anterior, será uma reflexão se, e somente se, $d \perp AC = v$. ■

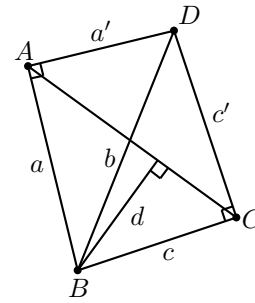


Fig. 4.9

Apesar do árido enunciado algébrico, o Teorema de Hjelmslev tem uma releitura simples em termos de feixes: ele nos aponta uma condição necessária e suficiente para que a reta b seja comum aos feixes $\mathcal{F}_{a,c}$ e $\mathcal{F}_{a',c'}$.

Uma consequência relevante do Teorema de Hjelmslev diz respeito à determinação de uma reta em um dado feixe que seja incidente a um dado ponto:

Teorema 4.19. *Dados um ponto P e as retas ℓ, m , existe exatamente uma reta de $\mathcal{F}_{\ell,m}$ incidente a P .*

Demonstração: Basta, por P , baixar as perpendiculares ℓ' e m' a ℓ e m , respectivamente, e aplicar o Teorema de Hjelmslev. ■

Este resultado será importante na seção seguinte, nas demonstrações dos lemas de redução.

4.9 Movimentos Ímpares e Pares

Com os resultados obtidos até agora, gostaríamos de poder classificar os movimentos rígidos distintos identidade \mathcal{I} em duas categorias disjuntas:

- Movimentos *ímpares*: aqueles que se expressam como composição de um número ímpar de reflexões;
- Movimentos *pares*: aqueles que se expressam como composição de um número par de reflexões.

Precisamos, antes, garantir que um movimento expresso por um número ímpar de reflexões não possa ser expresso por um número par delas e vice-versa. Vejamos, então, dois lemas que nos permitirão reduzir o número de termos em um produto de n reflexões.

Lema 4.7. *Sejam u e v duas retas e P um ponto. Então existem retas ℓ e m tais que $\mathcal{R}_u\mathcal{R}_v\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m$.*

Demonstração: Se $u = v$, ℓ e m podem ser qualquer par de perpendiculares com o ponto P em comum. Supondo, então, $u \neq v$, consideremos o feixe $\mathcal{F}_{u,v}$. Pelo Teorema 4.19, temos que existe uma reta $t \in \mathcal{F}_{u,v}$ tal que $P \in t$. Estando u , v e t em feixe, existe uma reta ℓ tal que $\mathcal{R}_u\mathcal{R}_v\mathcal{R}_t = \mathcal{R}_\ell$. Portanto, $\mathcal{R}_u\mathcal{R}_v = \mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_t$. Chamemos m a perpendicular a t por P . Como $\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_t\mathcal{R}_m$, segue que $\mathcal{R}_u\mathcal{R}_v\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t\mathcal{R}_m = \mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m$. ■

Lema 4.8. *Sejam ℓ , m e n três retas. Então existem uma reta t e um ponto P tais que $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_t\mathcal{G}_P$.*

Demonstração: Se $\ell = m$, ficamos com $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_t\mathcal{G}_P$, ou seja, $\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_t\mathcal{R}_n$, bastando, portanto, tomar t perpendicular a n e P como ponto comum a n e t . Supondo $\ell \neq m$, seja L um ponto qualquer sobre ℓ e s a reta de $\mathcal{F}_{m,n}$ que incide a L (Teorema 4.19).

Sendo $s \in \mathcal{F}_{m,n}$, pelo Primeiro Teorema das Três Reflexões, existe a reta x tal que $\mathcal{R}_s\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_x$, donde $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_s\mathcal{R}_x$.

Por L , baixamos a perpendicular y a x , tomando P como o ponto comum a x e y . Assim, $\mathcal{G}_P = \mathcal{R}_x\mathcal{R}_y = \mathcal{R}_y\mathcal{R}_x$.

Sendo ℓ , s e y concorrentes em L , novamente pelo Primeiro Teorema das Três Reflexões, existe a reta t tal que $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_s\mathcal{R}_y = \mathcal{R}_t$.

Substituindo: $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_s\mathcal{R}_x = \mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_s\mathcal{R}_y\mathcal{R}_y\mathcal{R}_x = \mathcal{R}_t\mathcal{G}_P$. ■

Teorema 4.20 (Teorema da Redução). *Todo produto de $n > 2$ reflexões pode ser expresso como produto de $n - 2$ reflexões.*

Demonstração: Basta aplicar os Lemas 4.8 e 4.7, nesta ordem. ■

Podemos, agora, voltar à nossa classificação dos movimentos em pares e ímpares. Suponhamos, então, que tivéssemos dois movimentos não triviais idênticos, um deles expresso por um número par e outro por um número ímpar de reflexões:

$$\mathcal{R}_{r_1} \dots \mathcal{R}_{r_{2i}} = \mathcal{R}_{s_1} \dots \mathcal{R}_{s_{2j+1}}, \quad i, j > 0.$$

Utilizando o Teorema da Redução repetidamente, podemos simplificar ambos os lados, restando apenas duas reflexões à esquerda e uma à direita:

$$\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_\ell,$$

o que é impossível, já que $\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n$ tem, no máximo, um ponto fixo (a interseção de m e n), ao passo que \mathcal{R}_ℓ tem infinitos (todos os pontos de ℓ).

De acordo com o Teorema 4.6, todo movimento rígido em um Plano de Hilbert pode ser expresso pela composição de, no máximo, três reflexões. Reunindo este fato à classificação dos movimentos em pares e ímpares, podemos nomear cada um deles:

- O movimento \mathcal{I} , que denominamos *identidade*;
- Os movimentos da forma \mathcal{R}_ℓ , que são as *reflexões*;
- Os movimentos da forma $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m$ não redutíveis a \mathcal{I} , denominados *quase-rotações*;
- Os movimentos da forma $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n$ não redutíveis a uma reflexão (ou seja, $n \notin \mathcal{F}_{\ell,m}$), denominados *reflexões deslizantes*.

As quase-rotações subdividem-se em *rotações*, *translações* e *deslocamentos paralelos*, dependendo de o feixe $\mathcal{F}_{\ell,m}$ ser de primeira, segunda ou terceira espécie, respectivamente. Os meios-giros nada mais são do que um caso especial de rotações, em que $\ell \perp m$.

4.10 Exercícios

1. Complete as demonstrações e verificações deixadas a seu cargo, leitor.
2. Mostre, através de um exemplo, que nem sempre um movimento rígido se decompõe de forma única como produto de 3 reflexões.
3. Mostre que o único movimento rígido que deixa fixos 3 pontos não colineares é \mathcal{I} .
4. Mostre que, se um movimento rígido deixa fixa uma reta ℓ ponto a ponto e também deixa fixo um ponto $P \notin \ell$, então este movimento rígido é \mathcal{I} . Perceba que o Lema 4.3 é corolário disto.
5. Dadas duas retas ℓ, m , mostre que $\ell = m \iff \mathcal{R}_\ell = \mathcal{R}_m$.
6. Mostre que, para duas retas ℓ, m , $\ell \perp m \iff l \neq m$ e $\mathcal{R}_\ell(m) = m$.
7. Analise o que acontece com o enunciado e a demonstração do Primeiro Teorema das Três Reflexões quando as retas ℓ, m e n não são distintas. Idem para o Segundo Teorema das Três Reflexões.
8. Mostre que, dadas as retas ℓ, m e n distintas, se $\mathcal{R}_\ell\mathcal{R}_m\mathcal{R}_n = \mathcal{I}$, então o Teorema do Ângulo Externo é violado.

9. Sejam ℓ, m, n concorrentes em P e t a reta tal que $\mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_m \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_t$ (Primeiro Teorema das Três Reflexões). Que relação angular pode ser deduzida entre as quatro retas?
10. Sejam ℓ, m, n com uma perpendicular comum s e t a reta, também perpendicular a s , tal que $\mathcal{R}_\ell \mathcal{R}_m \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_t$. Se L, M, N e T são as interseções de ℓ, m, n, t com s , que relação pode ser deduzida entre os segmentos \overline{LM} e \overline{NT} ?
11. Descreva os movimentos rígidos que deixam invariante um círculo $Circ(O, \overline{OA})$ em um Plano de Hilbert (veja definição de círculo no Exercício 17 do Capítulo 2).
12. Na Geometria Euclidiana, descreva os movimentos rígidos que deixam invariante:
 - um triângulo equilátero;
 - um quadrado;
 - um retângulo;
 - um círculo;
 - um feixe de paralelas.

Capítulo 5

A Geometria Absoluta

O Sistema Axiomático proposto por David Hilbert em seu livro *Fundamentos da Geometria* atinge plenamente o objetivo de fundamentar a geometria euclidiana espacial de forma consistente e categórica, preenchendo as lacunas deixadas por Euclides em *Os Elementos*. Hilbert deixa indefinidos os termos ponto, reta, incidência, estar entre e congruência, estabelecendo um sistema de 19 axiomas a partir dos quais se derivam logicamente todos os teoremas conhecidos da geometria euclidiana no espaço. A Geometria Neutra, que examinamos nos três capítulos anteriores, é um subconjunto deste sistema axiomático, onde se considerem apenas os três axiomas planos de incidência e se excluem os axiomas de paralelismo e continuidade.

Johannes Hjelmslev foi um matemático dinamarquês que, em 1907, deu importante passo no sentido de prover uma nova fundamentação para a geometria plana, distinta daquela concebida por Hilbert. Em seu artigo intitulado *Nova Fundamentação da Geometria Plana (Neue Begründung der Ebene Geometrie, [17])*, Hjelmslev apoia-se no conceito de *movimentos* - transformações bijetivas do plano em si mesmo que preservam incidência, ordem e congruência - e assume existentes as *reflexões* em torno de retas, definindo um movimento como a composição de um número finito delas. Nesta nova abordagem, a relação de congruência deixa de ser postulada, como o fez Hilbert, e passa a ser definida: duas figuras são ditas congruentes quando existir um movimento que leve uma na outra.

Fortemente inspirado nas ideias do Programa de Erlangen, de Felix Klein, Hjelmslev avança consideravelmente em sua proposta, sem, no entanto, dar o caráter algébrico definitivo a seus resultados, o que só viria a ser feito alguns anos mais tarde. Foram Georg Hessenberg, Arnold Schmidt e Friedrich Bachmann, já em meados do séc. XX, que nos legaram uma leitura totalmente algébrica da funda-

mentação da geometria por reflexões proposta por Hjelmslev, criando o conceito de *planos absolutos*.

Neste contexto, os pontos e retas do plano não são mais colocados como entidades básicas. Estas entidades passam a ser as reflexões em torno desses elementos, de modo que, em vez de se mencionar, por exemplo, o ponto A , na verdade menciona-se o meio-giro em torno de A .

Vistas como elementos do *grupo de movimentos*, as reflexões são aplicações involutórias (ou seja, aplicações bijetivas não triviais que coincidem com suas inversas) do plano em si mesmo. Assim, faz sentido referir-se ao produto entre dois pontos, duas retas ou mesmo entre um ponto e uma reta, sendo o resultado destes produtos sempre um movimento. Ocorre, então, uma algebrização da linguagem geométrica, porém de natureza diversa daquela que se obtém na geometria analítica mediante a introdução de coordenadas: pontos e retas são vistos como involuções no grupo de movimentos e algumas relações básicas, como incidência e perpendicularidade, expressam-se pela comutatividade de produtos de involuções.

Utilizando este linguajar algébrico, Bachmann desenvolve em seu livro *Construção da Geometria a partir do Conceito de Reflexão* (*Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, [1]) um novo sistema axiomático, que denomina *Geometria Absoluta*, calcado na teoria dos grupos e tendo por base apenas 5 axiomas. Esta geometria é puramente de incidência e um dos resultados fundamentais obtidos por Bachmann diz respeito à possibilidade de imergir qualquer plano absoluto em um plano projetivo, mediante a extensão do conjunto de pontos através de três espécies de feixes de retas.

Apesar de menos intuitivo, o sistema axiomático da Geometria Absoluta constitui considerável avanço em relação ao da Geometria Neutra: os planos elípticos, nos quais todo par de retas sempre se encontra, podem ser obtidos da Geometria Absoluta pelo acréscimo de apenas um axioma ao sistema - o que assegura a existência dos chamados *triângulos polares*. Na axiomática de Hilbert, vimos que isto é impossível, em virtude do Teorema do Ângulo Externo. Ademais, as geometrias hiperbólica e euclidiana derivam-se também do sistema de Bachmann, com a introdução dos respectivos axiomas de paralelismo e das noções de ordem e continuidade ([7]).

O propósito deste último capítulo é estudar o sistema axiomático da Geometria Absoluta, examinando alguns de seus principais teoremas. O leitor notará que muitos dos resultados obtidos no capítulo anterior sobre movimentos rígidos na Geometria Neutra reaparecem aqui, quer como axiomas, quer como teoremas, porém de forma mais geral: os planos elípticos são, agora, admissíveis.

5.1 Notação e Primeiras Definições

Seja (\mathcal{M}, \bullet) um grupo com elemento neutro $\mathbf{1}$. A operação \bullet entre dois elementos de \mathcal{M} será referida no restante do texto como seu *produto* e o sinal \bullet será omitido: $\alpha\beta$ será, portanto, sinônimo de $\alpha \bullet \beta$, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{M}$.

Recordemos que um elemento $x \in \mathcal{M}$ é *involutório*, ou simplesmente uma *involução*, quando $x \neq \mathbf{1}$ e $x^2 = \mathbf{1}$, onde $x^2 = xx$. Isto equivale a dizer que $x \neq \mathbf{1}$ e $x = x^{-1}$.

Um subconjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$ é dito *gerador* do grupo \mathcal{M} quando qualquer elemento de \mathcal{M} puder ser expresso como produto de um número finito de elementos de \mathcal{R} ou de seus inversos.

Dados, $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$, indicaremos que o produto $\alpha\beta$ é involutório ($\alpha\beta \neq \mathbf{1}$ e $(\alpha\beta)^2 = \mathbf{1}$) pela notação

$$\alpha \mid \beta,$$

que equivale a dizer que $\alpha \neq \beta$ e $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Quando ocorrer $\alpha_i \mid \beta_j$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$, designaremos este fato por

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \mid \beta_1, \dots, \beta_m.$$

Um produto involutório pode possuir mais de dois termos, por exemplo $\alpha\beta\gamma$. Neste caso,

$$(\alpha\beta\gamma)^2 = \mathbf{1} \iff \alpha\beta\gamma = \gamma\beta\alpha.$$

A negação da relação \mid será representada por \nmid .

A cada elemento $\alpha \in \mathcal{M}$ está associada uma transformação $T_\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, denominada *conjugação por α* , assim definida:

$$T_\alpha(x) = \alpha x \alpha^{-1}.$$

Teorema 5.1. *Sejam (\mathcal{M}, \bullet) um grupo com elemento neutro $\mathbf{1}$. Para todo $\alpha \in \mathcal{M}$, a transformação de conjugação por α é um automorfismo sobre (\mathcal{M}, \bullet) , ou seja:*

- (i) T_α é bijetiva;
- (ii) $T_\alpha(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;
- (iii) $T_\alpha(xy) = T_\alpha(x)T_\alpha(y)$;
- (iv) $T_\alpha(x^{-1}) = [T_\alpha(x)]^{-1}$.

Além disso,

- (v) $T_{\beta\gamma}(x) = T_\beta(T_\gamma(x))$;
- (vi) Se $x \mid y$, então $T_\alpha(x) \mid T_\alpha(y)$.

Demonstração: Aplicação imediata da definição de conjugação. ■

Um subconjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$ é dito *invariante por conjugação* quando, para todo $\alpha \in \mathcal{M}$, $T_\alpha(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$.

5.2 Os Axiomas de Bachmann

Com a notação introduzida na seção anterior, consideremos o grupo (\mathcal{M}, \bullet) e suponhamos que ele admite um subconjunto gerador próprio $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$, invariante por conjugação e constituído apenas por involuções. Então, qualquer que seja o elemento de \mathcal{M} , ele se expressa como produto de um número finito de elementos em \mathcal{R} , ou de seus inversos. Nada impede que haja elementos em \mathcal{R} que também se expressem como produtos de outros elementos em \mathcal{R} .

As involuções que integram \mathcal{R} serão designadas por letras minúsculas. As involuções de \mathcal{M} que se expressam como produto de duas involuções de \mathcal{R} (ou seja, os elementos de \mathcal{M} da forma ab , sendo $a, b \in \mathcal{R}$ e $a \mid b$) serão designadas por letras maiúsculas.

Com estas convenções, são 5 os axiomas da Geometria Absoluta de Bachmann:

- (A1) Para todo par P, Q , existe g tal que $P, Q \mid g$.
- (A2) Se $P, Q \mid g, h$, então $P = Q$ ou $g = h$.
- (A3) Se $a, b, c \mid P$, então existe d tal que $abc = d$.
- (A4) Se $a, b, c \mid g$, então existe d tal que $abc = d$.
- (A5) Existem r, s, t tais que $r \mid s$, $r \nmid t$, $s \nmid t$ e $t \nmid rs$.

Os elementos de \mathcal{R} são denominados *retas*, ao passo que os produtos involutórios de retas (isto é, os elementos $P \in \mathcal{M}$ tais que $P = gh = hg$, para $h, g \in \mathcal{R}$) são denominados *pontos*. Nada impede que um elemento seja, ao mesmo tempo, ponto e reta. Neste caso, este elemento se denominará um *par polar*.

Duas retas $g, h \in \mathcal{R}$ são ditas *perpendiculares* quando $g \mid h$, fato este que notaremos por $g \perp h$.

Dizemos que uma reta g e um ponto P são *incidentes* quando $P \mid g$ e escreveremos, daqui em diante, $P \perp g$.

Fato Algébrico	Equivalente Geométrico
$r \in \mathcal{R}$	r é uma reta
$r, s \in \mathcal{R}, P = rs = sr$	P é um ponto
$r, s \in \mathcal{R}, rs = sr$	r é perpendicular a s
$r \in \mathcal{R}, Pr = rP$	P incide a r

Com estas novas designações, podemos reescrever os cinco axiomas:

- (A1) Para todo par de pontos P, Q , existe uma reta g tal que $P, Q \perp g$.
 (A2) Se $P, Q \perp g, h$, então $P = Q$ ou $g = h$.
 (A3) Se $P \perp a, b, c$, então existe d tal que $abc = d$.
 (A4) Se $g \perp a, b, c$, então existe d tal que $abc = d$.
 (A5) Existem três retas r, s, t tais que $r \perp s, r \not\perp t, s \not\perp t$ e $P \not\perp t$, onde $P = rs = sr$.

Os dois primeiros axiomas afirmam que, a dois pontos P e Q , incide sempre uma reta g , que será única se $P \neq Q$. A reta que liga P e Q será representada por (P, Q) . Não podemos, aqui, usar a notação convencional PQ , pois, neste contexto, ela designaria o produto do ponto P pelo ponto Q !

Os Axiomas (A3) e (A4) nada mais são do que o Primeiro e Segundo Teoremas das Três Reflexões, estudados no capítulo anterior.

O Axioma (A5) nos garante a existência de um triângulo retângulo: r, s são as retas suportes dos catetos e t é a reta suporte da hipotenusa.

É possível que existam retas $a, b, c \in \mathcal{R}$ tais que $abc = \mathbf{1}$. Portanto, $ab = c, bc = a$ e $ca = b$, sendo cada um dos produtos uma involução. As retas a, b, c são, portanto, duas a duas perpendiculares, constituindo o que se denomina um *triângulo polar*. Além disso, ab , como produto involutório de duas involuções, corresponde a um elemento $C \in \mathcal{M}$, de forma que $C = c$. Em outras palavras, um elemento é, ao mesmo tempo, ponto e reta, sendo denominados *polares* um em relação ao outro.

Teorema 5.2. *Sejam $\alpha \in \mathcal{M}$ e $T_\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ a transformação de conjugação por α . Então T_α leva retas em retas e pontos em pontos.*

Demonstração: Como \mathcal{R} é, por hipótese, um conjunto gerador invariante por conjugação, temos $T_\alpha(x) \in \mathcal{R}$ para todo $x \in \mathcal{R}$, ou seja, T_α leva retas em retas. Seja $P = ab = ba$ um ponto. Então

$$T_\alpha(P) = T_\alpha(a)T_\alpha(b) = T_\alpha(b)T_\alpha(a).$$

Logo, $T_\alpha(P)$ é um ponto, já que $T_\alpha(a)$ e $T_\alpha(b)$ são retas. ■

5.3 Primeiros Teoremas

Enunciaremos, nesta seção, as primeiras consequências dos Axiomas (A1)-(A5).

O primeiro teorema nos diz que, se a e b são retas perpendiculares, então as duas se encontram e ab é o ponto comum às duas.

Teorema 5.3 (*Perpendiculares se encontram*). $a \perp b$ e $P \perp a, b$ se, e somente se, $P = ab$.

Demonstração: (\Rightarrow) Como $a \perp b$, o produto ab é um ponto e, certamente, $ab \perp a, b$.

Como, por hipótese, $P \perp a, b$ e $a \neq b$, por (A2), temos que $P = ab$.

(\Leftarrow) De $P = ab$ segue que $Pa = b$, $Pb = a$ e $ab = P$, ou seja, cada um dos produtos Pa , Pb e ab é involutório, donde $a \perp b$ e $P \perp a, b$. ■

Teorema 5.4 (*Existência da perpendicular*). Para todo par P, g , existe sempre ℓ tal que $P \perp \ell$ e $\ell \perp g$.

Demonstração:

- Caso 1: $P \perp g$. Seja $P = ab$. Portanto, $P \perp a, b, g$ e, por (A3), existe ℓ tal que $abg = \ell$, ou seja, $Pg = \ell$, donde $P\ell$ e ℓg são involutórios. Logo, $P \perp \ell$ e $\ell \perp g$.
- Caso 2: $P \not\perp g$. Temos dois subcasos:
 - Caso 2a: $P \neq T_g(P)$. Por (A1), existe ℓ tal que $P, T_g(P) \perp \ell$. Portanto, $T_g(\ell) \perp T_g(P), T_g^2(P)$, ou seja, $T_g(\ell) \perp T_g(P), P$. Por (A2), $\ell = T_g(\ell)$, mas $\ell \neq g$, pois $P \perp \ell$ e $P \not\perp g$. Resta, então, $\ell \perp g$.
 - Caso 2b: $P = T_g(P)$. Logo, $P = gPg^{-1}$, ou seja, $Pg = gP$. Como $P \not\perp g$, esta igualdade só será satisfeita se $P = g$. Em outras palavras, P e g são polares. Neste caso, para qualquer c tal que $P \perp c$, teremos $c \perp g$ e vice-versa. Se $P = ab$, então $P \perp a, b$ e também $a, b \perp g$. Portanto, existem várias perpendiculares a g incidentes a P . ■

O próximo teorema nos diz que, se P e g não são polares, então a perpendicular a g incidente a P é única.

Teorema 5.5 (Unicidade da perpendicular). *Se $P \neq g$, $P \perp a, b$ e $a, b \perp g$, então $a = b$.*

Demonstração:

- Caso 1: $P \perp g$. Como $P \perp a, g$ e $a \perp g$, pelo Teorema 5.3, temos $P = ag$. Da mesma forma, $P = bg$, donde $ag = bg$ e, conseqüentemente, $a = b$.
- Caso 2: $P \not\perp g$. Como, por hipótese, $P \neq g$, temos $P \neq T_g(P)$. De $P \perp a, b$, segue que $T_g(P) \perp T_g(a), T_g(b)$. De $a, b \perp g$, segue que $T_g(a) = a$ e $T_g(b) = b$. Portanto, $P, T_g(P) \perp a, b$ e, por (A2), $a = b$. ■

Teorema 5.6. *Se $P \perp g$, então Pg é uma reta, a saber: a perpendicular a g levantada por P .*

Demonstração: Basta reunir os itens denominados Caso 1 nas provas dos dois teoremas anteriores. ■

Teorema 5.7 (Triângulos Polares). *$a \perp b$, $b \perp c$ e $a \perp c$ se, e somente se, $abc = 1$.*

Demonstração: Como corolário do Teorema 5.5, temos que, se $a \neq b$, $P \perp a, b$ e $g \perp a, b$, então $P = g$. Como $a \perp b$, podemos chamar $ab = P$ é um ponto. Portanto, $a \neq b$, $P \perp a, b$ e $c \perp a, b$ acarretam $P = c$, ou seja, $ab = c$, donde $abc = 1$. Para mostrar a recíproca, basta ver que $abc = 1$ implica $ab = c$, $ac = b$ e $bc = a$. ■

O Axioma (A5), que pressupõe a existência de um triângulo retângulo, nos fornece a existência de, pelo menos, 3 retas distintas e de, pelo menos, um ponto, já que duas dessas retas são perpendiculares. Utilizando este ponto especial, podemos provar que a toda reta incide pelo menos um ponto:

Teorema 5.8. *Para todo a , existe A tal que $A \perp a$.*

Demonstração: Por (A5), existe pelo menos um ponto P no plano, sendo $P = rs = sr$. Se $P \perp a$, basta tomarmos $A = P$. Do contrário, pelo Teorema 5.4, existe uma reta b tal que $P \perp b$ e $b \perp a$ e, pelo Teorema 5.3, $ab = ba = A$. ■

5.4 Outros Resultados

Por limitações de espaço, não poderemos nos estender muito além na dedução de mais teoremas da Geometria Absoluta. Se o fizéssemos, no entanto, o leitor iria

constatar uma certa repetição de algumas definições e teoremas já enunciados no final do capítulo anterior. Entretanto, as demonstrações aqui neste novo contexto axiomático exigem um cuidado adicional, que era desnecessário na Geometria Neutra: levar em conta a possibilidade de o plano ser elíptico, contendo um triângulo polar formado por três retas perpendiculares duas a duas. Apesar disso, a maioria dos enunciados se mantém idêntica aos dos teoremas já apresentados.

De início, apareceriam as recíprocas dos Axiomas (A3) e (A4), exatamente como, no Capítulo 4, surgiram as recíprocas do Primeiro e Segundo Teoremas das Três Reflexões:

- Se $P \perp a, b, c$ e $abc = d$, então $P \perp d$.
- Se $a \neq b$ e $P \perp a, b$ e $abc = d$, então $P \perp c$.
- Se $g \perp a, b, c$ e $abc = d$, então $d \perp g$.
- Se $a \neq b$ e $g \perp a, b$ e $abc = d$, então $c \perp g$.

Em continuação, introduziríamos a relação *estar em feixe*, análoga à definição de feixes de retas. Na Geometria Absoluta, três retas $a, b, c \in \mathcal{R}$ estão em feixe quando abc é também uma reta. Surgirão, igualmente, três espécies de feixes, de acordo com o elemento comum entre as retas a, b :

- se existe um ponto P tal que $P \perp a, b$, então toda reta c em feixe com a e b será também incidente a P ;
- se existe uma reta s tal que $s \perp a, b$, então a reta c em feixe com a e b será também perpendicular a s ;
- a e b não precisam obrigatoriamente ter um ponto P ou uma perpendicular comum.

O Teorema de Hjelmslev (4.18), que estabelece a condição necessária e suficiente para que dois feixes de retas possuam uma reta em comum, tem, na Geometria Absoluta, idêntico enunciado:

Teorema 5.9 (Teorema de Hjelmslev). *Sejam $A \neq C$, $aa' = A$, $cc' = C$ e $abc = d \in \mathcal{R}$. Então $a'bc' = d' \in \mathcal{R}$ se, e somente se, $d \perp v$, sendo $A, C \perp v$.*

Do Teorema de Hjelmslev, deduzem-se os principais resultados sobre produtos de elementos de \mathcal{M} , análogos aos obtidos na análise que fizemos de movimentos pares e ímpares, na Seção 4.9:

- Todo produto da forma uvW equivale a um produto da forma ab (corresponde ao Lema 4.7);

- Todo produto da forma uvw equivale a um produto da forma aB (corresponde ao Lema 4.8);
- Todo produto de um número par de 2 ou mais retas equivale a um produto da forma ab ;
- Todo produto de um número ímpar de 3 ou mais retas equivale a um produto da forma aB .

Os dois últimos itens correspondem à aplicação iterada do Teorema da Redução (4.20).

Diferentemente do que acontecia na Geometria Neutra, aqui pode ocorrer que o produto de um número par de retas equivalha a um produto de um número ímpar de retas, bastando para isso que o plano seja elíptico. Neste caso, existem elementos no grupo que são, a um tempo, retas e pontos, não sendo possível classificar os movimentos em pares e ímpares.

Quanto à existência de pontos e retas, na Geometria Neutra, o Axioma (I3) nos assegura a presença de 3 pontos não colineares no plano, donde a existência de três retas que não possuem um ponto comum era consequência imediata. Na Geometria Absoluta, o Axioma (A5) pressupõe a existência de três retas distintas formando um triângulo retângulo. Com algum algebrismo, é possível deduzir o seguinte teorema:

Teorema 5.10. *A cada reta incidem, pelo menos, 3 pontos distintos. A cada ponto incidem, pelo menos, 4 retas distintas.*

5.5 Geometrias Derivadas

Em seu livro *Geometry: An Introduction*, de 1971 ([7]), o alemão Günter Ewald desenvolve uma geometria equivalente à de Bachmann, partindo de um conjunto de axiomas distinto em número e enunciado do original que aqui utilizamos. Todos os resultados ali descritos já apareciam na primeira versão de 1959 do livro de Bachmann. Ewald, no entanto, tem o cuidado de prover cada afirmação de uma interpretação geométrica visualizável, que facilita a leitura e a compreensão.

A Geometria Absoluta não é categórica, na medida em que admite modelos totalmente diversos e não isomorfos, inclusive finitos.

A partir dos 5 axiomas aqui mostrados, obtêm-se as Geometrias Euclidiana e Hiperbólica mediante a introdução do conceito de ordem (com 4 axiomas semelhantes aos Axiomas de Ordem da Geometria Neutra), dos respectivos Axiomas de Paralelismo (Euclidiano e Hiperbólico) e do Axioma de Continuidade.

Geometrias Elípticas, em que não existem paralelas, decorrem da Absoluta pela introdução de um axioma especial: o que assegura a existência de um triângulo polar, consistindo de três retas perpendiculares duas a duas.

Bibliografia

- [1] F. Bachmann, “Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff”, 2ª edição ampliada, Springer-Verlag, Berlin, Alemanha, 1973.
- [2] F. Bachmann, Eine Begründung der absoluten Geometrie in der Ebene, *Mathematische Annalen*, **113** (1936), 424-451.
- [3] G. Birkhoff, S. MacLane, “A Survey of Modern Algebra”, edição revisada, The Macmillan Company, New York, 1953.
- [4] B. Castrucci, “Fundamentos da Geometria: Estudo Axiomático do Plano Euclidiano”, LTC, Rio de Janeiro, 1978.
- [5] J. L. R. D’Alembert, “Essai sur les Eléments de Philosophie”, 1759, Fayard, 1986.
- [6] M. Dehn, “Die Legendre’schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck: Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürde der hohen philosophischen Fakultät der Georgs-Augusts-Universität zu Göttingen”, Tese de Doutorado, B. G. Teubner, Leipzig, 1900.
- [7] G. Ewald, “Geometry: an Introduction”, Wadsworth Publ. Co., Belmont, California, EUA, 1971.
- [8] Euclides, “Os Elementos”, Tradução do Prof. Irineu Bicudo, Ed. UNESP, São Paulo, 2009.
- [9] M. J. Greenberg, “Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History”, W. H. Freeman, New York, 2007.
- [10] R. Hartshorne, “Geometry: Euclid and Beyond”, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [11] T. L. Heath, “Euclid’s Elements”, Green Lion Press, 2002.

- [12] T. L. Heath, “Euclid - The Thirteen Books of The Elements”, vol. 1 (Books I and II), Dover Publications, New York, 2^a. ed., 1956.
- [13] G. Hessenberg, J. Diller, “Grundlagen der Geometrie”, Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1967.
- [14] M. Henle, “Modern Geometries: Non-Euclidean, Projective and Discrete”, Prentice-Hall, 2001.
- [15] D. Hilbert, “Fundamentos da Geometria”, Gradiva, Lisboa, 2003.
- [16] D. Hilbert, “Grundlagen der Geometrie”, 10^a ed, Teubner, Stuttgart, Alemanha, 1987.
- [17] J. Hjelmslev, Neue Begründung der Ebene Geometrie, *Mathematische Annalen*, **64** (1907), 449-474.
- [18] A.-M. Legendre, “Elementos de Geometria”, Tradução de M. F. Guimarães, revista e atualizada pelo Prof. L. C. Guimarães, Editora LIMC-UFRJ, 2009.
- [19] G. E. Martin, “The Foundations of Geometry and the non-Euclidean Plane”, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [20] G. E. Runion, J. R. Lockwood, “Deductive Systems: Finite and Non-Euclidean Geometries”, National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1978.
- [21] G. Saccheri, G. B. Halsted, “Girolamo Saccheri’s Euclides Vindicatus”, Chelsea Publishing Company, 1986.

Índice

- Ângulo, 35
 - bissetriz de um, 63
 - interior do, 36
 - lados do, 35
- Ângulos
 - agudos, 51
 - axiomas de congruência entre, 42
 - desigualdades entre, 49
 - diferença entre, 49
 - obtusos, 51
 - opostos pelo vértice, 44
 - relação $<$ entre, 49
 - retos, 51
 - congruência de todos os, 52
 - soma de, 47
 - suplementares, 44
 - verticalmente opostos, 44
- Ângulos Retos
 - existência de, 53
- Axioma
 - de Pasch, 23
 - ou *exclusivo*, 25
 - contrapositiva do, 23
 - variante do, 23
- Axiomas
 - de congruência entre ângulos, 42
 - de congruência entre segmentos, 37
 - de incidência, 18
 - de ordem, 22
 - independência, 21
 - independência dos, 14
- Bissetriz, 63
- Classes de Equivalência, 38
- Equivalência
 - classes de, 30
 - relação de, 29
 - congruência entre ângulos, 43
 - congruência entre segmentos, 38
- Geometria Neutra no Plano, 17
 - finita, 17
 - infinita, 17
- Perpendicular
 - unicidade da, 55
- Plano, 17
 - de Hilbert, 18
- Pons Asinorum, 56
- Ponto Médio, 61
- Pontos, 17
- Quadriláteros, 70
 - birretângulos, 70
 - de Saccheri, 70
- Quadriláteros de Saccheri
 - ângulos do topo de um, 71
 - segmento médio de um, 71
- Relação
 - Estar Entre*, 22
- Reta
 - cardinalidade da, 34

- lados de uma, 31
- Teorema da Ordenação de n Pontos, 34
- Retas, 17
 - paralelas, 64
 - perpendicular comum, 65
 - perpendiculares, 53
- Segmento, 28
 - divisão de um, 61
 - extremos de um, 28
 - interior de um, 28
 - mediatriz de um, 63
 - ponto médio de um, 61
- Segmentos
 - desigualdades entre, 41
 - livres, 38
 - relação $<$ entre, 41
 - soma de, 40
- Semirreta, 35
 - no interior do ângulo, 36
- Separação
 - da Reta, 32, 35
 - do Plano, 31
- Sistema Axiomático, 10
 - axioma, 10
 - categorico, 15
 - completude, 15
 - consistente, 14
 - independente, 14
 - modelo para um, 11, 19
 - teorema, 10
 - termos definidos, 10
 - termos indefinidos, 10
- Teorema
 - da Separação da Reta, 32
 - da Separação do Plano, 31
 - da Trave, 36
 - do Ângulo Externo, 54
- Triângulo, 53
 - ângulos externos de um, 53
 - isósceles, 56
 - caracterização de, 56
 - lados de um, 53
 - quadrilátero de Saccheri associado a um, 78
 - retângulo, 60
 - vértices de um, 53
- Triângulos
 - congruência de, 59
 - caso ALA, 59
 - caso ALA_o, 60
 - caso ARLL, 60
 - caso LAL, 59
 - caso LLL, 61
- Triangulos
 - desigualdade triangular, 58