

Volume 64, 2012

Editores

Cassio Machiaveli Oishi

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Presidente Prudente, SP, Brasil

Fernando Rodrigo Rafaeli

Universidade Estadual Paulista - UNESP
São José do Rio Preto, SP, Brasil

Rosana Sueli da Motta Jafelice (Editor Chefe)

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Uberlândia, MG, Brasil

Rubens de Figueiredo Camargo

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Bauru, SP, Brasil

Sezimária de Fátima P. Saramago

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Uberlândia, MG, Brasil

Vanessa Avansini Botta Pirani (Editor Adjunto)

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Presidente Prudente, SP, Brasil



A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7)**, **as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
<http://www.sbmac.org.br/notas.php>

INTRODUÇÃO AOS POLINÔMIOS ORTOGONAIS

Eliana Xavier Linhares de Andrade
eliana@ibilce.unesp.br

Cleonice Fátima Bracciali
cleonice@ibilce.unesp.br

Fernando Rodrigo Rafaeli
rafaeli@ibilce.unesp.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2012

Coordenação Editorial: Elbert Einstein Nehrer Macau

Coordenação Editorial da Série: Rosana Sueli da Motta Jafelice

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2012 by Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali e Fernando Rodrigo Rafaeli.

Direitos reservados, 2012 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

Andrade, Eliana X. L.

Introdução aos Polinômios Ortogonais - São Carlos, SP :
SBMAC, 2012, 144 p., 20.5 cm - (Notas em Matemática
Aplicada; v. 64)

e-ISBN 978-85-8215-015-3

1. Polinômios Ortogonais 2. Relação de Recorrência
3. Fórmulas de Quadratura 4. Quadratura Gaussiana
I. Andrade, Eliana X. L. II. Bracciali, Cleonice F. III. Rafaeli,
Fernando R. IV. Título. V. Série

CDD - 51

Aos meus netinhos Felipe e Sofia
exla

À minha família
cfb

A meus pais Dionísio e Marlene
frr

Agradecimentos

Queremos registrar nossos agradecimentos a todos os alunos que participaram dos seminários sobre polinômios ortogonais e frações contínuas que vêm ocorrendo já há muitos anos no IBILCE/UNESP, sempre sob a coordenação de um dos docentes do Grupo de Pesquisa em Polinômios Ortogonais e Similares. Para esses seminários, os alunos utilizam uma apostila preparada pelas duas primeiras autoras e que vem sendo aprimorada ao longo dos anos com o auxílio dos relatórios dos estudantes, incluindo novos tópicos e melhorando os existentes. Essa apostila foi a base para este livro.

Conteúdo

Prefácio	11
1 Pré-requisitos	13
1.1 Alguns Pré-requisitos da Álgebra Linear	13
1.1.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt	18
1.2 Funções Gama e Beta	20
1.3 Interpolação Polinomial	25
1.3.1 Fórmula de Lagrange para o Polinômio de Interpolação	30
1.3.2 Polinômio de Interpolação de Hermite	32
1.4 Fórmulas de Quadratura Interpolatórias	36
1.4.1 Fórmulas Fechadas de Newton-Côtes	39
1.5 Integral de Riemann-Stieltjes	41
1.5.1 Integral de Riemann	41
1.5.2 Integral de Riemann-Stieltjes	42
1.5.3 Distribuições	45
1.6 Exercícios	46
2 Polinômios Ortogonais	51
2.1 Sequência de Polinômios Ortogonais	51
2.2 Propriedades Gerais dos Polinômios Ortogonais	53
2.3 Zeros dos Polinômios Ortogonais	69
2.4 Polinômios Ortogonais Simétricos	72
2.5 Polinômios Ortogonais Clássicos	74

2.5.1	Polinômios de Jacobi, Legendre, Chebyshev e Gegenbauer	75
2.5.2	Polinômios de Laguerre	96
2.5.3	Polinômios de Hermite	102
2.6	Exercícios	104
3	Quadratura Gaussiana	109
3.1	Introdução	109
3.2	Fórmulas de Quadratura Gaussianas	110
3.3	Exemplos	118
3.3.1	Fórmulas de Quadratura de Gauss-Legendre	118
3.3.2	Fórmulas de Quadratura de Gauss-Chebyshev	120
3.4	Exercícios	122
	Apêndice 1	125
	Apêndice 2	129
	Apêndice 3	133
	Apêndice 4	137
	Bibliografia	139

Prefácio

A teoria de polinômios ortogonais tem vasta aplicação em todos os tipos de problemas da Matemática Pura e Ciências Aplicadas. Esses polinômios são ferramentas essenciais para a solução de muitos problemas e vêm contribuindo nos estudos relacionados a equações diferenciais, frações contínuas, estabilidade numérica, algoritmos rápidos e super-rápidos dentre outros, com aplicações que abrangem da Teoria dos Números à Teoria da Aproximação, da Combinatória à Representação de Grupos, da Mecânica Quântica à Física Estatística e da Teoria de Sistemas ao Processamento de Sinais.

Nosso objetivo principal ao escrever este livro é oferecer aos estudantes de graduação e mesmo de pós-graduação da área de Ciências Exatas um texto introdutório sobre a Teoria dos Polinômios Ortogonais, destacando aqueles conhecidos como Polinômios Ortogonais Clássicos. Como aplicação, apresentamos um estudo bastante detalhado das Fórmulas de Quadratura Gaussianas. Ao término de cada capítulo, incluímos uma lista de exercícios. Uma extensa bibliografia sobre o assunto foi anexada ao final do texto.

São José do Rio Preto, março de 2012.

Eliana X. L. de Andrade
Cleonice F. Bracciali
Fernando R. Rafaeli

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo, daremos algumas definições e resultados da Álgebra Linear e da Análise Matemática que serão importantes para o bom entendimento dos tópicos desenvolvidos neste texto.

1.1 Alguns Pré-requisitos da Álgebra Linear

Para um estudo mais detalhado sobre os tópicos abordados nesta seção, sugerimos os livros [11, 14, 15, 16, 17, 19, 22].

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de dimensão $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Se A possui n linhas e colunas, dizemos que ela é uma matriz quadrada de ordem n . A transposta $A^t = [a_{ij}^t]$ de uma matriz $A = [a_{ij}]$, $m \times n$, é a matriz $n \times m$ tal que $a_{ij}^t = a_{ji}$. Quando uma matriz quadrada é tal que $A^t = A$, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$, dizemos que A é simétrica.

Uma matriz real é aquela cujos elementos são todos reais. Uma matriz complexa tem elementos que podem ser complexos. Uma matriz imaginária tem elementos que são todos imaginários puros ou nulos.

Usaremos o símbolo $\bar{A} = [\bar{a}_{i,j}]$ para representar a matriz cujos elementos são os conjugados complexos dos elementos de A , isto é, $\bar{a}_{i,j} = \overline{a_{i,j}}$. A transposta hermitiana de uma matriz A é a matriz $A^h = \bar{A}^t$. Uma matriz hermitiana é uma matriz tal que $A^h = A$.

Passemos, agora, à definição de espaço vetorial, conceito que será bastante utilizado neste texto.

Definição 1.1. Um espaço vetorial sobre K é um conjunto V onde estão definidas duas operações: $V \times V \xrightarrow{+} V$ (soma) e $K \times V \xrightarrow{\cdot} V$ (multiplicação por escalar) tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

- a) i) $u + v \in V$, para todo $u, v \in V$;
 ii) $u + v = v + u$, para todo $u, v \in V$ (comutativa);
 iii) $u + (v + w) = (u + v) + w$, para todo $u, v, w \in V$ (associativa);
 iv) existe um elemento $0 \in V$, tal que $u + 0 = u$ para todo $u \in V$ (elemento neutro);
 v) para todo $v \in V$ existe um elemento $(-v) \in V$, tal que $v + (-v) = 0$ (elemento inverso);
- b) i) $\alpha \cdot v \in V$, para todo $v \in V$ e $\alpha \in K$;
 ii) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, para todo $u, v \in V$ e $\alpha \in K$;
 iii) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$, para todo $v \in V$ e $\alpha, \beta \in K$;
 iv) $\alpha \cdot (\beta v) = (\alpha\beta) \cdot v$, para todo $v \in V$ e $\alpha, \beta \in K$;
 v) existe um elemento $1 \in K$, tal que $1 \cdot v = v$, para todo $v \in V$.

Daqui por diante, denotaremos a operação de multiplicação por escalar, $\alpha \cdot v$, apenas por αv , para $\forall \alpha \in K$ e $v \in V$.

Observações:

1. Se $K = \mathbb{R}$, então V é chamado *espaço vetorial real*.
2. O elemento v de um espaço vetorial V é chamado *vetor*.
3. O elemento α de K é chamado *escalar*.

Definição 1.2. Seja V um espaço vetorial sobre K . Um produto interno (ou produto escalar) sobre V é uma aplicação $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ de $V \times V$ em K , para o qual se verificam as seguintes condições, para todo $u, v, w \in V$ e todo escalar $\alpha \in K$:

- i) $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$;

$$ii) \langle \alpha u, v \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle;$$

$$iii) \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle};$$

$$iv) \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.$$

Exemplo 1.1. O produto escalar usual de vetores no espaço \mathbb{R}^3 é definido por

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle u, v \rangle &\mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \end{aligned}$$

onde $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$.

Deixamos a cargo do leitor a demonstração desse fato.

Definição 1.3. Seja A uma matriz hermitiana. Dizemos que A é positiva-definida se $\langle x, Ax \rangle > 0$ para todo $x \neq 0$, semi positiva-definida se $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ para todo x , e A é chamada indefinida se $\langle x, Ax \rangle$ é positivo para certos valores de x e negativo para outros.

Definição 1.4. Seja V um espaço vetorial sobre K . Uma norma vetorial de v é um número não negativo, representado por $\|v\|$, que, para todo $u, v \in V$ e $\lambda \in K$, satisfaz

$$i) \|v\| \geq 0 \text{ e } \|v\| = 0 \iff v = 0;$$

$$ii) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (desigualdade triangular);}$$

$$iii) \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|.$$

Em termos do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, podemos definir

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Definição 1.5. Seja V um espaço vetorial com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que dois vetores u e v de V são ortogonais com relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Consideremos, agora, o espaço vetorial $V = C[a, b]$ (espaço das funções contínuas em um intervalo (a, b)) e $K = \mathbb{R}$. Suponhamos $w(x) \geq 0$ (mas não identicamente nula) em um intervalo real (a, b) , onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Seja o produto interno definido em $C[a, b]$ por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx, \quad (1.1.1)$$

onde $f, g \in C[a, b]$.

Podemos mostrar que as propriedades da Definição 1.2 são válidas para o produto interno (1.1.1) (veja Exercício 1.3).

Definição 1.6. *Sejam V um espaço vetorial sobre K , $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$. Então, o vetor*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

é um elemento de V chamado de combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n .

Definição 1.7. *Considere os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ fixos. O conjunto W de todos os vetores de V que são combinações lineares de v_1, v_2, \dots, v_n é chamado subespaço gerado por v_1, v_2, \dots, v_n e denotado por $W = \overline{[v_1, v_2, \dots, v_n]}$, ou seja,*

$$\begin{aligned} W &= \overline{[v_1, v_2, \dots, v_n]} \\ &= \{v \in V \mid v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n, a_i \in K, 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Definição 1.8. *Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (l.i.), ou que os vetores são l.i., se a equação*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

implica em $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

No caso em que existir algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente (l.d.) ou que os vetores são l.d..

Um exemplo bastante interessante de um conjunto de vetores l.i. é a seguinte proposição.

Proposição 1.1. *Seja $\{Q_j(x)\}_{j=0}^n$, $n > 0$, uma sequência de polinômios, onde $Q_j(x)$ é de grau exatamente j . Então, esses polinômios são l.i..*

Demonstração: Vamos denotar $Q_j(x) = \sum_{k=0}^j a_{j,k}x^k$, onde $a_{j,j} \neq 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Sejam c_j , $j = 0, 1, \dots, n$, constantes reais tais que

$$\sum_{j=0}^n c_j Q_j(x) = 0. \quad (1.1.2)$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j c_j a_{j,k} x^k = 0,$$

cujo lado esquerdo é um polinômio de grau n . Igualando ambos os membros termo a termo, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcccccc} c_0 a_{0,0} & + & c_1 a_{1,0} & + \cdots + & c_{n-1} a_{n-1,0} & + & c_n a_{n,0} & = & 0 \\ & & c_1 a_{1,1} & + \cdots + & c_{n-1} a_{n-1,1} & + & c_n a_{n,1} & = & 0 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & c_{n-1} a_{n-1,n-1} & + & c_n a_{n,n-1} & = & 0 \\ & & & & & & c_n a_{n,n} & = & 0 \end{array} \right. .$$

Note que todos os elementos da diagonal principal da matriz dos coeficientes são não nulos. Logo, seu determinante é diferente de 0 e, então, o sistema de equações lineares homogêneo acima tem solução única, a trivial. Assim, a única solução para (1.1.2) é $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$. Portanto, os polinômios $Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x)$ são l.i. e formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq n$ (\mathbb{P}_n). ■

Uma importante propriedade de vetores ortogonais entre si é o resultado a seguir.

Teorema 1.1. *Sejam u_1, u_2, \dots, u_n ortogonais entre si. Então, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é l.i..*

Demonstração: Como u_1, u_2, \dots, u_n são ortogonais entre si, então $\langle u_i, u_j \rangle = 0 \forall i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$. Seja

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0.$$

Então,

$$\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n, u_i \rangle = \langle 0, u_i \rangle = 0.$$

Usando as propriedades de produto interno, obtemos

$$\alpha_1 \langle u_1, u_i \rangle + \alpha_2 \langle u_2, u_i \rangle + \dots + \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle + \dots + \alpha_n \langle u_n, u_i \rangle = 0.$$

Como os vetores $u_k, k = 1, 2, \dots, n$, são ortogonais entre si, pela Definição 1.5 concluímos que

$$\alpha_i \langle u_i, u_i \rangle = 0 \implies \alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, u_1, u_2, \dots, u_n são l.i.. ■

Definição 1.9. *Seja V um espaço vetorial. Um conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vetores de V é uma base de V se*

i) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é l.i.;

ii) $\overline{[v_1, v_2, \dots, v_n]} = V$.

1.1.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Utilizamos este processo para, a partir de uma base de um espaço vetorial V com corpo K , construir uma nova base ortogonal.

Consideremos a base $\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_j, \dots\}$ de V , o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\alpha_{i,j} \in K \forall i, j$. Para construirmos a nova base ortogonal $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_j, \dots\}$, procedemos da seguinte forma.

1. O primeiro vetor da nova base é dado por

$$u_1 = b_1.$$

2. Para determinarmos o segundo vetor, tomamos

$$u_2 = b_2 + \alpha_{2,1}u_1$$

e determinamos o valor de $\alpha_{2,1}$ de modo que u_1 seja ortogonal a u_2 , isto é,

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 0.$$

Logo,

$$\langle u_1, b_2 + \alpha_{2,1}u_1 \rangle = 0 \implies \alpha_{2,1} = -\frac{\langle u_1, b_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}.$$

3. Para determinarmos o terceiro vetor da nova base, definimos

$$u_3 = b_3 + \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2$$

e determinamos $\alpha_{3,1}$ e $\alpha_{3,2}$ de modo que u_1 e u_2 sejam ortogonais a u_3 , isto é,

$$\langle u_1, u_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle u_2, u_3 \rangle = 0.$$

Logo,

$$\langle u_1, b_3 + \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle u_2, b_3 + \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2 \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\alpha_{3,1} = -\frac{\langle u_1, b_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \quad \text{e} \quad \alpha_{3,2} = -\frac{\langle u_2, b_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle}.$$

Procedendo da mesma forma, determinamos o j -ésimo vetor. Assim,

$$u_j = b_j + \alpha_{j,1}u_1 + \alpha_{j,2}u_2 + \dots + \alpha_{j,j-1}u_{j-1}$$

e determinamos os valores de $\alpha_{j,k}$, $k = 1, 2, \dots, j-1$, de modo que u_1, u_2, \dots, u_{j-1} sejam ortogonais a u_j , isto é,

$$\langle u_k, u_j \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots, j-1.$$

Logo,

$$\left\langle u_k, b_j + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{j,i}u_i \right\rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots, j-1.$$

Portanto, para $j = 1, 2, 3, \dots$, a nova base ortogonal é dada, em termos da base antiga, por

$$u_j = b_j + \alpha_{j,1}u_1 + \alpha_{j,2}u_2 + \dots + \alpha_{j,j-1}u_{j-1},$$

onde

$$\alpha_{j,k} = -\frac{\langle u_k, b_j \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}, \quad k = 1, 2, \dots, j-1.$$

Exemplo 1.2. *Seja o produto interno*

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)xdx,$$

onde p e q são polinômios. Consideremos $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$ uma base de \mathbb{P}_2 . Então, $u_1 = b_1 = 1$.

$$\begin{aligned} u_2 &= b_2 - \frac{\langle u_1, b_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = x - \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 x dx} = x - \frac{2}{3}. \\ u_3 &= b_3 - \frac{\langle u_1, b_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, b_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 \\ &= x^2 - \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x dx} - \left(x - \frac{2}{3}\right) \frac{\int_0^1 (x - \frac{2}{3})x^3 dx}{\int_0^1 (x - \frac{2}{3})^2 x dx} \\ &= x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Logo $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortogonal para \mathbb{P}_2 .

1.2 Funções Gama e Beta

Nesta seção, estudaremos as definições e algumas propriedades das funções Gama e Beta, apenas o suficiente para o bom entendimento

dos tópicos estudados nos próximos capítulos. Para mais detalhes sobre essas e outras funções especiais, consulte os textos [3, 23, 26].

A função Gama, $\Gamma(x)$, foi descoberta por Euler por volta de 1729 (veja [3]) no estudo do problema de estender o domínio da função fatorial.

Para encontrar a generalização do fatorial de Euler, suponhamos $x \geq 0$ e $n \geq 0$ números inteiros. Consideremos o número

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1), & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

conhecido por *fatorial deslocado* ou *fatorial generalizado* ou, ainda, *símbolo de Pochhammer*, onde a pode ser um número real ou complexo. Podemos, então, escrever (veja Exercício 1.4)

$$x! = \frac{(x+n)!}{(x+1)_n}.$$

Mas,

$$(x+n)! = (1)(2) \cdots (n-1)(n)(n+1) \cdots (n+x) = n!(n+1)_x$$

e, assim,

$$x! = \frac{n!(n+1)_x}{(x+1)_n} = \frac{n!n^x}{(x+1)_n} \frac{(n+1)_x}{n^x}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)_x}{n^x} = 1$, podemos concluir que

$$x! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n}. \quad (1.2.1)$$

Observe que, se x é um número complexo, mas diferente de um inteiro negativo, então o limite (1.2.1) existe e o chamamos de

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n},$$

para $x \in \mathbb{C}$ e $x \neq -1, -2, \dots$.

Note que, se x é inteiro positivo, então $\Gamma(x+1) = x!$ e $\Gamma(1) = 1$.

Assim, obtemos uma definição para a função Gama.

Definição 1.10. A função Gama pode ser definida, para $x \in \mathbb{C}$ e $x \neq -1, -2, \dots$, como

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x-1}}{(x)_n},$$

onde $(x)_n = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)$.

Da definição acima, podemos mostrar a seguinte propriedade.

Propriedade 1.1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} x\Gamma(x) &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x-1}}{(x)_n} \\ &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)} \frac{(x+n)n}{(x+n)n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)(x+n)} \frac{(x+n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n} = \Gamma(x+1). \end{aligned}$$

■

Enunciaremos, agora, uma propriedade da função Gama que também pode ser utilizada como sua definição.

Propriedade 1.2. A função Gama também pode ser dada como a integral de Euler de segunda espécie

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad (1.2.2)$$

para $x \in \mathbb{C}$ e $\operatorname{Re}(x) > 0$.

A partir da definição anterior, podemos demonstrar a seguinte importante propriedade.

Propriedade 1.3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Demonstração: Aplicando (1.2.2) em $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ e a mudança de variáveis $t = z^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^\infty e^{-z^2} z^{-1} 2z dz = 2 \int_0^\infty e^{-z^2} dz \\ &= 2 \left\{ \int_0^\infty e^{-z^2} dz \int_0^\infty e^{-y^2} dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(z^2+y^2)} dz dy \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Resolvendo a última integral dupla por meio de coordenadas polares ($z = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$) e, em seguida, fazendo $r^2 = u$, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} = 2 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{2} d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-e^{-u} \Big|_0^\infty \right) d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} = 2 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

■

Outras interessantes propriedades da função Gama serão enunciadas a seguir e as demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas no início da sessão.

Propriedade 1.4 (Fórmula de reflexão de Euler).

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}, \quad 0 < \operatorname{Re}(x) < 1.$$

Propriedade 1.5. $\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\operatorname{cos}(\pi x)}$, com $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(x) < \frac{1}{2}$.

Propriedade 1.6. $\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$, com $x \in \mathbb{Z}^+$.

A seguir, daremos a definição e algumas propriedades da função Beta que serão importantes no contexto deste livro.

Definição 1.11. A função Beta é definida, para $x, y \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(x) > 0$ e $\operatorname{Re}(y) > 0$, por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad (1.2.3)$$

conhecida como integral de Euler de primeira espécie.

Propriedade 1.7. A função Beta também pode ser dada pela seguinte integral:

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt,$$

para $x, y \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(x) > 0$ e $\operatorname{Re}(y) > 0$.

Demonstração: Substituindo t por $\frac{u}{u+1}$ em (1.2.3), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{u+1}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{u}{u+1}\right)^{y-1} \frac{du}{(1+u)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x-1+y-1+2}} du \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.2. A função Beta pode ser escrita, em termos da função Gama, da seguinte forma

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Demonstração: A maneira clássica de se mostrar este resultado é utilizando a relação (1.2.2) como definição da função $\Gamma(x)$ e mostrar que $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x, y)$ como faremos a seguir.

Usando a equação (1.2.2) em $\Gamma(x)\Gamma(y)$, temos

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du \int_0^\infty e^{-v}v^{y-1}dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u+v)}u^{x-1}v^{y-1}dudv.\end{aligned}$$

Fazendo $u = t^2$ e $v = z^2$ na última integral acima, obtemos

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u+v)}u^{x-1}v^{y-1}dudv = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t^2+z^2)}t^{2x-1}z^{2y-1}dtdz.$$

Para resolver a última integral dupla, usamos coordenadas polares ($t = r\cos\theta$ e $z = r\sin\theta$) e, em seguida, mudança de variáveis. Com isso, obtemos o resultado desejado. ■

Notação: Para $x > 0$ e $y > 0$, vamos utilizar, em várias oportunidades deste texto, a notação

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}.$$

Para n inteiro e $x > 0$, vamos também usar a notação

$$\binom{x}{n} = \frac{\Gamma(x+1)}{n!\Gamma(x-n+1)}.$$

1.3 Interpolação Polinomial

Nesta seção vamos considerar o problema de aproximar funções por uma classe de funções mais simples. Há duas razões principais para se fazer uso da aproximação de funções. Uma é substituir funções complicadas por um conjunto de funções mais simples de modo que possamos realizar operações, tais como diferenciação e integração, mais facilmente. A outra e a mais importante é na interpolação de tabelas, isto é, quando conhecemos a função em um conjunto de pontos e desejamos avaliá-la em um outro ponto fora desse conjunto. As funções

mais usadas para interpolação são as polinomiais, as trigonométricas, as exponenciais e as racionais. Usaremos, aqui, as polinomiais que são as mais adequadas aos nossos propósitos. Referimo-nos aos textos [5, 7, 8, 24] para maiores detalhes sobre este assunto.

Sejam $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$, $n + 1$ pontos de um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definição 1.12. Chamamos de *Matriz de Vandermonde* a matriz da forma

$$\mathcal{V}(x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}) = \begin{pmatrix} 1 & x_{n,0} & x_{n,0}^2 & \dots & x_{n,0}^n \\ 1 & x_{n,1} & x_{n,1}^2 & \dots & x_{n,1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n,n} & x_{n,n}^2 & \dots & x_{n,n}^n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Denotemos por $\mathbf{V}(x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n})$ o determinante da matriz de Vandermonde $\mathcal{V}(x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n})$.

Um resultado bastante conhecido da Álgebra Linear é o seguinte

Teorema 1.3. *O determinante de Vandermonde $\mathbf{V}(x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n})$ satisfaz*

$$\mathbf{V}(x_{n,0}, \dots, x_{n,n}) = \prod_{\substack{i=1 \\ 0 \leq j < i}}^n (x_{n,i} - x_{n,j}) = \prod_{i=1}^n \left[\prod_{j=0}^{i-1} (x_{n,i} - x_{n,j}) \right].$$

Demonstração: Consideremos o determinante de Vandermonde

$$\mathbf{V}(x_{n,0}, \dots, x_{n,n}) = \begin{vmatrix} 1 & x_{n,0} & x_{n,0}^2 & \dots & x_{n,0}^{n-1} & x_{n,0}^n \\ 1 & x_{n,1} & x_{n,1}^2 & \dots & x_{n,1}^{n-1} & x_{n,1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n,n} & x_{n,n}^2 & \dots & x_{n,n}^{n-1} & x_{n,n}^n \end{vmatrix}$$

e a função

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \mathbf{V}(x_{n,0}, \dots, x_{n,n-1}, x) \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & x_{n,0} & x_{n,0}^2 & \cdots & x_{n,0}^{n-1} & x_{n,0}^n \\ 1 & x_{n,1} & x_{n,1}^2 & \cdots & x_{n,1}^{n-1} & x_{n,1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n,n-1} & x_{n,n-1}^2 & \cdots & x_{n,n-1}^{n-1} & x_{n,n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Observe que $V(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n . Se substituirmos x por $x_{n,0}$, a primeira e a última linhas tornam-se iguais. Logo, $V(x_{n,0}) = 0$. Isto se verifica igualmente para os pontos $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n-1}$. Portanto, $x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n-1}$ são as n raízes de $V(x)$. Daí, podemos escrever

$$\mathbf{V}(x_{n,0}, \dots, x_{n,n-1}, x) = a_{n,n}(x - x_{n,0})(x - x_{n,1}) \dots (x - x_{n,n-1}),$$

onde $a_{n,n}$ é o coeficiente do termo de maior grau x^n . Se desenvolvermos o determinante $V(x)$ pela última linha, observamos que $a_{n,n} = \mathbf{V}(x_{n,0}, \dots, x_{n,n-1})$. Então,

$$\mathbf{V}(x_{n,0}, \dots, x_{n,n-1}, x) = \mathbf{V}(x_{n,0}, \dots, x_{n,n-1})(x - x_{n,0}) \dots (x - x_{n,n-1}).$$

Fazendo $x = x_{n,n}$ e denotando $\mathbf{V}(x_{n,0}, \dots, x_{n,n-1}, x_{n,n})$ por $\tilde{\mathbf{V}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{V}} &= \mathbf{V}(x_{n,0}, \dots, x_{n,n-1})(x_{n,n} - x_{n,0})(x_{n,n} - x_{n,1}) \dots (x_{n,n} - x_{n,n-1}) \\
 &= \mathbf{V}(x_{n,0}, \dots, x_{n,n-2})(x_{n,n-1} - x_{n,0}) \dots (x_{n,n-1} - x_{n,n-2}) \\
 &\quad \times (x_{n,n} - x_{n,0})(x_{n,n} - x_{n,1}) \dots (x_{n,n} - x_{n,n-1}) \\
 &= \dots \\
 &= \mathbf{V}(x_{n,0}, x_{n,1})(x_{n,2} - x_{n,0})(x_{n,2} - x_{n,1}) \dots \\
 &\quad \times (x_{n,n-1} - x_{n,0})(x_{n,n-1} - x_{n,1}) \dots (x_{n,n-1} - x_{n,n-2}) \\
 &\quad \times (x_{n,n} - x_{n,0})(x_{n,n} - x_{n,1}) \dots (x_{n,n} - x_{n,n-1}).
 \end{aligned}$$

Como $\mathbf{V}(x_{n,0}, x_{n,1}) = x_{n,1} - x_{n,0}$, então

$$\mathbf{V}(x_{n,0}, \dots, x_{n,n-1}, x_{n,n}) = \prod_{\substack{i=1 \\ 0 \leq j < i}}^n (x_{n,i} - x_{n,j}). \quad \blacksquare$$

Como consequência, obtemos que, se $x_{n,i} \neq x_{n,j}$ para $i \neq j$, então $V(x_{n,0}, \dots, x_{n,n-1}, x_{n,n}) \neq 0$.

Estamos agora em condições de definir Polinômio de Interpolação de uma função e demonstrarmos alguns resultados importantes sobre esse assunto.

Sejam, então, $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$, $n + 1$ pontos distintos de um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Seja $f(x)$ definida em $[a, b]$ com valores reais tais que

$$y_{n,i} = f(x_{n,i}), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Definição 1.13. *Chama-se polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre os $n + 1$ pontos distintos $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$, o polinômio de grau no máximo n , $P_n(x)$, que coincide com $f(x)$ nos $n + 1$ pontos dados, isto é,*

$$y_{n,i} = P_n(x_{n,i}), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Mas, a interpolação polinomial como definida acima é única? O teorema a seguir responde a essa questão.

Teorema 1.4. *O polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre os $n + 1$ pontos distintos $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$, existe e é único.*

Demonstração: Seja $P_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + \dots + a_{n,n}x^n$ o polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre os $n + 1$ pontos distintos $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Assim,

$$\begin{cases} P_n(x_{n,0}) = a_{n,0} + a_{n,1}x_{n,0} + \dots + a_{n,n}x_{n,0}^n = y_{n,0} \\ P_n(x_{n,1}) = a_{n,0} + a_{n,1}x_{n,1} + \dots + a_{n,n}x_{n,1}^n = y_{n,1} \\ \vdots \\ P_n(x_{n,n}) = a_{n,0} + a_{n,1}x_{n,n} + \dots + a_{n,n}x_{n,n}^n = y_{n,n} \end{cases}$$

ou, na forma matricial $Ax = b$,

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{n,0} & x_{n,0}^2 & \dots & x_{n,0}^n \\ 1 & x_{n,1} & x_{n,1}^2 & \dots & x_{n,1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n,n} & x_{n,n}^2 & \dots & x_{n,n}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{n,0} \\ y_{n,1} \\ \vdots \\ y_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Mas, o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero (pois $x_{n,i} \neq x_{n,j}$, $i \neq j$). Logo, existe uma única solução $\mathbf{x} = (a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n})^t$ para o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Como $a_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$, são os coeficientes do polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ e que satisfaz $P_n(x_{n,i}) = y_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$, demonstramos que o polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$ existe e é único. ■

Vamos, agora, examinar a precisão com que o polinômio de interpolação aproxima a função f . Para isso, precisaremos do resultado a seguir, conhecido como Teorema de Rolle, cuja demonstração omitiremos, mas pode ser encontrada, por exemplo, em [4].

Teorema 1.5 (Teorema de Rolle). *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) . Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.*

Teorema 1.6. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com derivadas contínuas até a ordem $n + 1$ ($f \in C^{n+1}[a, b]$). Sejam $x \in [a, b]$ e $P_n(y)$ o polinômio de interpolação de $f(y)$ sobre os $n + 1$ pontos distintos de $[a, b]$, $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$. Então, o erro na interpolação é dado por*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{\pi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x), \quad a < \xi_x < b, \quad (1.3.1)$$

onde $\pi(x) = (x - x_{n,0})(x - x_{n,1}) \dots (x - x_{n,n})$ é chamado polinômio dos nós.

Demonstração: Seja $P_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + \dots + a_{n,n}x^n$ e observe que

$$\pi(x_{n,i}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.3.2)$$

i) Seja $x = x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Pela Definição 1.13,

$$R_n(x_{n,i}) = f(x_{n,i}) - P_n(x_{n,i}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.3.3)$$

Como $\pi(x_{n,i}) = 0$, então para $x = x_{n,i}$ a equação (1.3.1) é válida.

ii) Consideremos, agora, $x \neq x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Seja

$$F(y) = f(y) - P_n(y) - \left(\frac{f(x) - P_n(x)}{\pi(x)} \right) \pi(y) \in C^{n+1}[a, b]. \quad (1.3.4)$$

Assim, fazendo $y = x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$, na equação anterior, por (1.3.2) e (1.3.3) obtemos

$$F(x_{n,i}) = f(x_{n,i}) - P_n(x_{n,i}) - \left(\frac{f(x) - P_n(x)}{\pi(x)} \right) \pi(x_{n,i}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Substituindo y por x em (1.3.4), temos

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - \left(\frac{f(x) - P_n(x)}{\pi(x)} \right) \pi(x) = 0.$$

Então, $F(y)$ tem pelo menos $n + 2$ raízes em $[a, b] : x, x_{n,0}, \dots, x_{n,n}$, ou seja, há $n + 2$ pontos onde $F(y)$ assume o mesmo valor. Pelo Teorema de Rolle, $F'(y)$ tem pelo menos $n + 1$ zeros em (a, b) , \dots , $F^{(n+1)}(y)$ tem pelo menos 1 zero em (a, b) .

Seja ξ_x um zero de $F^{(n+1)}(y)$ em (a, b) . Logo, $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Mas,

$$F^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) - \left(\frac{f(x) - P_n(x)}{\pi(x)} \right) (n + 1)!$$

e, assim,

$$0 = f^{(n+1)}(\xi_x) - \left(\frac{f(x) - P_n(x)}{\pi(x)} \right) (n + 1)!$$

Portanto,

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

■

Observe que não é possível avaliar o tamanho do erro $f - P_n$ se conhecermos apenas os valores de f em $x_{n,i}$, $i = 0, \dots, n$.

1.3.1 Fórmula de Lagrange para o Polinômio de Interpolação

Sejam $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$, $n + 1$ pontos distintos em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $P_n(x)$ o polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Vamos escrever $P_n(x)$ como a seguinte combinação linear

$$P_n(x) = f(x_{n,0})l_{n,0}(x) + f(x_{n,1})l_{n,1}(x) + \dots + f(x_{n,n})l_{n,n}(x)$$

onde $l_{n,k}(x)$ são polinômios de grau n .

Para que $P_n(x_{n,i}) = f(x_{n,i})$ tomemos $l_{n,k}(x)$ tais que

$$\begin{cases} l_{n,k}(x_{n,k}) = 1, & k = 0, 1, \dots, n. \\ l_{n,k}(x_{n,i}) = 0, & i, k = 0, 1, \dots, n, \quad i \neq k. \end{cases}$$

Então, os polinômios $l_{n,k}(x)$ têm n raízes distintas que são $x_{n,0}, \dots, x_{n,k-1}, x_{n,k+1}, \dots, x_{n,n}$. Logo,

$$l_{n,k}(x) = c_k(x - x_{n,0}) \dots (x - x_{n,k-1})(x - x_{n,k+1}) \dots (x - x_{n,n}).$$

Como $l_{n,k}(x_{n,k}) = 1$, então

$$c_k = \frac{1}{(x_{n,k} - x_{n,0}) \dots (x_{n,k} - x_{n,k-1})(x_{n,k} - x_{n,k+1}) \dots (x_{n,k} - x_{n,n})}.$$

Portanto, para $k = 0, 1, \dots, n$,

$$l_{n,k}(x) = \frac{\prod_{i=0, i \neq k}^n (x - x_{n,i})}{\prod_{i=0, i \neq k}^n (x_{n,k} - x_{n,i})}, \quad (1.3.5)$$

que são conhecidos como polinômios fundamentais de Lagrange.

O polinômio de interpolação de $f(x)$ pode, então, ser escrito como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) l_{n,k}(x)$$

com $l_{n,k}(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, dados por (1.3.5) e é conhecido como *Polinômio de Interpolação de Lagrange*.

Os polinômios $l_{n,k}(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, dados em (1.3.5), podem ser escritos como

$$l_{n,k}(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})\pi'(x_{n,k})}, \quad (1.3.6)$$

onde $\pi(x) = (x - x_{n,0})(x - x_{n,1}) \dots (x - x_{n,n})$ (veja Exercício 1.12).

1.3.2 Polinômio de Interpolação de Hermite

Nessa outra forma de interpolação, conhecida como Interpolação de Hermite, não só o polinômio interpolador coincide com a função, mas a derivada do polinômio coincide com a derivada da função nos pontos dados.

Para defini-la, consideremos $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$ $n+1$ pontos distintos de um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Sejam $f(x)$ e $f'(x)$ definidas em $[a, b]$ com valores reais, tais que

$$\begin{cases} y_{n,i} = f(x_{n,i}), \\ y'_{n,i} = f'(x_{n,i}), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Definição 1.14. *Chama-se polinômio de interpolação de Hermite de $f(x)$ sobre os $n+1$ pontos $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$, o polinômio de grau no máximo $2n+1$, $\mathcal{H}_{2n+1}(x)$, que coincide com $f(x)$, e cuja derivada coincide com $f'(x)$, nos $n+1$ pontos dados, isto é,*

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{2n+1}(x_{n,i}) = y_{n,i} = f(x_{n,i}), \\ \mathcal{H}'_{2n+1}(x_{n,i}) = y'_{n,i} = f'(x_{n,i}), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Como no caso anterior, a definição acima garante que existe um único polinômio de interpolação de Hermite para a função f , como demonstra o resultado a seguir.

Teorema 1.7. *Nas condições acima, o polinômio de interpolação de Hermite $\mathcal{H}_{2n+1}(x)$ existe e é único.*

Demonstração: Considerando

$$\mathcal{H}_{2n+1}(x) = a_{2n+1,2n+1}x^{2n+1} + a_{2n+1,2n}x^{2n} + \dots + a_{2n+1,1}x + a_{2n+1,0}$$

e como

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{2n+1}(x_{n,i}) = y_{n,i} = f(x_{n,i}), \\ \mathcal{H}'_{2n+1}(x_{n,i}) = y'_{n,i} = f'(x_{n,i}), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

obtemos um sistema de equações lineares com $2n + 2$ equações e $2n + 2$ incógnitas, que pode ser escrito na forma matricial $Ax = b$ por:

$$\begin{pmatrix} x_{n,0}^{2n+1} & x_{n,0}^{2n} & \dots & x_{n,0} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,n}^{2n+1} & x_{n,n}^{2n} & \dots & x_{n,n} & 1 \\ (2n+1)x_{n,0}^{2n} & 2n x_{n,0}^{2n-1} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2n+1)x_{n,n}^{2n} & 2n x_{n,n}^{2n-1} & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2n+1,2n+1} \\ a_{2n+1,2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{2n+1,1} \\ a_{2n+1,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_{n,0}) \\ \vdots \\ f(x_{n,n}) \\ f'(x_{n,0}) \\ \vdots \\ f'(x_{n,n}) \end{pmatrix}.$$

Se considerarmos o sistema homogêneo $Ax = 0$, então

$$\mathcal{H}_{2n+1}(x_{n,0}) = 0, \mathcal{H}_{2n+1}(x_{n,1}) = 0, \dots, \mathcal{H}_{2n+1}(x_{n,n}) = 0$$

e, também,

$$\mathcal{H}'_{2n+1}(x_{n,0}) = 0, \mathcal{H}'_{2n+1}(x_{n,1}) = 0, \dots, \mathcal{H}'_{2n+1}(x_{n,n}) = 0.$$

Assim, temos que todos os $x_{n,k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, são raízes de multiplicidade 2 de $\mathcal{H}_{2n+1}(x)$, o que implica que $\mathcal{H}_{2n+1}(x)$ tem pelo menos $2n + 2$ raízes, o que seria um absurdo (pois $\mathcal{H}_{2n+1}(x)$ tem grau $2n + 1$), a menos que $\mathcal{H}_{2n+1}(x)$ seja identicamente nulo, ou seja, $a_{2n+1,2n+1} = a_{2n+1,2n} = \dots = a_{2n+1,1} = a_{2n+1,0} = 0$. Logo, $x = 0$ é a única solução de $Ax = 0$. Isto significa que $\det A \neq 0$ e o sistema $Ax = b$ tem única solução. Portanto, \mathcal{H}_{2n+1} existe e é único. ■

Expressemos, agora, $\mathcal{H}_{2n+1}(x)$ da forma a seguir.

$$\mathcal{H}_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n h_{n,k}(x)y_{n,k} + \sum_{k=0}^n \bar{h}_{n,k}(x)y'_{n,k},$$

onde $h_{n,k}(x)$ e $\bar{h}_{n,k}(x)$ são polinômios de graus $2n + 1$.

Para que $\mathcal{H}_{2n+1}(x_{n,i}) = f(x_{n,i})$, consideremos

$$\begin{cases} h_{n,k}(x_{n,k}) = 1, & \text{se } k = i, \\ h_{n,k}(x_{n,i}) = 0, & \text{se } k \neq i, \\ \bar{h}_{n,k}(x_{n,i}) = 0, & \forall i, k, \end{cases} \quad (1.3.7)$$

e, para que $\mathcal{H}'_{2n+1}(x_{n,i}) = f'(x_{n,i})$, tomemos

$$\begin{cases} \bar{h}'_{n,k}(x_{n,k}) = 1, & \text{se } k = i, \\ \bar{h}'_{n,k}(x_{n,i}) = 0, & \text{se } k \neq i, \\ h'_{n,k}(x_{n,i}) = 0, & \forall i, k. \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Usando as equações (1.3.7) e (1.3.8) e procedendo de forma análoga à que foi feita para a determinação dos Polinômios de Interpolação de Lagrange, obtemos a seguinte expressão para os Polinômios de Interpolação de Hermite em termos dos Polinômios Fundamentais de Lagrange:

$$\mathcal{H}_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n h_{n,k}(x)y_{n,k} + \sum_{k=0}^n \bar{h}_{n,k}(x)y'_{n,k}, \quad (1.3.9)$$

onde

$$h_{n,k}(x) = [l_{n,k}(x)]^2 [1 - 2l'_{n,k}(x_{n,k})(x - x_{n,k})],$$

$$\bar{h}_{n,k}(x) = [l_{n,k}(x)]^2 (x - x_{n,k}).$$

Analisemos, agora, a precisão com que a interpolação de Hermite aproxima a função f . Note que também aqui precisamos saber a expressão analítica da função.

Teorema 1.8. *Sejam $x \in \mathbb{R}$, $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$ $n + 1$ pontos distintos e $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que $a = \min\{x, x_{n,0}, \dots, x_{n,n}\}$ e $b = \max\{x, x_{n,0}, \dots, x_{n,n}\}$. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua com derivadas contínuas até a ordem $2n + 2$ ($f \in C^{2n+2}[a, b]$) e se $\mathcal{H}_{2n+1}(x)$ é o polinômio de interpolação*

de Hermite de $f(x)$ sobre os $n+1$ pontos distintos $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$, então, para $x \in (a, b)$,

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - \mathcal{H}_{2n+1}(x) = \frac{\pi^2(x)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x), \quad a < \xi_x < b \quad (1.3.10)$$

onde $\pi(x) = (x - x_{n,0})(x - x_{n,1}) \dots (x - x_{n,n})$.

Demonstração: i) Para $x = x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$ temos,

$$R_{2n+1}(x_{n,i}) = f(x_{n,i}) - \mathcal{H}_{2n+1}(x_{n,i}).$$

Como $\mathcal{H}_{2n+1}(x_{n,i}) = y_{n,i} = f(x_{n,i})$, então $R_{2n+1}(x_{n,i}) = 0$.

Por outro lado, $\pi(x_{n,i}) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. Assim, a equação (1.3.10) é verdadeira quando x é um dos pontos $x_{n,i}$.

ii) Seja $x \neq x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Tomemos

$$\begin{aligned} F(y) &= f(y) - \mathcal{H}_{2n+1}(y) - \left(\frac{f(x) - \mathcal{H}_{2n+1}(x)}{\pi^2(x)} \right) \pi^2(y) \\ &= f(y) - \mathcal{H}_{2n+1}(y) - K_x \pi^2(y), \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

onde $K_x = \left(\frac{f(x) - \mathcal{H}_{2n+1}(x)}{\pi^2(x)} \right)$. Observe que $F(y) \in C^{2n+2}[a, b]$.

Substituindo y por x em (1.3.11), obtemos

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - \mathcal{H}_{2n+1}(x) - K_x \pi^2(x) \\ &= f(x) - \mathcal{H}_{2n+1}(x) - \left(\frac{f(x) - \mathcal{H}_{2n+1}(x)}{\pi^2(x)} \right) \pi^2(x) = 0. \end{aligned}$$

Logo, x é uma raiz de $F(y)$.

Se $y = x_{n,i}$, então $F(x_{n,i}) = f(x_{n,i}) - \mathcal{H}_{2n+1}(x_{n,i}) - K_x \pi^2(x_{n,i}) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. Logo, $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$ são também raízes distintas de $F(y)$. $F(y)$ tem, então, pelo menos $n+2$ raízes distintas em $[a, b]$: $x, x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$, ou seja, em pelo menos $n+2$ pontos $F(y)$ assume o mesmo valor.

Pelo Teorema de Rolle, $F'(y)$ tem pelos menos $n+1$ raízes distintas em (a, b) : y_0, y_1, \dots, y_n , entre os pontos $x, x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$.

Além disso, derivando (1.3.11), obtemos

$$F'(y) = f'(y) - \mathcal{H}'_{2n+1}(y) - K_x 2\pi(y)\pi'(y).$$

Mas, $F'(x_{n,i}) = f'(x_{n,i}) - \mathcal{H}'_{2n+1}(x_{n,i}) - K_x 2\pi(x_{n,i})\pi'(x_{n,i}) = 0$. Logo, $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$, são raízes distintas de $F'(y)$, que tem, portanto, pelo menos $2n + 2$ raízes distintas em (a, b) .

Aplicando novamente o Teorema de Rolle para a 2^{a} , a 3^{a} , \dots , a $(2n + 2)$ -ésima derivadas, concluímos que $F^{(2n+2)}(y)$ tem pelo menos 1 raiz em (a, b) . Mas,

$$F^{(2n+2)}(y) = f^{(2n+2)}(y) - \mathcal{H}_{2n+1}^{(2n+2)}(y) - \left(\frac{f(x) - \mathcal{H}_{2n+1}(x)}{\pi^2(x)} \right) (2n + 2)!.$$

Seja ξ_x um zero de $F^{(2n+2)}(y)$ em (a, b) , isto é, $F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0$. Assim,

$$0 = f^{(2n+2)}(\xi_x) - \left(\frac{f(x) - \mathcal{H}_{2n+1}(x)}{\pi^2(x)} \right) (2n + 2)!.$$

Logo,

$$f(x) - \mathcal{H}_{2n+1}(x) = \frac{\pi^2(x)}{(2n + 2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x),$$

como queríamos demonstrar. ■

1.4 Fórmulas de Quadratura Interpolatórias

Uma das importantes aplicações de Polinômio Interpolador é na construção de Fórmulas de Quadratura, como veremos a seguir. Para os que desejarem fazer um estudo mais aprofundado sobre este assunto, recomendamos os textos [2, 9, 10, 20, 24, 29].

Seja

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

Fórmulas do tipo

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^n W_{n,k}f(x_{n,k}) + E_n(f), \quad (1.4.1)$$

utilizadas para aproximar o valor numérico da integral I , são chamadas fórmulas de quadratura. Para $k = 0, 1, \dots, n$, os valores $W_{n,k}$ são chamados pesos e $x_{n,k}$ são os nós da fórmula de quadratura.

Para construí-las, vamos dividir o intervalo (a, b) em n subintervalos $a \leq x_{n,0} < x_{n,1} < \dots < x_{n,n-1} < x_{n,n} \leq b$ e então, construir o polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Logo,

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx.$$

Usando a fórmula de Lagrange para construir o polinômio interpolador, obtemos

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b \sum_{k=0}^n \left(\frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})\pi'(x_{n,k})} f(x_{n,k}) \right) dx + \int_a^b R_n(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{\pi'(x_{n,k})} \int_a^b \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})} dx \right] f(x_{n,k}) + \int_a^b R_n(x)dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I(f) = I_n(f) + E_n(f) = \sum_{k=0}^n W_{n,k}f(x_{n,k}) + E_n(f), \quad (1.4.2)$$

onde

$$W_{n,k} = \frac{1}{\pi'(x_{n,k})} \int_a^b \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})} dx, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (1.4.3)$$

e

$$E_n(f) = \int_a^b R_n(x)dx = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \pi(x)f^{(n+1)}(\xi_x)dx. \quad (1.4.4)$$

Definição 1.15. *Fórmulas de quadratura do tipo (1.4.2) cujos pesos são dados por (1.4.3) são chamadas Fórmulas de Quadratura Interpolatórias.*

Definição 1.16. *Dizemos que uma regra de quadratura tem grau de precisão n , se $E_n(f) = 0$ para todo polinômio $f(x) \in \mathbb{P}_n$ e existe um polinômio de grau $n + 1$, $\tilde{f}(x)$, para o qual $E_n(\tilde{f}) \neq 0$.*

Teorema 1.9. *A fórmula de quadratura (1.4.2) é interpolatória se, e somente se, $E_n(f) = 0$ para todo $f(x) \in \mathbb{P}_n$ (ou seja, é exata para todo polinômio de grau menor ou igual a n).*

Demonstração:

(\implies) Seja $f(x) \in \mathbb{P}_n$. Logo, $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ e, por (1.4.4), $E_n(f) = 0$.

(\impliedby) Seja $E_n(f) = 0$ para $f(x) \in \mathbb{P}_n$ na fórmula de quadratura (1.4.2).

Usando a fórmula de Lagrange para representar f , encontramos que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \sum_{k=0}^n \left(\frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})\pi'(x_{n,k})} f(x_{n,k}) \right) dx \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{\pi'(x_{n,k})} \int_a^b \frac{\pi(x)}{x - x_{n,k}} dx \right) f(x_{n,k}). \end{aligned}$$

Comparando a equação acima com (1.4.2), vemos que os pesos $W_{n,k}$ são dados por (1.4.3). Logo, (1.4.2) é interpolatória. ■

O teorema a seguir nos dá a precisão com que a fórmula de quadratura aproxima a integral exata de uma função, ou seja, nos dá uma expressão para o erro $E_n(f)$.

Teorema 1.10 (Teorema Geral do Erro). *Seja $f(x) \in C^{n+2}[a, b]$. Então, para $\eta, \delta \in [x_{n,0}, x_{n,n}]$,*

$$E_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \int_a^b \pi(x)dx, & n \text{ ímpar,} \\ \frac{f^{(n+2)}(\delta)}{(n+2)!} \int_a^b x\pi(x)dx, & n \text{ par.} \end{cases}$$

Demonstração: (para demonstração ver Krylov [20]).

A partir da aproximação de uma função por seu polinômio de interpolação podemos obter particulares fórmulas de quadratura, como veremos a seguir.

1.4.1 Fórmulas Fechadas de Newton-Côtes

Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que $-\infty < a < b < \infty$. Suponhamos que os pontos $a = x_{n,0} < x_{n,1} < \dots < x_{n,n-1} < x_{n,n} = b$ sejam igualmente espaçados, isto é,

$$x_{n,i+1} - x_{n,i} = h > 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Consideremos a seguinte mudança de variáveis $x = x_{n,0} + uh$. Portanto, $dx = hdu$ e, na fórmula de quadratura

$$I(f) = \sum_{k=0}^n W_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n(f), \quad (1.4.5)$$

os pesos são dados por

$$W_{n,k} = h \int_0^n \frac{\prod_{i=0, i \neq k}^n (u-i)}{\prod_{i=0, i \neq k}^n (k-i)} du, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.4.6)$$

Logo, o Teorema do Erro 1.9 pode ser formulado como a seguir, cuja demonstração também pode ser encontrada em Krylov [20].

Teorema 1.11. *Seja $f \in C^{n+2}[a, b]$. Então,*

$$E_n(f) = \begin{cases} \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n \prod_{k=0}^n (u-k) du, & n \text{ ímpar,} \\ \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \int_0^n \left(u - \frac{n}{2}\right) \prod_{k=0}^n (u-k), & n \text{ par,} \end{cases} \quad (1.4.7)$$

em que $\xi, \eta \in (a, b)$.

As conhecidas Regras do Trapézio, 1/3 de Simpson e 3/8 de Simpson são casos particulares das Fórmulas de Quadratura de Newton-Côtes, obtidas fazendo-se, respectivamente, $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$ em (1.4.5) e (1.4.6).

Como exemplo, daremos apenas a

Regra do Trapézio: tomando $n = 1$ em (1.4.5) e (1.4.6), obtemos

$$W_{1,0} = W_{1,1} = \frac{h}{2}.$$

Assim,

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] + E_1(f).$$

De (1.4.7), obtemos

$$E_1(f) = -\frac{h^3 f''(\xi)}{12}, \quad a \leq \xi \leq b.$$

Como não conhecemos ξ , não podemos calcular exatamente $E_1(f)$. Mas, conhecidos $f(x)$ e $[a, b]$, podemos calcular $\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$. Assim,

$$|E_1(f)| \leq \frac{h^3}{12} \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|.$$

Regra do Trapézio Composta: a fim de diminuirmos o erro na Regra do Trapézio, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos iguais de comprimento h , $a = x_{m,0} < x_{m,1} < \dots < x_{m,m-1} < x_{m,m} = b$.

Como

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_{m,k}}^{x_{m,k+1}} f(x)dx,$$

aproximando-se cada uma dessas integrais pela Regra do Trapézio, obtemos

$$I(f) = \frac{h}{2} \left[f(x_{m,0}) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{m,i}) + f(x_{m,m}) \right] + E_1(f),$$

com

$$|E_1(f)| \leq \frac{mh^3}{12} \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|.$$

Os casos $n = 2$ e $n = 3$ deixamos como exercício para o leitor.

1.5 Integral de Riemann-Stieltjes

Nesta seção abordaremos superficialmente o conceito de Integral de Stieltjes pois nos referiremos a ela mais adiante neste livro. Para mais detalhes, consulte [4].

1.5.1 Integral de Riemann

Seja $[a, b]$ um intervalo finito e seja f uma função real, limitada, definida em $[a, b]$. Uma sequência de números reais τ_k , $k = 0, 1, \dots, m$, onde

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m = b$$

é chamada de partição de $[a, b]$ e será denotada por Δ . A norma da partição Δ é definida por

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq k \leq m} |\tau_k - \tau_{k-1}|.$$

Para cada partição Δ de $[a, b]$ consideremos

$$M_k = \sup f(\tau) \quad \text{para} \quad \tau_{k-1} \leq \tau \leq \tau_k,$$

$$m_k = \inf f(\tau) \quad \text{para} \quad \tau_{k-1} \leq \tau \leq \tau_k,$$

$$U(\Delta, f) = \sum_{k=1}^m M_k(\tau_k - \tau_{k-1}) \quad \text{e} \quad u(\Delta, f) = \sum_{k=1}^m m_k(\tau_k - \tau_{k-1}).$$

Se

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} U(\Delta, f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} u(\Delta, f) = I,$$

então dizemos que f é integrável em $[a, b]$ no sentido de Riemann e I é o valor da integral de f no intervalo $[a, b]$ e denota-se

$$\int_a^b f(\tau) d\tau = I.$$

1.5.2 Integral de Riemann-Stieltjes

Consideremos, agora, $[a, b]$ um intervalo finito, ψ uma função real, não decrescente, definida em $[a, b]$, f uma função definida em $[a, b]$ e Δ uma partição de $[a, b]$.

Definimos o conjunto \mathcal{C} da partição Δ como o conjunto de pontos τ'_k que satisfazem

$$\tau_{k-1} \leq \tau'_k \leq \tau_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Dados uma partição Δ de $[a, b]$ e um conjunto \mathcal{C} de Δ , definimos a soma

$$S(\Delta, \mathcal{C}) = \sum_{k=1}^m f(\tau'_k) [\psi(\tau_k) - \psi(\tau_{k-1})].$$

Se existe um número S tal que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que, para toda partição Δ , com $\|\Delta\| < \delta$, e para toda escolha de \mathcal{C} ,

$$|S(\Delta, \mathcal{C}) - S| < \epsilon,$$

então S é chamado de integral de Riemann-Stieltjes (ou simplesmente integral de Stieltjes) de f com respeito a ψ no intervalo $[a, b]$ e é, geralmente, denotada por

$$\int_a^b f(\tau) d\psi(\tau).$$

Em outras palavras, se

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(\Delta, \mathcal{C})$$

existe, então este limite é chamado de integral de Stieltjes de f com respeito a ψ em $[a, b]$.

Alguns exemplos de integrais de Riemann-Stieltjes:

1) Se $\psi(\tau) = \tau$, ou, de forma mais geral, $\psi(\tau) = \tau + \kappa$, para alguma constante κ , a integral de Riemann-Stieltjes é idêntica à integral de Riemann no intervalo $[a, b]$.

2) Seja ψ contínua e derivável em $[a, b]$. Então, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\psi(\tau_k) - \psi(\tau_{k-1}) = \psi'(\tau_k^*)(\tau_k - \tau_{k-1}),$$

onde τ_k^* é um ponto em (τ_{k-1}, τ_k) . Se f é contínua em $[a, b]$, pela definição de integral de Riemann temos

$$\int_a^b f(\tau) d\psi(\tau) = \int_a^b f(\tau) \psi'(\tau) d\tau.$$

Lembremos que o Teorema do Valor Médio pode ser enunciado como a seguir (veja [4] para mais detalhes).

Teorema 1.12 (Teorema do Valor Médio). *Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Então, existe um ponto $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

3) Um caso bem interessante de integral de Stieltjes é encontrado se ψ é uma função escada com saltos nos pontos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, dada por

$$\psi(\tau) = \begin{cases} 0, & a \leq \tau \leq \xi_1, \\ \pi_1, & \xi_1 < \tau \leq \xi_2, \\ \pi_1 + \pi_2, & \xi_2 < \tau \leq \xi_3, \\ \dots & \dots \\ \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n, & \xi_n < \tau \leq b, \end{cases}$$

onde $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ são números positivos arbitrários. Somente os intervalos $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ que contém um ponto de salto podem contribuir na

soma $S(\Delta, \mathcal{C})$. Para $\|\Delta\| < \min(\xi_k - \xi_{k-1})$, a soma fica reduzida a

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k^*) \pi_k,$$

onde $|\xi_k^* - \xi_k| \leq \|\Delta\|$. Se f for contínua, temos $f(\xi_k^*) \rightarrow f(\xi_k)$ quando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ e, assim,

$$\int_a^b f(\tau) d\psi(\tau) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \pi_k.$$

As propriedades da integral de Stieltjes são bastante análogas às propriedades da integral de Riemann, pode-se provar que (veja [18, 27]):

1)

$$\int_a^b d\psi(\tau) = \psi(b) - \psi(a).$$

2)

$$\int_a^c f(\tau) d\psi(\tau) + \int_c^b f(\tau) d\psi(\tau) = \int_a^b f(\tau) d\psi(\tau), \text{ onde } a < c < b.$$

3) Para qualquer número complexo c ,

$$\int_a^b c f(\tau) d\psi(\tau) = c \int_a^b f(\tau) d\psi(\tau).$$

4)

$$\int_a^b (f_1(\tau) + f_2(\tau)) d\psi(\tau) = \int_a^b f_1(\tau) d\psi(\tau) + \int_a^b f_2(\tau) d\psi(\tau).$$

5) Se $f_1(\tau)$ e $f_2(\tau)$ são funções reais em $[a, b]$, e $f_1(\tau) \leq f_2(\tau)$ para $a \leq \tau \leq b$, então, se ψ é não decrescente, temos

$$\int_a^b f_1(\tau) d\psi(\tau) \leq \int_a^b f_2(\tau) d\psi(\tau).$$

e, ainda,

$$\left| \int_a^b f(\tau) d\psi(\tau) \right| \leq \int_a^b |f(\tau)| d\psi(\tau).$$

1.5.3 Distribuições

Definição 1.17. *Seja ψ uma função real, não-decrescente, definida em $[a, b]$. Um ponto $\xi \in [a, b]$ é chamado de ponto de aumento de ψ se $\psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0$, para todo $\epsilon > 0$. ξ é um ponto de aumento isolado de ψ se ele for um ponto de aumento e se existir $\epsilon > 0$ tal que ψ é constante nos intervalos $(\xi - \epsilon, \xi)$ e $(\xi, \xi + \epsilon)$.*

Definição 1.18. *Seja ψ uma função definida, não-decrescente, limitada e com infinitos pontos de aumento em um intervalo $[a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, tal que as integrais de Stieltjes*

$$\mu_k = \int_a^b \tau^k d\psi(\tau), \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

existem. Então, dizemos que ψ é uma distribuição (ou medida positiva) em $[a, b]$.

Se

$$\mu_k = \int_a^b \tau^k d\psi(\tau), \quad \text{para } k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

existem, então dizemos que ψ é uma distribuição forte em $[a, b]$.

Os valores μ_k são chamados de *momentos* da distribuição ψ . Se $d\psi(\tau)$ é interpretada como uma distribuição de massa sobre a reta real positiva, então os momentos μ_1 e μ_2 correspondem, respectivamente, aos primeiro e segundo momentos da distribuição de massa. Essa nomenclatura tem sua origem na Mecânica.

O número infinito de pontos de aumento na Definição 1.18 garante que

$$\int_a^b (f(\tau))^2 d\psi(\tau) > 0,$$

para qualquer função contínua e não identicamente nula em $[a, b]$.

Quando $[a, b] \subseteq (0, \infty)$ então ψ é chamada de distribuição de Stieltjes. Veja [6, 30] para mais detalhes.

1.6 Exercícios

Sessão 1.1

Exercício 1.1. Verifique que o produto escalar definido no Exemplo 1.1 satisfaz às propriedades da Definição 1.2.

Exercício 1.2. Considere x, y e $w \in \mathbb{C}^n$, A uma matriz complexa $n \times n$ e o corpo \mathbb{C} . Mostre que $\langle x, y \rangle = x^h y$ satisfaz às condições da Definição 1.2, ou seja, é de fato um produto interno.

Exercício 1.3. Mostre que as propriedades da Definição 1.2 são válidas para o produto interno (1.1.1).

Sessão 1.2

Exercício 1.4. Mostre que

$$x! = \frac{(x+n)!}{(x+1)_n}.$$

Exercício 1.5. Demonstre a Propriedade 1.1 de outra maneira utilizando a equação (1.2.2) para $\Gamma(x+1)$.

Exercício 1.6. Demonstre as Propriedades 1.4, 1.5 e 1.6 sobre a função $\Gamma(x)$.

Exercício 1.7. Demonstre que

$$\sum_{k=0}^n \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k} = \binom{\alpha+\beta+2n}{n}.$$

Exercício 1.8. Mostre que

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^n dt = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

Sessão 1.3

Exercício 1.9. Encontre o polinômio de interpolação $P(x)$ que coincide com $f(x) = x^7 - 4x^6 + 8x^4 + x^3 - 2x + 1$ nos pontos $-2.0, -1.0, 0.0, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ e 3.0 .

Exercício 1.10. Supondo a existência de dois polinômios de interpolação para $f(x)$, $P_n(x)$ e $Q_n(x)$, demonstre que $P_n(x) \equiv Q_n(x)$.

Exercício 1.11. Seja $f(x)$ tabelada em $n+1$ pontos igualmente espaçados de $h > 0$, $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, e tal que $|f'(x)| \leq M$ para $x_0 \leq x \leq x_n$. Mostre que o módulo do erro, quando usamos interpolação linear entre dois pontos consecutivos quaisquer, é menor ou igual a $\frac{1}{8}Mh^2$.

Exercício 1.12. Mostre que

$$l_{n,k}(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})\pi'(x_{n,k})},$$

onde $\pi(x) = (x - x_{n,0})(x - x_{n,1}) \dots (x - x_{n,n})$.

Exercício 1.13. Seja $f(x)$ contínua e com derivadas contínuas até a ordem três em $[-h, h]$, $h > 0$. Sejam $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, $M_3 = \max_{x_0 \leq x \leq x_2} |f'''(x)|$ e $P_2(x)$ o polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre x_0, x_1, x_2 .

- Obtenha uma estimativa para $|f(x) - P_2(x)|$.
- Obtenha uma aproximação para o zero de $f(x) = \sinh(x) - 2$ que cai no intervalo $[1.4, 1.6]$ usando interpolação quadrática. Use 10 algarismos significativos.

Exercício 1.14. Seja $f(x) = e^{ax}$, onde a é uma constante. Mostre que

$$\Delta^n f(x) = (e^{ah} - 1)^n e^{ah}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

onde $\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x)$, $n \geq 1$ e $\Delta^0 f(x) = f(x)$.

Exercício 1.15. Seja $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o determinante de Vandermonde. Mostre que

$$V(1, 2, 3, \dots, n) = 1! 2! 3! \dots (n-1)! .$$

Exercício 1.16. Considere a função $x(1-x)$ e n um número inteiro positivo. Mostre que:

- $\frac{r(n-r)}{n^2} = \frac{r}{n} \left(1 - \frac{r}{n}\right)$ e $0 \leq \frac{r(n-r)}{n^2} \leq \frac{1}{4}$, $0 \leq r \leq n$.
- $\max_{0 \leq x \leq 1} \left| \left(x - \frac{r}{n}\right) \left(x - \frac{n-r}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{4}$.
- $\max_{0 \leq x \leq 1} \left| x \left(x - \frac{1}{n}\right) \dots \left(x - \frac{n-1}{n}\right) (x-1) \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
- Se $P_n(x)$ é o polinômio de interpolação de $f(x) = e^x$ sobre os $n+1$ pontos igualmente espaçados $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$, então

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - P_n(x)| \leq \frac{e}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Exercício 1.17. Sejam $x_{n,0}, x_{n,1} < \dots, x_{n,n}$ pontos distintos e $l_{n,k}(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, os polinômios fundamentais de Lagrange

$$l_{n,k}(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})\pi'(x_{n,k})}.$$

onde $\pi(x) = (x - x_{n,0})(x - x_{n,1}) \dots (x - x_{n,n})$. Mostre que:

- $\sum_{k=0}^n l_{n,k}(x) = 1$;
- $l'_{n,k}(x_{n,k}) = \frac{1}{2} \frac{\pi''(x_{n,k})}{\pi'(x_{n,k})}$;
- $\sum_{j=1}^n x_j^k l_{n,j}(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$;

- para $n = 3$ e considerando x_1, x_2 e x_3 igualmente espaçados de $h > 0$, calcule

$$\max_{x_1 \leq x \leq x_3} |l_{n,j}(x)|, \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

Exercício 1.18. Encontre o polinômio de interpolação de Hermite, $H(x)$, que coincide com $f(x) = x^7 - 4x^6 + 8x^4 + x^3 - 2x + 1$ nos pontos -2.0 e 1.0 .

Sessão 1.4

Exercício 1.19. Use a Regra do Trapézio e aproxime a área da figura formada pelas curvas $g_1(x)$ e $g_2(x)$ dadas abaixo e as retas $x = 0$ e $x = 2$, com erro menor que 10^{-2} .

$$\begin{cases} g_1(x) = x(x^2 - 1) \\ g_2(x) = 1 - x^2 \end{cases}$$

Exercício 1.20. Faça $n = 2$ e $n = 3$ em (1.4.6) e determine as Regras $1/3$ e $3/8$ de Simpson. Encontre, também, uma limitação para o erro cometido em ambos os casos.

Exercício 1.21. Determine as Regras $1/3$ e $3/8$ de Simpson compostas e uma limitação para o erro cometido em ambos os casos.

Exercício 1.22. Prove que, na Fórmula de Quadratura (1.4.1),

$$\sum_{k=0}^n W_{n,k} = b - a.$$

Exercício 1.23. Uma das maneiras de se obter uma aproximação para o logaritmo natural de um inteiro positivo N é calculando a integral $\int_1^N \frac{dx}{x}$ usando quadratura numérica. Use o Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson para calcular $\ln 2$ com erro menor que 10^{-2} .

Exercício 1.24. *A integral dupla pode ser obtida da seguinte maneira: mantendo-se x constante, integra-se aproximadamente em relação a y por alguma regra de quadratura. Em seguida, a integral em relação a x é também aproximada por uma regra de quadratura. Sabendo-se que $f(x, y)$ é tabelada nos pontos*

$$(a, b), (A, b), \left(a, \frac{b+B}{2}\right), \left(A, \frac{b+B}{2}\right), (a, B),$$

aproxime

$$I = \int_a^A \int_b^B f(x, y) dy dx,$$

usando a regra $\frac{1}{3}$ de Simpson com relação a y e a regra do trapézio com relação a x .

Capítulo 2

Polinômios Ortogonais

Entre os polinômios associados a relação de recorrência de três termos estão os polinômios ortogonais. A teoria de polinômios ortogonais tem vasta aplicação em todos os tipos de problemas da Matemática Pura e Ciências Aplicadas. Esses polinômios são ferramentas essenciais para a solução de muitos problemas e vêm contribuindo nos estudos relacionados a equações diferenciais, frações contínuas, estabilidade numérica, algoritmos rápidos e super-rápidos, com aplicações que abrangem da Teoria dos Números à Teoria da Aproximação, da Combinatória à Representação de Grupos, da Mecânica Quântica à Física Estatística e da Teoria de Sistemas ao Processamento de Sinais.

As aplicações dos polinômios ortogonais associados às chamadas medidas clássicas, como as de Jacobi, Hermite e Laguerre, têm, particularmente, papel fundamental em muitos problemas das ciências e das engenharias.

Como referência sobre este assunto, sugerimos os textos [1, 6, 13, 28, 30].

2.1 Sequência de Polinômios Ortogonais

Seja $d\psi$ uma distribuição como na Definição 1.18. Se $d\psi(x) = w(x)dx$, então $w(x) \geq 0$ em (a, b) , mas não identicamente nula, e é chamada função peso.

Consideraremos, daqui por diante, apenas o caso em que $d\psi(x) = w(x)dx$ e o produto escalar definido em $C[a, b]$ por:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx. \quad (2.1.1)$$

Definição 2.1 (Sequência de Polinômios Ortogonais). *Dizemos que a sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais (SPO) com relação à função peso $w(x)$ no intervalo (a, b) se*

$$\begin{aligned} (i) \quad & P_n(x) \text{ é de grau exatamente } n, \quad n \geq 0. \\ (ii) \quad & \langle P_n, P_m \rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & n = m. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Note que, neste caso, $\rho_n > 0$, pois $P_n^2(x)w(x) \geq 0$ em (a, b) .

Podemos escrever o item (ii) acima como

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \delta_{nm}\rho_n,$$

onde δ_{ij} denota o delta de Kronecker.

Definição 2.2 (Sequência de Polinômios Ortonormais). *Dizemos que uma SPO é uma sequência de polinômios ortonormais (SPO*), denotada por $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$, se $\rho_n = 1$.*

Notação: Denotaremos os polinômios ortogonais de grau n , $P_n(x)$ por

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i}x^i, \quad a_{n,n} \neq 0.$$

Uma das maneiras de se construir uma sequência de polinômios ortogonais $P_0(x), P_1(x), \dots, P_j(x), \dots$, com relação ao produto interno (2.1.1) é através do Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt.

Para isso, podemos tomar a base $b_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, e calcular $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, da seguinte forma:

$$P_0(x) = b_0(x) = 1$$

e, para $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$P_k(x) = x^k + \alpha_{k,0}P_0(x) + \alpha_{k,1}P_1(x) + \dots + \alpha_{k,k-1}P_{k-1}(x),$$

onde

$$\alpha_{k,i} = -\frac{\langle x^k, P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Podemos tomar outras bases $\{b_k(x)\}$ desde que cada polinômio $b_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, seja de grau exatamente k .

2.2 Propriedades Gerais dos Polinômios Ortogonais

Estudaremos, agora, algumas interessantes propriedades dos polinômios ortogonais.

Teorema 2.1. *Se $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$ pertencem a uma sequência de polinômios ortogonais, então eles são linearmente independentes.*

Demonstração: Sejam c_j , $j = 0, 1, \dots, m$, constantes reais tais que

$$\sum_{j=0}^m c_j P_j(x) = 0.$$

Logo, para cada polinômio $P_k(x)$, $0 \leq k \leq m$, obtemos

$$\left\langle \sum_{j=0}^m c_j P_j(x), P_k \right\rangle = \langle 0, P_k \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{j=0}^m c_j \langle P_j, P_k \rangle = 0. \quad (2.2.1)$$

Por definição, $\langle P_j, P_k \rangle = 0$ para $j \neq k$ e $\langle P_k, P_k \rangle > 0$. Logo, por (2.2.1),

$$0 = \sum_{j=0}^m c_j \langle P_j, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle.$$

Portanto, $c_k = 0$, $k = 0, \dots, m$. ■

O teorema anterior nos diz que os polinômios ortogonais $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a m , \mathbb{P}_m .

No próximo resultado veremos outras formas de se definir uma SPO.

Teorema 2.2. *Sejam $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios e $w(x)$ uma função peso no intervalo (a, b) . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso $w(x)$ em (a, b) , ou seja, $\langle P_m, P_n \rangle = \delta_{mn} \rho_n$, onde $\rho_n \neq 0$.
- (b) $\langle P_n, \pi \rangle = 0, \forall \pi(x) \in \mathbb{P}_{n-1}, n \geq 1$.
- (c) $\langle x^m, P_n \rangle = \int_a^b x^m P_n(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq m \leq n-1, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$

Demonstração: (a) \implies (b) Seja $\pi(x)$ um polinômio de grau $\leq n-1$. Por definição, temos

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x) P_m(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Como $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais, pelo Teorema 2.1, P_0, P_1, \dots, P_{n-1} formam uma base para \mathbb{P}_{n-1} .

i) Assim, para $\pi(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ podemos escrever $\pi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x)$.

Como, pelo item (a), $\langle P_n, P_k \rangle = 0$ para $k \neq n$, então

$$\langle P_n, \pi \rangle = \left\langle P_n, \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x) \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle P_n, P_k \rangle = 0.$$

ii) Suponhamos, agora, $\pi(x)$ polinômio de grau exatamente n . Então, podemos escrever $\pi(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(x)$, onde $\alpha_n \neq 0$. Pelo item (a),

$\langle P_n, P_k \rangle = 0$, $k \neq n$. Assim,

$$\begin{aligned}\langle P_n, \pi \rangle &= \left\langle P_n, \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(x) \right\rangle = \sum_{k=0}^n \alpha_k \langle P_n, P_k \rangle \\ &= \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle = \alpha_n \rho_n \neq 0.\end{aligned}$$

(b) \implies (c) i) Por hipótese $\langle P_n, \pi \rangle = 0, \forall \pi(x)$ de grau $\leq n - 1$. Assim, $\langle P_n, x^m \rangle = 0$ se $m < n$.

ii) Consideremos, agora, $m = n$. Então, $\pi(x) = x^n \in \mathbb{P}_n$. Logo,

$$x^n = \sum_{j=0}^n \alpha_j P_j(x), \quad \alpha_n \neq 0$$

e, como $\langle P_n, P_j \rangle = 0$, $j < n$,

$$\langle P_n, x^n \rangle = \sum_{j=0}^n \alpha_j \langle P_n, P_j \rangle \stackrel{(b)}{=} \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle \neq 0.$$

(c) \implies (a) i) Consideremos $m < n$ ($m > n$, análogo) e $P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_{m,k} x^k$, $a_{m,m} \neq 0$. Então, como $m < n$,

$$\langle P_m, P_n \rangle = \sum_{k=0}^m a_{m,k} \langle x^k, P_n \rangle \stackrel{(c)}{=} 0.$$

ii) Se $m = n$, então

$$\langle P_n, P_n \rangle = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \langle x^k, P_n \rangle \stackrel{(c)}{=} a_{n,n} \langle x^n, P_n \rangle = a_{n,n} \tilde{\rho}_n \neq 0. \quad \blacksquare$$

Corolário 2.1. *Sejam $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ duas sequências de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à função peso $w(x)$. Então,*

$$Q_j(x) = c_j P_j(x), \quad j = 0, 1, \dots,$$

onde c_j é uma constante que depende apenas de j .

Demonstração: Seja $Q_j(x) \in \{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$. Como $P_0(x), P_1(x), \dots, P_j(x)$ formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq j$, podemos escrever $Q_j(x)$ como uma combinação linear desses polinômios. Assim,

$$Q_j(x) = \sum_{i=0}^j c_i P_i(x), \quad (c_j \neq 0).$$

Mas, $\langle Q_j, \pi \rangle = 0$, para todo polinômio $\pi(x)$ de grau $\leq j-1$. Logo,

$$\langle Q_j, P_0 \rangle = \langle Q_j, P_1 \rangle = \dots = \langle Q_j, P_{j-1} \rangle = 0.$$

Portanto, para $k = 0, \dots, j-1$,

$$0 = \langle Q_j, P_k \rangle = \sum_{i=0}^j c_i \langle P_i, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle,$$

pois $\langle P_i, P_k \rangle = 0$ para $i \neq k$.

Como $\langle P_k, P_k \rangle > 0$, então $c_k = 0$, $k = 0, \dots, j-1$. Portanto,

$$Q_j(x) = c_j P_j(x). \quad \blacksquare$$

Além disso, podemos obter o valor de c_j fazendo

$$\langle Q_j, P_j \rangle = \sum_{i=0}^j c_i \langle P_i, P_j \rangle = c_j \langle P_j, P_j \rangle \implies c_j = \frac{\langle Q_j, P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle}.$$

Vimos, então, que, a menos de um fator, a sequência de polinômios ortogonais com relação a um determinado produto interno, se existir, é única. Para mostrarmos que tal sequência sempre existe, precisaremos do conceito de determinante de Hankel.

Definição 2.3 (Determinantes de Hankel). *O determinante definido por*

$$\mathbf{H}_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0, \quad (2.2.2)$$

é chamado determinante de Hankel de ordem $n + 1$, onde

$$\mu_r = \int_a^b x^r w(x) dx, \quad r = 0, 1, 2, \dots, 2n,$$

são os momentos definidos na Definição 1.18.

Teorema 2.3. Se os momentos μ_r , $r = 0, 1, \dots, 2n$, existem, o determinante de Hankel (2.2.2) é diferente de zero.

Demonstração: Tomemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} \mu_0 a_{n,0} + \mu_1 a_{n,1} + \dots + \mu_n a_{n,n} = 0 \\ \mu_1 a_{n,0} + \mu_2 a_{n,1} + \dots + \mu_{n+1} a_{n,n} = 0 \\ \vdots \\ \mu_n a_{n,0} + \mu_{n+1} a_{n,1} + \dots + \mu_{2n} a_{n,n} = 0 \end{cases}$$

que na forma matricial $\mathcal{H}_n \mathbf{a} = \mathbf{0}$ é escrito como

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que o determinante da matriz dos coeficientes é \mathbf{H}_n . Mostremos que a única solução do sistema linear acima é $a_{n,0} = a_{n,1} = \dots = a_{n,n} = 0$. Dessa forma temos $\mathbf{H}_n \neq 0$.

Substituindo os momentos no sistema linear pela sua definição, obtemos

$$\begin{cases} a_{n,0} \int_a^b x^0 w(x) dx + \dots + a_{n,n} \int_a^b x^n w(x) dx = 0 \\ a_{n,0} \int_a^b x w(x) dx + \dots + a_{n,n} \int_a^b x^{n+1} w(x) dx = 0 \\ \vdots \\ a_{n,0} \int_a^b x^n w(x) dx + \dots + a_{n,n} \int_a^b x^{2n} w(x) dx = 0 \end{cases}$$

Multiplicando, respectivamente, por $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$ as equações do sistema e somando-as, temos

$$\begin{aligned} & a_{n,0}^2 \int_a^b w(x)dx + a_{n,1}^2 \int_a^b x^2 w(x)dx + \dots + a_{n,n}^2 \int_a^b x^{2n} w(x)dx \\ & + 2a_{n,0}a_{n,1} \int_a^b xw(x)dx + \dots + 2a_{n,0}a_{n,n} \int_a^b x^n w(x)dx \\ & + 2a_{n,1}a_{n,n} \int_a^b x^{n+1} w(x)dx + \dots = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_a^b (a_{n,0} + a_{n,1}x + \dots + a_{n,n}x^n)^2 w(x)dx = 0.$$

Se $Q(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i}x^i$, então temos

$$\int_a^b [Q(x)]^2 w(x)dx = \langle Q(x), Q(x) \rangle = 0 \iff Q(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

isto é, $a_{n,0} = a_{n,1} = \dots = a_{n,n} = 0$. ■

Estamos, agora, em condições de demonstrar a existência de uma SPO.

Teorema 2.4. *Os determinantes de Hankel \mathbf{H}_n são diferentes de zero para $n = 0, 1, 2, \dots$ se, e somente se, existe uma única sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) relativamente à função peso $w(x)$.*

Demonstração: Seja $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}x^k$, $a_{n,n} \neq 0$. Se $P_n(x)$ pertence a alguma sequência de polinômios ortogonais, pelo Teorema 2.2,

$$\langle x^m, P_n \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
 \langle x^m, P_n \rangle &= \int_a^b x^m (a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0})w(x)dx \\
 &= a_{n,n} \int_a^b x^{m+n}w(x)dx + a_{n,n-1} \int_a^b x^{m+n-1}w(x)dx + \dots \\
 &\quad + a_{n,1} \int_a^b x^{m+1}w(x)dx + a_{n,0} \int_a^b x^m w(x)dx \\
 &= a_{n,n}\mu_{m+n} + a_{n,n-1}\mu_{m+n-1} + \dots + a_{n,1}\mu_{m+1} + a_{n,0}\mu_m.
 \end{aligned}$$

Logo, fazendo $m = 0, 1, \dots, n$, obtemos, respectivamente,

$$\begin{cases} a_{n,n}\mu_n + \dots + a_{n,1}\mu_1 + a_{n,0}\mu_0 = 0 \\ a_{n,n}\mu_{n+1} + \dots + a_{n,1}\mu_2 + a_{n,0}\mu_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{n,n}\mu_{2n} + \dots + a_{n,1}\mu_{n+1} + a_{n,0}\mu_n = \tilde{\rho}_n \neq 0 \end{cases}.$$

Na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \tilde{\rho}_n \neq 0 \end{pmatrix}.$$

(\Rightarrow) Supondo que os determinantes de Hankel são diferentes de zero, a solução do sistema acima é única e, assim, existe uma única sequência de polinômios ortogonais onde $\langle x^n, P_n \rangle = \tilde{\rho}_n$. Além disso, $a_{n,n} \neq 0$, pois pela Regra de Crammer, $a_{n,n} = \frac{\tilde{\rho}_n \mathbf{H}_{n-1}}{\mathbf{H}_n}$.

(\Leftarrow) Reciprocamente, supondo que existe uma única sequência de polinômios ortogonais, então existem únicos $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$, com $a_{n,n} \neq 0$, que satisfazem o sistema linear acima. Portanto, os determinantes de Hankel de ordem $n + 1$, $n \geq 0$, são diferentes de zero. ■

Uma das mais importantes propriedades dos polinômios ortogonais é que eles satisfazem uma relação de recorrência de três termos e isso

facilita sobremaneira sua geração. Além disso, muitas outras propriedades satisfeitas por eles são consequências dessa relação.

Teorema 2.5 (Relação de Recorrência de Três Termos). *Consideremos $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente à função peso $w(x)$. Então,*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.2.3)$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, α_{n+1} , β_n , $\gamma_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, e

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, & \beta_{n+1} &= \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \\ \alpha_{n+1} &= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Demonstração: Continuaremos a usar a notação $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}x^k$.

Como $xP_n(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, podemos escrever

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x).$$

Comparando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$a_{n,n} = b_{n+1}a_{n+1,n+1} \implies b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Porém, das relações de ortogonalidade,

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \int_a^b P_n(x)xP_j(x)w(x)dx = 0 \quad \text{para } j \leq n-2.$$

Assim,

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = b_j \langle P_j, P_j \rangle = 0 \quad \text{para } j \leq n-2.$$

Logo, $b_j = 0$ se $j \leq n - 2$. Portanto,

$$xP_n(x) = b_{n+1}P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x),$$

que pode ser escrito como

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_{n+1}}xP_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}}P_n(x),$$

ou seja,

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x),$$

com

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad e \quad \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}.$$

Calculemos, agora, os valores de γ_{n+1} , α_{n+1} e β_{n+1} . Como $b_{n+1} = a_{n,n}/a_{n+1,n+1}$, temos $\gamma_{n+1} = a_{n+1,n+1}/a_{n,n}$. De

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x),$$

obtemos

$$0 = \langle P_{n+1}, P_n \rangle = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_n \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_n \rangle.$$

Daí,

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

Analogamente,

$$0 = \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_{n-1} \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_{n-1} \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle.$$

Logo,

$$\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Mas, como $P_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x)$, obtemos

$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{\gamma_n}P_n(x) + \frac{\beta_n}{\gamma_n}P_{n-1}(x) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n}P_{n-2}(x).$$

Porém,

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \int_a^b P_n(x)xP_{n-1}(x)w(x)dx = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle$$

e, então,

$$\langle P_n, xP_{n-1} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-1} \rangle + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-2} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle.$$

Portanto,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

■

Muitas vezes utilizamos os polinômios ortogonais na sua forma mônica, isto é, a família de polinômios ortogonais cujos coeficientes dos termos de maior grau são iguais a um ($a_{n,n} = 1$, $n = 0, 1, \dots$). Seja $\{P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}x^k\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso $w(x)$. A partir desses polinômios, podemos construir a sequência de polinômios ortogonais mônicos, $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, com relação a $w(x)$, dividindo cada P_n pelo correspondente coeficiente do termo de maior grau, ou seja,

$$\hat{P}_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_{n,n}}, \quad n \geq 1.$$

Para obtermos a relação de recorrência de três termos para esses polinômios, dividimos a relação (2.2.3) por $a_{n+1,n+1}$, obtendo

$$\frac{P_{n+1}(x)}{a_{n+1,n+1}} = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1}) \frac{P_n(x)}{a_{n+1,n+1}} - \alpha_{n+1} \frac{P_{n-1}(x)}{a_{n+1,n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Assim, para $n \geq 0$,

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1}) \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \hat{P}_n(x) - \alpha_{n+1} \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n+1,n+1}} \hat{P}_{n-1}(x).$$

Como $\frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} = \frac{1}{\gamma_{n+1}}$, então, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\hat{P}_{n+1}(x) &= \left(x - \frac{\beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}\right) \hat{P}_n(x) - \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma_n \gamma_{n+1}} \hat{P}_{n-1}(x) \\ &= \left(x - \hat{\beta}_{n+1}\right) \hat{P}_n(x) - \hat{\alpha}_{n+1} \hat{P}_{n-1}(x),\end{aligned}\quad (2.2.5)$$

em que

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{n+1} &= \frac{\beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1} \langle x P_n, P_n \rangle}{\gamma_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle} \\ &= \frac{\langle x a_{n,n} \hat{P}_n, a_{n,n} \hat{P}_n \rangle}{\langle a_{n,n} \hat{P}_n, a_{n,n} \hat{P}_n \rangle} = \frac{\langle x \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}\end{aligned}\quad (2.2.6)$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{n+1} &= \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma_n \gamma_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{1}{\gamma_n \gamma_{n+1}} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \\ &= \frac{1}{\gamma_n^2} \frac{\langle a_{n,n} \hat{P}_n, a_{n,n} \hat{P}_n \rangle}{\langle a_{n-1,n-1} \hat{P}_{n-1}, a_{n-1,n-1} \hat{P}_{n-1} \rangle} \\ &= \frac{a_{n-1,n-1}^2}{a_{n,n}^2} \frac{a_{n,n}^2}{a_{n-1,n-1}^2} \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle} = \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle}.\end{aligned}$$

A relação (2.2.5) pode também ser escrita como

$$x \hat{P}_n(x) = \hat{\alpha}_{n+1} \hat{P}_{n-1}(x) + \hat{\beta}_{n+1} \hat{P}_n(x) + \hat{P}_{n+1}(x). \quad (2.2.7)$$

Fazendo $n = 0, 1, 2, \dots, m-1$ na equação (2.2.7), obtemos, respec-

tivamente,

$$\begin{aligned}
 x\hat{P}_0(x) &= \hat{\beta}_1\hat{P}_0(x) + \hat{P}_1(x) \\
 x\hat{P}_1(x) &= \hat{\alpha}_2\hat{P}_0(x) + \hat{\beta}_2\hat{P}_1(x) + \hat{P}_2(x) \\
 x\hat{P}_2(x) &= \hat{\alpha}_3\hat{P}_1(x) + \hat{\beta}_3\hat{P}_2(x) + \hat{P}_3(x) \\
 &\vdots \\
 x\hat{P}_{m-1}(x) &= \hat{\alpha}_m\hat{P}_{m-2}(x) + \hat{\beta}_m\hat{P}_{m-1}(x) + \hat{P}_m(x),
 \end{aligned}$$

ou, na forma matricial,

$$x \begin{pmatrix} \hat{P}_0(x) \\ \hat{P}_1(x) \\ \hat{P}_2(x) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x) \\ \hat{P}_{m-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\beta}_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\beta}_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\alpha}_m & \hat{\beta}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{P}_0(x) \\ \hat{P}_1(x) \\ \hat{P}_2(x) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x) \\ \hat{P}_{m-1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{P}_m(x) \end{pmatrix}.$$

Sejam $x_{m,k}$, $1 \leq k \leq m$, as raízes do polinômio $\hat{P}_m(x)$. Então,

$$x_{m,k} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{P}_0(x_{m,k}) \\ \hat{P}_1(x_{m,k}) \\ \hat{P}_2(x_{m,k}) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x_{m,k}) \\ \hat{P}_{m-1}(x_{m,k}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{m,k}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\beta}_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\beta}_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\alpha}_m & \hat{\beta}_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}_m} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{P}_0(x_{m,k}) \\ \hat{P}_1(x_{m,k}) \\ \hat{P}_2(x_{m,k}) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x_{m,k}) \\ \hat{P}_{m-1}(x_{m,k}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{m,k}}.$$

Logo,

$$x_{m,k} \mathbf{v}_{m,k} = \mathbf{G}_m \mathbf{v}_{m,k}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Como $P_0(x)$ é um polinômio constante e diferente do polinômio nulo, $P_0(x_{m,k}) \neq 0$, o vetor $\mathbf{v}_{m,k}$ é não-nulo. Então, $x_{m,k}$ é auto-valor da matriz \mathbf{G}_m e $\mathbf{v}_{m,k}$ o correspondente auto-vetor.

Uma das consequências da relação de recorrência de três termos é a importante identidade que demonstraremos a seguir.

Teorema 2.6 (Identidade de Christoffel-Darboux). *Seja $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios ortogonais na forma mônica. Então,*

$$\sum_{k=0}^n \frac{\hat{P}_k(x)\hat{P}_k(u)}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{k+1}} = \frac{\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(u) - \hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(u)}{(\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{n+1})(x - u)}. \quad (2.2.8)$$

Demonstração: Pela relação (2.2.5) temos, para $m \geq 0$, as seguintes

identidades:

$$\begin{aligned} x\hat{P}_m(x)\hat{P}_m(u) &= \hat{P}_{m+1}(x)\hat{P}_m(u) + \hat{\beta}_{m+1}\hat{P}_m(x)\hat{P}_m(u) \\ &\quad + \hat{\alpha}_{m+1}\hat{P}_{m-1}(x)\hat{P}_m(u), \\ u\hat{P}_m(u)\hat{P}_m(x) &= \hat{P}_{m+1}(u)\hat{P}_m(x) + \hat{\beta}_{m+1}\hat{P}_m(u)\hat{P}_m(x) \\ &\quad + \hat{\alpha}_{m+1}\hat{P}_{m-1}(u)\hat{P}_m(x). \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$\begin{aligned} (x-u)\hat{P}_m(x)\hat{P}_m(u) &= \hat{P}_{m+1}(x)\hat{P}_m(u) - \hat{P}_{m+1}(u)\hat{P}_m(x) \\ &\quad - \hat{\alpha}_{m+1}[\hat{P}_m(x)\hat{P}_{m-1}(u) - \hat{P}_m(u)\hat{P}_{m-1}(x)]. \end{aligned}$$

Agora, se denotarmos o lado direito de (2.2.8) por $F_n(x, u)$ e dividirmos a última equação por $(\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{m+1})(x-u)$, obtemos

$$\frac{\hat{P}_m(x)\hat{P}_m(x)}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{m+1}} = F_m(x, u) - F_{m-1}(x, u), \quad m \geq 0.$$

Por fim, somando-se a última expressão com m variando de 0 até n (e observando que $F_{-1}(x, u) = 0$), obtemos o resultado desejado. ■

Além da sequência de polinômios ortogonais mônicos, podemos utilizar a sequência de polinômios ortonormais $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$. Ela é obtida a partir dos polinômios ortogonais P_n , dividindo-se cada P_n por sua norma. Logo,

$$P_n^*(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}, \quad n \geq 1,$$

onde $\|P_n(x)\| = \sqrt{\langle P_n, P_n \rangle}$.

Da relação de recorrência (2.2.3) sabemos que

$$P_{n+1}^*(x) = (\gamma_{n+1}^*x - \beta_{n+1}^*)P_n^*(x) - \alpha_{n+1}^*P_{n-1}^*(x), \quad n \geq 0,$$

onde $P_0^*(x) = 1$, $P_{-1}^*(x) = 0$ e

$$\gamma_{n+1}^* = \frac{a_{n+1,n+1}^*}{a_{n,n}^*}, \quad \beta_{n+1}^* = \gamma_{n+1}^* \langle xP_n^*, P_n^* \rangle, \quad \alpha_{n+1}^* = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*}.$$

Assim,

$$P_{n+1}^*(x) = (\gamma_{n+1}^*x - \gamma_{n+1}^* \langle xP_n^*, P_n^* \rangle) P_n^*(x) - \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*} P_{n-1}^*(x).$$

Logo,

$$\frac{P_{n+1}^*(x)}{\gamma_{n+1}^*} = (x - \langle xP_n^*, P_n^* \rangle) P_n^*(x) - \frac{1}{\gamma_n^*} P_{n-1}^*(x),$$

ou, equivalentemente,

$$xP_n^*(x) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} P_{n+1}^*(x) + \langle xP_n^*, P_n^* \rangle P_n^*(x) + \frac{1}{\gamma_n^*} P_{n-1}^*(x).$$

Finalmente, obtemos

$$xP_n^*(x) = \lambda_n^* P_{n-1}^*(x) + \tau_{n+1}^* P_n^*(x) + \lambda_{n+1}^* P_{n+1}^*(x), \quad (2.2.9)$$

onde $\lambda_{n+1}^* = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*}$ e $\tau_{n+1}^* = \langle xP_n^*, P_n^* \rangle$.

Como podemos também escrever $\hat{P}_n(x) = \frac{P_n^*(x)}{a_{n,n}^*}$, de (2.2.6) temos

$$\hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle} = \frac{(a_{n-1,n-1}^*)^2}{(a_{n,n}^*)^2} = (\lambda_n^*)^2 \quad (2.2.10)$$

e

$$\hat{\beta}_{n+1} = \frac{\langle x\hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle} = \langle xP_n^*, P_n^* \rangle = \tau_{n+1}^*. \quad (2.2.11)$$

A partir de (2.2.9), (2.2.10) e (2.2.11) e procedendo da mesma forma

que para os polinômios ortogonais mônicos, obtemos

$$\begin{aligned}
 x_{m,k} \underbrace{\begin{pmatrix} P_0^*(x_{m,k}) \\ P_1^*(x_{m,k}) \\ P_2^*(x_{m,k}) \\ \vdots \\ P_{m-2}^*(x_{m,k}) \\ P_{m-1}^*(x_{m,k}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_{m,k}} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 & \sqrt{\hat{\alpha}_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{\hat{\alpha}_2} & \hat{\beta}_2 & \sqrt{\hat{\alpha}_3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\hat{\alpha}_3} & \hat{\beta}_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\beta}_{m-1} & \sqrt{\hat{\alpha}_m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\hat{\alpha}_m} & \hat{\beta}_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}_m} \\
 &\times \underbrace{\begin{pmatrix} P_0^*(x_{m,k}) \\ P_1^*(x_{m,k}) \\ P_2^*(x_{m,k}) \\ \vdots \\ P_{m-2}^*(x_{m,k}) \\ P_{m-1}^*(x_{m,k}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_{m,k}},
 \end{aligned}$$

isto é,

$$x_{m,k} \mathbf{u}_{m,k} = \mathbf{J}_m \mathbf{u}_{m,k}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Portanto, $x_{m,k}$ é também um auto-valor da matriz \mathbf{J}_m , conhecida como matriz de Jacobi de ordem m .

O resultado a seguir refere-se à Identidade de Christoffel-Darboux para os polinômios ortonormais.

Teorema 2.7 (Identidade de Christoffel-Darboux). *Seja $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortonormais. Então, eles satisfazem à seguinte identidade*

$$\sum_{k=0}^n P_k^*(x) P_k^*(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \frac{P_{n+1}^*(x) P_n^*(y) - P_n^*(x) P_{n+1}^*(y)}{x - y}. \quad (2.2.12)$$

Demonstração: Exercício 2.8.

Se somarmos e subtrairmos $P_{n+1}^*(x) P_n^*(x)$ ao numerador da Identi-

dade de Christoffel-Darboux (2.2.12), obtemos

$$\sum_{k=0}^n P_k^*(x)P_k^*(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \left\{ \frac{P_n^*(x)(P_{n+1}^*(x) - P_{n+1}^*(y))}{x-y} - \frac{P_{n+1}^*(x)(P_n^*(x) - P_n^*(y))}{x-y} \right\}.$$

Fazendo $y \rightarrow x$ em ambos os membros da igualdade acima, chegamos à seguinte identidade, conhecida como Fórmula Confluente,

$$\sum_{k=0}^n (P_k^*(x))^2 = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \left[P_n^*(x)(P_{n+1}^*(x))' - P_{n+1}^*(x)(P_n^*(x))' \right] > 0 \quad (2.2.13)$$

que é válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.3 Zeros dos Polinômios Ortogonais

Pelo fato de pertencerem a uma SPO, muitas propriedades sobre os zeros dos polinômios ortogonais são conhecidas. Os zeros de alguns casos particulares de polinômios ortogonais, como Jacobi, Laguerre e Hermite (que veremos mais adiante), possuem uma bela interpretação eletrostática, que não apresentaremos aqui, mas o leitor curioso encontra em detalhes em [25, 30].

Como primeira propriedade, apresentamos uma consequência da Fórmula Confluente.

Teorema 2.8. *Seja $\{P_j(x)\}_{j=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, dois polinômios consecutivos, $P_n(x)$ e $P_{n-1}(x)$, não têm zeros em comum.*

Demonstração: Sejam $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ os zeros de $P_n(x)$ em ordem crescente. Substituindo esses zeros em (2.2.13) com $n - 1$ no lugar de n , obtemos

$$P_n(x_{n-1,k})P_{n-1}'(x_{n-1,k}) < 0. \quad (2.3.1)$$

Portanto, $P_n(x_{n-1,k}) \neq 0$, $k = 1, \dots, n-1$. ■

Teorema 2.9. *Seja $P_n(x)$, $n \geq 1$, uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à função peso $w(x)$. Então, as raízes de $P_n(x)$ são reais, distintas e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração: Vamos supor que $P_n(x)$ não muda de sinal em (a, b) . Então ou $P_n(x) \geq 0$ (mas não identicamente nulo) em (a, b) o que implica em $\int_a^b P_n(x)w(x)dx > 0$, ou $P_n(x) \leq 0$ (mas não identicamente nulo) em (a, b) de onde segue que $\int_a^b P_n(x)w(x)dx < 0$. Mas, da relação de ortogonalidade, temos que

$$\int_a^b P_n(x)w(x)dx = \int_a^b 1 \cdot P_n(x)w(x)dx = 0. \quad (2.3.2)$$

Logo, temos um absurdo. Assim, $P_n(x)$ deve mudar de sinal em (a, b) pelo menos uma vez, logo existe pelo menos uma raiz real de $P_n(x)$ de multiplicidade ímpar em (a, b) .

Suponhamos que $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,r}$ ($r < n$) são as raízes distintas de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b) . Então,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,r})Q(x) \\ &= R(x)Q(x), \end{aligned}$$

onde $R(x)$ é um polinômio de grau $r < n$ com raízes $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,r}$ e $Q(x)$ é um polinômio de grau $(n - r)$ que tem somente raízes complexas ou raízes de multiplicidade par em (a, b) ou raízes fora de (a, b) . Logo, $Q(x)$ não muda de sinal em (a, b) .

Porém, como $r < n$, pela relação de ortogonalidade,

$$\int_a^b R(x)P_n(x)w(x)dx = 0. \quad (2.3.3)$$

Mas,

$$\int_a^b R(x)P_n(x)w(x)dx = \int_a^b R^2(x)Q(x)w(x)dx \neq 0. \quad (2.3.4)$$

Por (2.3.3) e (2.3.4) temos um absurdo. Assim, $P_n(x)$ tem $r \geq n$ raízes de multiplicidade ímpar em (a, b) . Mas, como $P_n(x)$ é um polinômio de grau n , então $r = n$. Deste modo, $P_n(x)$ tem n raízes de multiplicidade ímpar em (a, b) , da seguinte forma

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})^{i_1}(x - x_{n,2})^{i_2} \dots (x - x_{n,n})^{i_n}.$$

Como i_1, i_2, \dots, i_n são índices positivos e ímpares e $i_1 + i_2 + \dots + i_n = n$, temos que $i_1 = i_2 = \dots = i_n = 1$. ■

O fato das raízes serem distintas também é consequência da desigualdade (2.3.1), uma vez que $P'(x_{n-1,k}) \neq 0$, $k = 1, \dots, n-1$.

Outra importante propriedade dos zeros dos polinômios ortogonais, que veremos a seguir, também é uma consequência da Fórmula Confluente.

Teorema 2.10. *Seja $\{P_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau $n-1$, $P_{n-1}(x)$, existe somente um zero de $P_n(x)$.*

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que os polinômios $P_j(x)$ sejam ortonormais com $a_{j,j} > 0$, $j = 0, 1, \dots$. Sejam $x_{n-1,1} < x_{n-1,2} < \dots < x_{n-1,n-1}$ os zeros de $P_{n-1}(x)$ em ordem crescente. Tomemos $x_{n-1,k}$ e $x_{n-1,k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n-2$, dois zeros consecutivos de $P_{n-1}(x)$. Substituindo esses zeros em (2.2.13) com n substituído por $n-1$, obtemos

$$P_n(x_{n-1,k})P'_{n-1}(x_{n-1,k}) < 0 \quad \text{e} \quad P_n(x_{n-1,k+1})P'_{n-1}(x_{n-1,k+1}) < 0.$$

Como $P'_{n-1}(x_{n-1,k})$ e $P'_{n-1}(x_{n-1,k+1})$ possuem sinais opostos, então $P_n(x_{n-1,k})$ e $P_n(x_{n-1,k+1})$ também têm. Logo, existe pelo menos um ponto em $(x_{n-1,k}, x_{n-1,k+1})$ onde $P_n(x)$ muda de sinal. Portanto, existe pelo menos um zero de $P_n(x)$ entre $x_{n-1,k}$ e $x_{n-1,k+1}$. Dois zeros de $P_n(x)$ estão em $(a, x_{n-1,1})$ e $(x_{n-1,n-1}, b)$, respectivamente. Como $a_{j,j} > 0$, $j = 0, 1, \dots$, temos que $P_j(b) > 0$. Logo, $P'_{n-1}(x_{n-1,n-1}) > 0$. De (2.2.13), $P_n(x_{n-1,n-1}) < 0$. Portanto, $P_n(x)$ muda de sinal entre $x_{n-1,n-1}$ e b . De modo análogo mostramos que existe uma raiz de $P_n(x)$ entre a e $x_{n-1,1}$. Basta lembrar que $\text{signal}[P_j(a)] = (-1)^j$. Como

$P_n(x)$ tem n zeros, o resultado está demonstrado. ■

Observação: Um resultado semelhante a este é provado no Teorema 3.2: se $n > N \geq 2$, então $P_n(x)$ possui pelo menos um zero entre quaisquer dois zeros de $P_N(x)$ (isto é: entre quaisquer dois zeros de $P_5(x)$, por exemplo, existe pelo menos um zero de $P_6(x)$, $P_7(x)$, $P_8(x)$, \dots , e assim por diante). A demonstração deste resultado requer o conhecimento de outros que veremos mais adiante na Seção 3.2.

2.4 Polinômios Ortogonais Simétricos

Definição 2.4. Uma função peso $w(x)$ definida em um intervalo da forma $[-b, b]$ é chamada par se $w(x) = w(-x)$.

Teorema 2.11. Se uma função peso $w(x)$ definida em $[-b, b]$ é par, então os momentos de ordem ímpar são nulos, ou seja, $\mu_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Além disso, se $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é a SPO relativa a $w(x)$, então $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, $n \geq 0$.

Demonstração: Temos que $w(x) = w(-x)$ e $\mu_{2n+1} = \int_{-b}^b x^{2n+1} w(x) dx$.

Se fizermos $x = -y$, temos

$$\begin{aligned} \mu_{2n+1} &= \int_{-b}^b x^{2n+1} w(x) dx = \int_b^{-b} (-y)^{2n+1} w(-y) d(-y) \\ &= - \int_{-b}^b y^{2n+1} w(y) dy = -\mu_{2n+1}. \end{aligned}$$

Logo $\mu_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Para a segunda parte do teorema, basta observar que

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \hat{P}_m(-x)\hat{P}_n(-x)w(x)dx &\stackrel{(x=-y)}{=} \int_b^{-b} \hat{P}_m(y)\hat{P}_n(y)w(-y)d(-y) \\ &\stackrel{(w \text{ par})}{=} \int_{-b}^b \hat{P}_m(y)\hat{P}_n(y)w(y)dy \\ &= \int_{-b}^b \hat{P}_m(x)\hat{P}_n(x)w(x)dx. \end{aligned}$$

Pelo Corolário 2.1, $\hat{P}_n(-x) = c_n \hat{P}_n(x)$, onde c_n é uma constante. Assim, como

$$\hat{P}_n(x) = x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0},$$

ao compararmos os coeficientes dos termos de maior grau de $\hat{P}_n(-x)$ e de $c_n \hat{P}_n(x)$, teremos que

$$c_n = (-1)^n.$$

Portanto, $\hat{P}_n(-x) = (-1)^n \hat{P}_n(x)$, $n \geq 0$. ■

Teorema 2.12. *Seja $\{P_n(x)\}$ uma sequência de polinômios ortogonais com relação à uma função peso $w(x)$. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

- a) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, $n \geq 0$;
- b) na fórmula de recorrência (2.2.3), $\beta_n = 0$, $n \geq 1$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, utilizaremos os polinômios ortogonais simétricos na forma mônica.

(a \Rightarrow b) Seja $\hat{Q}_n(x) = (-1)^n \hat{P}_n(-x)$ para todo n . Como $\hat{P}_n(x) = (-1)^n \hat{P}_n(-x)$, ao subtrairmos a relação de recorrência de $\hat{P}_n(x)$ da relação de recorrência de $\hat{Q}_n(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{Q}_n(x) - \hat{P}_n(x) \\ &= (x + \beta_n)\hat{Q}_{n-1}(x) - \alpha_n \hat{Q}_{n-2}(x) - (x - \beta_n)\hat{P}_{n-1}(x) + \alpha_n \hat{P}_{n-2}(x) \\ &= 2\beta_n \hat{P}_{n-1}(x), \end{aligned}$$

de onde segue que $\beta_n = 0$, para todo $n \geq 1$.

($b \Rightarrow a$) Temos que $\beta_n = 0$, $n \geq 1$. Assim, a relação de recorrência para $\hat{Q}_n(x) = (-1)^n \hat{P}_n(-x)$ é dada por

$$\hat{Q}_n(x) = x\hat{Q}_{n-1}(x) - \alpha_n\hat{Q}_{n-2}(x).$$

Pela fórmula de recorrência (2.2.5), como $\beta_n = 0$,

$$\hat{P}_n(x) = x\hat{P}_{n-1}(x) - \alpha_n\hat{P}_{n-2}(x).$$

Agora, como $\hat{Q}_n(x)$ e $\hat{P}_n(x)$ satisfazem à mesma fórmula de recorrência e, além disso,

$$\hat{Q}_{-1}(x) = \hat{P}_{-1}(x) \text{ e } \hat{Q}_0(x) = \hat{P}_0(x),$$

então podemos concluir que $\hat{P}_n(x) = \hat{Q}_n(x) = (-1)^n \hat{P}_n(-x)$, $n \geq 0$. ■

Concluimos, então, que se w for par e se $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, com $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$, forem os zeros de $P_n(x)$:

- $x_{n,k} = -x_{n,n-k+1}$, $k = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$;
- se n for ímpar, então $x_{n, \lfloor n/2 \rfloor + 1} = 0$.

2.5 Polinômios Ortogonais Clássicos

Segundo Chihara [6] os polinômios de Jacobi (incluindo os casos especiais de Legendre, de Gegenbauer, de Chebyshev de 1ª e 2ª espécies), de Laguerre e de Hermite são chamados de polinômios ortogonais clássicos. No trabalho de Agarwal e Milovanović, [1], encontramos a definição a seguir para polinômios ortogonais clássicos.

Definição 2.5. *Polinômios ortogonais com respeito ao produto interno (2.1.2) no intervalo (a, b) são chamados de polinômios ortogonais clássicos se a função peso $w(x)$ satisfaz a seguinte equação diferencial*

$$\frac{d}{dx}(M(x)w(x)) = N(x)w(x),$$

onde

$$M(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } (a, b) = (-1, 1) \\ x, & \text{se } (a, b) = (0, \infty) \\ 1, & \text{se } (a, b) = (-\infty, \infty) \end{cases}$$

e $N(x)$ é um polinômio de grau 1.

De acordo com esta definição, os polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite são polinômios ortogonais clássicos. Nesta seção estudaremos detalhadamente esses polinômios.

2.5.1 Polinômios de Jacobi, Legendre, Chebyshev e Gegenbauer

Os polinômios de Jacobi, denotados por $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, podem ser definidos através da fórmula de Rodrigues dada por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}],$$

(ver Krylov [20, pag.23] ou Chihara [6, pag.143]).

Nesta seção veremos que esses polinômios são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Para obtermos o coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Jacobi, vamos aplicar, à equação (2.5.1), a regra de Leibnitz para calcular a n -ésima derivada do produto de duas funções

$$\frac{d^n}{dx^n} [f(x) g(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Tomemos, então, $f(x) = (1-x)^{\alpha+n}$ e $g(x) = (1+x)^{\beta+n}$. Assim,

$$\frac{d^j}{dx^j} f(x) = f^{(j)}(x) = (-1)^j (\alpha+n)(\alpha+n-1) \dots (\alpha+n-j+1) (1-x)^{\alpha+n-j}$$

e

$$\frac{d^j}{dx^j} g(x) = g^{(j)}(x) = (\beta+n)(\beta+n-1) \dots (\beta+n-j+1) (1+x)^{\beta+n-j}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^k (\alpha+n)(\alpha+n-1) \dots \\ &\quad \times (\alpha+k+1)(\beta+n)(\beta+n-1) \dots (\beta+n-k+1) \\ &\quad \times (1-x)^{\alpha+k} (1+x)^{\beta+n-k}. \end{aligned}$$

Substituindo esta derivada na fórmula de Rodrigues para os polinômios de Jacobi, temos, depois de algumas simplificações,

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} (\alpha+n)(\alpha+n-1) \dots (\alpha+k+1) \\ &\quad \times (\beta+n)(\beta+n-1) \dots (\beta+n-k+1) \quad (2.5.1) \\ &\quad \times (1-x)^k (1+x)^{n-k}. \end{aligned}$$

$$\text{Como } (1-x)^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} x^j \text{ e } (1+x)^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^i,$$

fazendo o Produto de Cauchy em $(1-x)^k (1+x)^{n-k}$, temos

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} (\alpha+n)(\alpha+n-1) \dots (\alpha+k+1) \\ &\quad \times (\beta+n)(\beta+n-1) \dots (\beta+n-k+1) \left\{ (-1)^k x^n \right. \\ &\quad \left. + \left[(-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} + (-1)^k \binom{n-k}{n-k-1} \right] x^{n-1} + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} (\alpha+n)(\alpha+n-1) \dots (\alpha+k+1) \\ &\quad \times (\beta+n)(\beta+n-1) \dots (\beta+n-k+1) x^n + \dots \end{aligned}$$

Daí,

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} (\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1) \\ \times (\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1).$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+n+1) &= (\alpha+n)\Gamma(\alpha+n) \\ &= (\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)\Gamma(\alpha+k+1) \end{aligned}$$

e

$$(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1) = \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)}.$$

Assim, podemos escrever

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)}. \quad (2.5.2)$$

Proposição 2.1. *O coeficiente do termo de maior grau do polinômio de Jacobi $a_{n,n}$ também pode ser dado por*

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \quad (2.5.3)$$

Demonstração: De (2.5.2) e do Exercício 1.7, temos

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k} \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{\alpha+\beta+2n}{n} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Utilizando o produto interno

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle = \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx,$$

podemos mostrar o seguinte resultado.

Teorema 2.13. *Os polinômios de Jacobi satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade*

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, & m = n. \end{cases} \quad (2.5.4)$$

Demonstração: Consideremos, sem perda de generalidade, $n \leq m$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \frac{(-1)^m}{2^m m!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{d^m}{dx^m} [(1-x)^{\alpha+m} (1+x)^{\beta+m}] (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \right\} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \frac{d^m}{dx^m} [(1-x)^{\alpha+m} (1+x)^{\beta+m}] dx. \end{aligned}$$

Fazendo $y_m(x) = (1-x)^{\alpha+m} (1+x)^{\beta+m}$ e integrando m vezes por partes, obtemos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle = \frac{1}{2^m m!} \int_{-1}^1 \frac{d^m}{dx^m} (P_n^{(\alpha,\beta)}(x)) y_m(x) dx. \quad (2.5.5)$$

i) Seja $n < m$. Como $\frac{d^m}{dx^m} (P_n^{(\alpha,\beta)}(x)) = 0$, então, por (2.5.5),

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle = 0.$$

ii) Seja $n = m$. Logo, de (2.5.5),

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)} \rangle &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (P_n^{(\alpha,\beta)}(x)) y_n(x) dx \\ &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (P_n^{(\alpha,\beta)}(x)) (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx. \end{aligned}$$

Mas $\frac{d^n}{dx^n} (P_n^{(\alpha,\beta)}(x)) = a_{n,n} n!$. Então,

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)} \rangle = \frac{a_{n,n}}{2^n} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx.$$

Fazendo $x = 2t - 1$ na integral anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)} \rangle &= \frac{2a_{n,n}}{2^n} \int_0^1 2^{\alpha+n} (1-t)^{\alpha+n} 2^{\beta+n} t^{\beta+n} dt \\ &= 2^{\alpha+\beta+n+1} a_{n,n} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+n} t^{\beta+n} dt. \end{aligned}$$

Como $B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{(y-1)} t^{(x-1)} dt$, então

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)} \rangle = 2^{\alpha+\beta+n+1} a_{n,n} B(\beta + n + 1, \alpha + n + 1).$$

Usando Teorema 1.2, obtemos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)} \rangle = 2^{\alpha+\beta+n+1} a_{n,n} \frac{\Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 2)}.$$

Substituindo nesta equação o termo de maior grau, temos

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)} \rangle &= \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+n+1}}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} \frac{\Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 2)} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!} \frac{\Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Propriedade 2.1. *As seguintes igualdades são válidas*

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{\alpha + n}{n}, \quad (2.5.6)$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \binom{\beta + n}{n}. \quad (2.5.7)$$

Demonstração: Demonstremos apenas a propriedade (2.5.6). A segunda deixamos como exercício. De (2.5.1), obtemos

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{1}{2^n} \left[\frac{1}{n!} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) \cdots (\alpha + 1)(1 + x)^n \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) \cdots (\alpha + k + 1) \\ &\quad \times (\beta + n)(\beta + n - 1) \cdots (\beta + n - k + 1) \\ &\quad \left. \times (1 - x)^k (1 + x)^{n-k} \right]. \end{aligned}$$

Logo, para $x = 1$,

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(1) &= \frac{1}{2^n} \left[\frac{1}{n!} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) \cdots (\alpha + 1) 2^n + 0 \right] \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} = \binom{\alpha + n}{n}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Para obtermos a relação de recorrência de três termos, precisamos calcular os coeficientes γ_{n+1} , β_{n+1} e α_{n+1} dados em (2.2.3). Assim, de (2.2.4) e (2.5.3), temos

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \frac{a_{n+1, n+1}}{a_{n, n}} = \frac{\frac{1}{2^{(n+1)}(n+1)!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 3)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 2)}}{\frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}} \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 3) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 2) \Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}. \end{aligned}$$

Como $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, encontramos

$$\gamma_{n+1} = \frac{(\alpha + \beta + 2n + 2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)}. \quad (2.5.8)$$

De (2.2.4) e (2.5.4),

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{\gamma_{n+1} \langle P_n^{(\alpha, \beta)}, P_n^{(\alpha, \beta)} \rangle}{\gamma_n \langle P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}, P_{n-1}^{(\alpha, \beta)} \rangle} \\ &= \frac{\frac{(\alpha + \beta + 2n + 2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)}}{\frac{(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n - 1)}{2n(\alpha + \beta + n)}} \\ &\quad \times \frac{\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)}{n!(\alpha + \beta + 2n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}}{\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\beta + n)}{(n - 1)!(\alpha + \beta + 2n - 1)\Gamma(\alpha + \beta + n)}}. \end{aligned}$$

Simplificando, temos

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + 2n + 2)}{(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}. \quad (2.5.9)$$

Para calcularmos β_{n+1} vamos utilizar a igualdade (2.5.6). Substituindo $x = 1$ na relação de recorrência (2.2.3), obtemos

$$P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(1) = (\gamma_{n+1} - \beta_{n+1})P_n^{(\alpha, \beta)}(1) - \alpha_{n+1}P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(1).$$

De (2.5.6),

$$\frac{\Gamma(\alpha + n + 2)}{(n + 1)!\Gamma(\alpha + 1)} = (\gamma_{n+1} - \beta_{n+1})\frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!\Gamma(\alpha + 1)} - \alpha_{n+1}\frac{\Gamma(\alpha + n)}{(n - 1)!\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Assim,

$$\frac{(\alpha + n + 1)(\alpha + n)}{(n + 1)n} = (\gamma_{n+1} - \beta_{n+1})\frac{\alpha + n}{n} - \alpha_{n+1}.$$

Logo,

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} - \alpha_{n+1} \frac{n}{\alpha + n} - \frac{(\alpha + n + 1)}{(n + 1)}.$$

Substituindo (2.5.8) e (2.5.9), obtemos

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}. \quad (2.5.10)$$

Assim, a relação de recorrência para os polinômios de Jacobi é

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

onde $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$,

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{2(n + 1)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 3)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 2)\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)},$$

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}$$

e

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + 2n + 2)}{(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}.$$

Nas Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 a seguir, apresentamos gráficos de Polinômios de Jacobi em várias situações diferentes.

Na Figura 2.1 estão representados Polinômios de Jacobi de graus 1 a 4 para os mesmos valores de α e β . Observe que os zeros de polinômios de graus consecutivos se extrelaçam como vimos no Teorema 2.10.

Na Figura 2.2 estão representados Polinômios de Jacobi de mesmo grau, mas para valores distintos de α . Observe que à medida que o valor de α cresce, para cada i , $i = 1, 2, 3, 4$, a raiz $x_{4,i}$ decresce.

Na Figura 2.3 estão representados Polinômios de Jacobi de mesmo grau, mas para valores distintos de β . Observe que à medida que o valor de β cresce, para cada i , $1 \leq i \leq 4$, a raiz $x_{4,i}$ também cresce.

A demonstração de que os zeros dos Polinômios de Jacobi são funções crescentes do parâmetro α e decrescentes do parâmetro β pode ser encontrada no livro de Szegő [30].

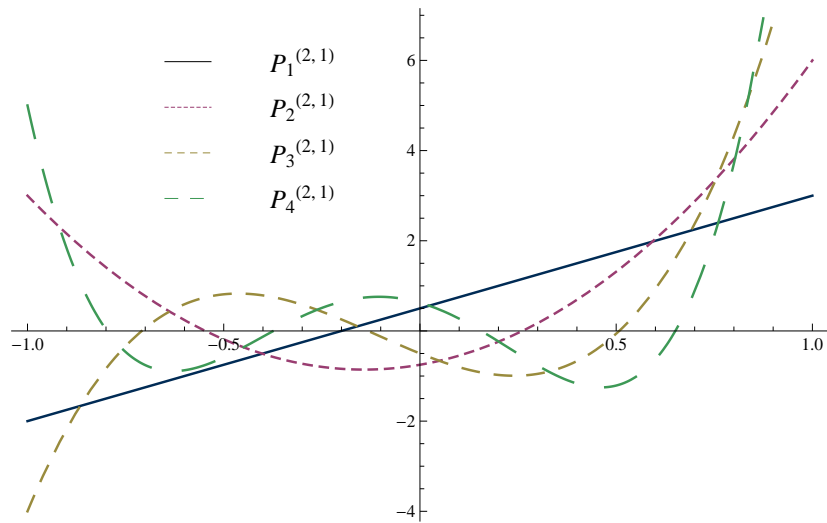


Figura 2.1: Polinômios de Jacobi de graus 1, 2, 3 e 4 para $\alpha = 2.0$ e $\beta = 1.0$

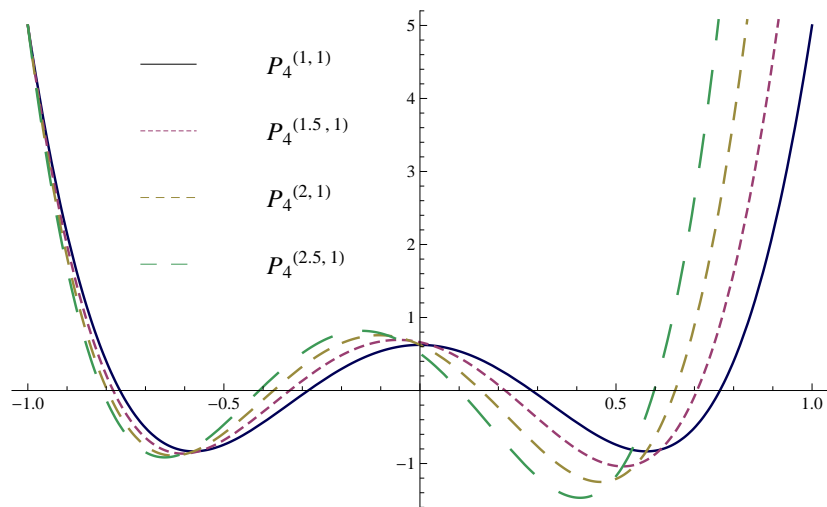


Figura 2.2: Polinômios de Jacobi de grau 4 para $\alpha = 1, 1.5, 2, 2.5$ e $\beta = 1$.

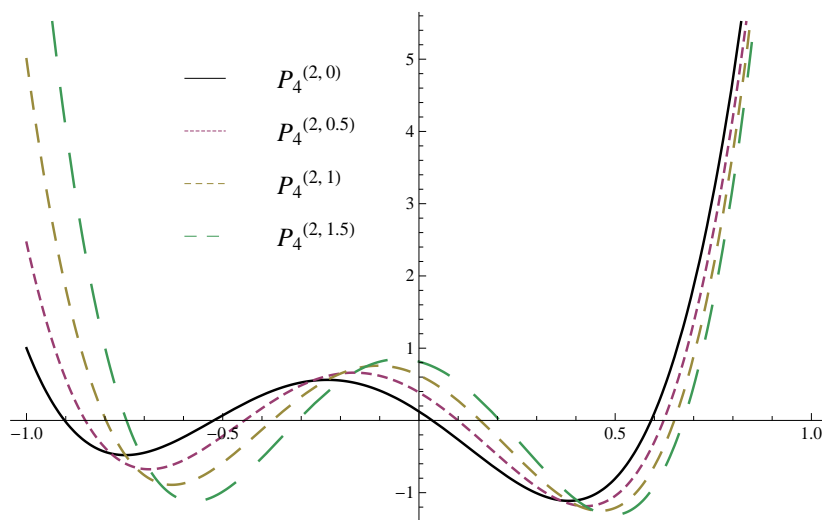


Figura 2.3: Polinômios de Jacobi de grau 4 para $\alpha = 2$ e $\beta = 0, 0.5, 1, 1.5$.

Polinômios de Legendre

São um caso especial dos polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 0$ e os denotamos por $P_n(x)$. Portanto, $w(x) = 1$. Assim, da fórmula de Rodrigues para os polinômios de Jacobi, temos

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n] = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n. \quad (2.5.11)$$

Do coeficiente do termo de maior grau para os polinômios de Jacobi, obtemos

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{(2n)!}{2^n [n!]^2}.$$

A relação de ortogonalidade para os polinômios de Legendre é, então, dada por

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Para obtermos a relação de recorrência de três termos, vamos tomar $\alpha = \beta = 0$ nos coeficientes α_{n+1} , β_{n+1} e γ_{n+1} dados, respectivamente,

pelas equações (2.5.9), (2.5.10) e (2.5.8). Assim,

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} = \frac{[2(n+1)]!}{2^{n+1}[(n+1)!]^2} \frac{2^n [n!]^2}{(2n)!} = \frac{2n+1}{n+1},$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} = \frac{2n+1}{n+1} \frac{n}{2n-1} \frac{2}{2n+1} \frac{2n-1}{2} = \frac{n}{n+1}$$

e

$$\beta_{n+1} = 0.$$

Portanto,

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.5.12)$$

onde $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$, pois, da fórmula de Rodrigues temos,

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{1}{2^{00}!} (x^2 - 1)^0 = 1, \\ P_1(x) &= \frac{1}{2 \times 1!} \frac{d(x^2 - 1)}{dx} = x. \end{aligned}$$

Na Figura 2.4 a seguir estão representados os Polinômios de Legendre de graus 1 a 4. Observe, conforme demonstrado no Teorema 2.10, a propriedade de entrelaçamento dos zeros de polinômios de graus consecutivos.

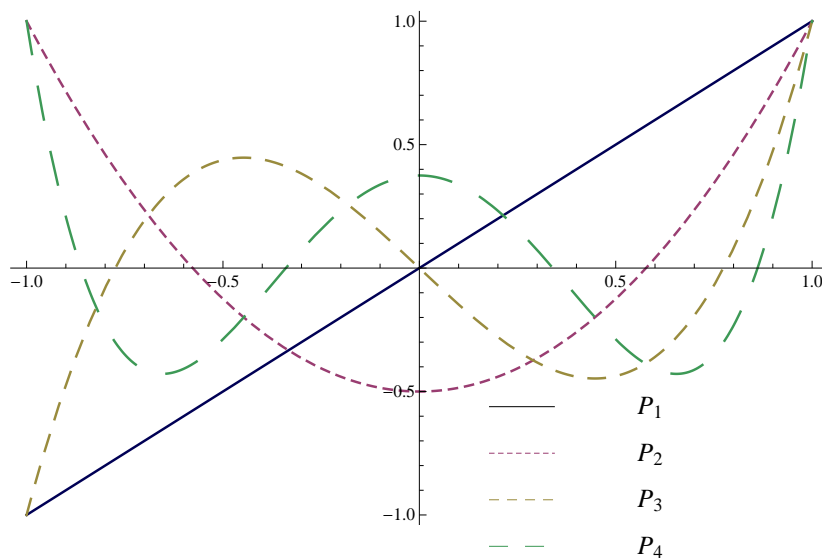


Figura 2.4: Polinômios de Legendre de graus 1, 2, 3 e 4.

Polinômios de Gegenbauer

Os polinômios de Gegenbauer ou polinômios Ultraféricos são um caso especial dos polinômios de Jacobi, com $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2} > -1$. Eles são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}$.

A notação usual para os polinômios Gegenbauer é $G_n^{(\lambda)}(x)$ e são dados por

$$G_n^{(\lambda)}(x) = \binom{2\alpha}{\alpha}^{-1} \binom{n+2\alpha}{\alpha} P_n^{(\alpha, \alpha)}(x),$$

onde $P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$ são os polinômios de Jacobi com $\beta = \alpha$.

Lembrando que

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}, \quad a \geq b,$$

podemos então escrever os polinômios de Gegenbauer como

$$\begin{aligned} G_n^{(\lambda)}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n + 2\alpha + 1)}{\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(n + \alpha + 1)} P_n^{(\alpha, \alpha)}(x) \\ &= \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n + \lambda + \frac{1}{2})} P_n^{(\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2})}(x), \end{aligned}$$

onde $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$. A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Gegenbauer é da forma

$$(n + 1)G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n + \lambda)xG_n^{(\lambda)}(x) - (n + 2\lambda - 1)G_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$

com $G_{-1}^{(\lambda)}(x) = 0$ e $G_0^{(\lambda)}(x) = 1$. Na forma mônica, satisfazem também à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$\hat{G}_{n+1}^{(\lambda)}(x) = x\hat{G}_n^{(\lambda)}(x) - \frac{n(n + 2\lambda - 1)}{4(n + \lambda)(n + \lambda - 1)}\hat{G}_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$

em que $\hat{G}_{-1}^{(\lambda)}(x) = 0$ e $\hat{G}_0^{(\lambda)}(x) = 1$.

Alguns casos especiais importantes são

$$G_n^{(\frac{1}{2})}(x) = P_n(x) \quad \text{e} \quad G_n^{(1)}(x) = U_n(x),$$

onde $P_n(x)$ são os polinômios de Legendre e $U_n(x)$ são os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie que veremos mais adiante.

Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie

Os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie são denotados por $T_n(x)$ e são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$. Observe que são múltiplos dos polinômios de Jacobi para $\alpha = \beta = -1/2$.

Para $x \in [-1, 1]$ podem ser definidos por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5.13)$$

Usando a seguinte relação trigonométrica

$$\cos(n + 1)\theta + \cos(n - 1)\theta = 2 \cos(n\theta) \cos \theta$$

e fazendo $x = \cos \theta$ na equação (2.5.13) acima, obtemos a relação de recorrência de três termos

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.

Calculando os primeiros polinômios, veremos como se comportam os coeficientes dos termos de maior grau. Assim,

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \cos(0 \arccos x) = 1 \\ T_1(x) &= \cos(\arccos x) = x = 2^0 x \\ T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 2^2 x^3 - 3x \\ &\vdots \\ T_n(x) &= 2^{n-1} x^n + \dots \quad (\text{por recorrência}). \end{aligned}$$

Logo, $a_{n,n} = 2^{n-1}$, $n \geq 1$.

Teorema 2.14. *Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie satisfazem*

$$\langle T_n, T_m \rangle = \begin{cases} \pi, & \text{se } m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n > 0, \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle &= \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) w(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $x = \cos \theta$, obtemos

$$\langle T_n, T_m \rangle = - \int_{\pi}^0 \frac{\cos(n\theta) \cos(m\theta) \operatorname{sen} \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta.$$

i) Se $m = n = 0$,

$$\langle T_0, T_0 \rangle = \int_0^\pi \cos^2(0) d\theta = \pi.$$

ii) Se $m = n > 0$,

$$\langle T_n, T_n \rangle = \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta.$$

Logo, integrando por partes, temos

$$\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(n\theta) d\theta = \int_0^\pi \frac{\text{sen}(n\theta)n\text{sen}(n\theta)d\theta}{n} = \int_0^\pi [1 - \cos^2(n\theta)] d\theta,$$

ou seja,

$$\int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta = \int_0^\pi d\theta - \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta.$$

Assim,

$$2 \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(n\theta) d\theta = \int_0^\pi d\theta = \pi.$$

Portanto,

$$\langle T_n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2}.$$

iii) Seja $m \neq n$.

Consideremos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos(m+n)\theta &= \cos(m\theta)\cos(n\theta) - \text{sen}(m\theta)\text{sen}(n\theta), \\ \cos(m-n)\theta &= \cos(m\theta)\cos(n\theta) + \text{sen}(m\theta)\text{sen}(n\theta). \end{aligned}$$

Somando-as e integrando ambos os membros da equação resultante, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta] d\theta &= 2 \int_0^\pi \cos(m\theta)\cos(n\theta) d\theta \\ &= 2 \langle T_n, T_m \rangle. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} 2 \langle T_n, T_m \rangle &= \int_0^\pi \cos(m+n)\theta d\theta + \int_0^\pi \cos(m-n)\theta d\theta \\ &= \frac{\text{sen}(m+n)\theta}{m+n} \Big|_0^\pi + \frac{\text{sen}(m-n)\theta}{m-n} \Big|_0^\pi = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Na Figura 2.5 a seguir estão representados Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie de graus 1 a 4. Observe a propriedade de entrelaçamento dos zeros de polinômios de graus consecutivos demonstrado no Teorema 2.10. Observe, também, que os mínimos e máximos dos Polinômios de Chebyshev no intervalo $[-1, 1]$ são todos iguais a 1.

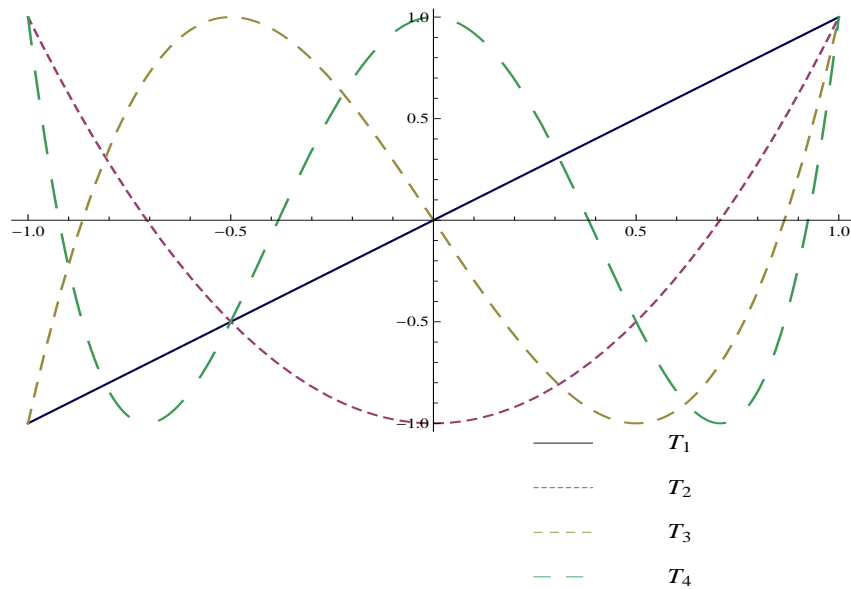


Figura 2.5: Polinômios de Chebyshev 1ª espécie

Observações:

1. Note que fazendo $\alpha = \beta = -1/2$ na função peso dos polinômios de Jacobi obtemos $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Assim,

$$T_n(x) = 2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x).$$

De fato, pelo Corolário 2.1, sabemos que $T_n(x) = c_n P_n^{(-1/2, -1/2)}(x)$. Considerando $a_{n,i}^T$, $i = 1, 2, \dots, n$, os coeficientes do polinômio de Chebyshev e $a_{n,j}^P$, $j = 1, 2, \dots, n$, os coeficientes do polinômio de Jacobi para $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, então,

$$a_{n,n}^T x^n + a_{n,n-1}^T x^{n-1} + \dots + a_{n,0}^T = c_n (a_{n,n}^P x^n + a_{n,n-1}^P x^{n-1} + \dots + a_{n,0}^P).$$

Logo,

$$c_n = \frac{a_{n,n}^T}{a_{n,n}^P} = \frac{2^{n-1}}{\frac{1}{2^{2n} n!} \Gamma(2n)} = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} = 2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1}.$$

2. Para calcularmos as raízes de $T_n(x)$, considere a equação

$$\cos(n\theta) = 0, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi,$$

cuja solução é

$$(n\theta)_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

ou, ainda,

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, as raízes dos Polinômios de Chebyshev são dadas por

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5.14)$$

3. Os pontos de máximo e de mínimo de $T_n(x)$ são os pontos onde

$$\cos(n\theta) = \pm 1, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi,$$

ou seja, são os pontos

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Logo, os pontos extremos são dados por

$$m_{n,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie

Os Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie, $U_n(x)$, são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ e são definidos por

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen}\theta}, \quad x \in [-1, 1],$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$, onde $x = \cos\theta$ e $\theta \in [0, \pi]$.

Observe que também são múltiplos dos polinômios de Jacobi para $\alpha = \beta = 1/2$.

Usando a seguinte relação trigonométrica

$$\text{sen}(n+2)\theta + \text{sen}(n\theta) = 2\cos\theta\text{sen}(n+1)\theta,$$

com $x = \cos\theta$, obtemos a relação de recorrência de três termos

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

em que $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = 2x$.

Calculando os primeiros polinômios, vemos como se comportam os coeficientes dos termos de maior grau.

$$\begin{aligned} U_0(x) &= \frac{\text{sen}[\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = 1 \\ U_1(x) &= \frac{\text{sen}[2\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\text{sen}\theta\cos\theta}{\text{sen}\theta} = 2x \end{aligned}$$

e, pela relação de recorrência,

$$\begin{aligned} U_2(x) &= 2xU_1(x) - U_0(x) = 2^2x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 2xU_2(x) - U_1(x) = 2^3x^3 - 4x \\ &\vdots \\ U_n(x) &= 2^nx^n + \dots \end{aligned}$$

Portanto, por recorrência, obtemos $a_{n,n} = 2^n$, $n \geq 0$.

Teorema 2.15. *A relação de ortogonalidade para os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie é dada por*

$$\langle U_n, U_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n, \end{cases}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_m \rangle &= \int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)w(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\text{sen}[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\text{sen}[(m+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

Fazendo $x = \cos \theta$ na integral acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_m \rangle &= - \int_{\pi}^0 \frac{\text{sen}[(n+1)\theta]\text{sen}[(m+1)\theta]}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} \text{sen}\theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \text{sen}[(n+1)\theta]\text{sen}[(m+1)\theta] d\theta. \end{aligned}$$

i) Se $m = n$,

$$\langle U_n, U_n \rangle = \int_0^{\pi} \text{sen}[(n+1)\theta]\text{sen}[(n+1)\theta] d\theta.$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\langle U_n, U_n \rangle &= \int_0^\pi \cos[(n+1)\theta] \cos[(n+1)\theta] d\theta \\ &= \int_0^\pi \{1 - \text{sen}^2[(n+1)\theta]\} d\theta \\ &= \pi - \int_0^\pi \text{sen}^2[(n+1)\theta] d\theta = \pi - \langle U_n, U_n \rangle.\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle U_n, U_n \rangle = \frac{\pi}{2}.$$

ii) Seja $m \neq n$. Como

$$\langle U_n, U_m \rangle = \int_0^\pi \text{sen}[(n+1)\theta] \text{sen}[(m+1)\theta] d\theta,$$

integrando duas vezes por partes, temos

$$\begin{aligned}\langle U_n, U_m \rangle &= \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2 \int_0^\pi \text{sen}[(n+1)\theta] \text{sen}[(m+1)\theta] d\theta \\ &= \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2 \langle U_n, U_m \rangle.\end{aligned}$$

Como $m \neq n$, então $\left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2 \neq 1$. Logo, $\langle U_n, U_m \rangle = 0$. ■

Observações:

1. Note que fazendo $\alpha = \beta = 1/2$ na função peso dos polinômios de Jacobi obtemos $w(x) = \sqrt{1-x^2}$. Logo,

$$U_n(x) = 2^{2n} \binom{2n+1}{n+1}^{-1} P_n^{(1/2, 1/2)}(x).$$

A demonstração desse fato é análoga à feita para os polinômios de Tchebyshev de 1ª espécie.

2. As raízes de $U_n(x)$ são os pontos onde

$$\text{sen}[(n+1)\theta] = 0, \quad \text{para } 0 < \theta < \pi,$$

ou seja, são dados por

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, as raízes de $U_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, são os pontos

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

3. Como

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

então

$$T'_n(x) = \text{sen}(n \arccos x) \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} = nU_{n-1}(x).$$

Portanto, as raízes de $U_{n-1}(x)$ são os pontos de máximo e mínimo de $T_n(x)$.

A Figura 2.6, que apresentamos a seguir, mostra o gráfico de Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie de graus 1 a 4. Observe a propriedade de entrelaçamento dos zeros de polinômios de graus consecutivos (Teorema 2.10). Comparando o Polinômio de Chebyshev de 2ª espécie de grau 3, $U_3(x)$, com o Polinômio de Chebyshev de 1ª espécie de grau 4, $T_4(x)$ (veja Figura 2.5), observe que os zeros de U_3 são os pontos de máximo e mínimo locais de T_4 .

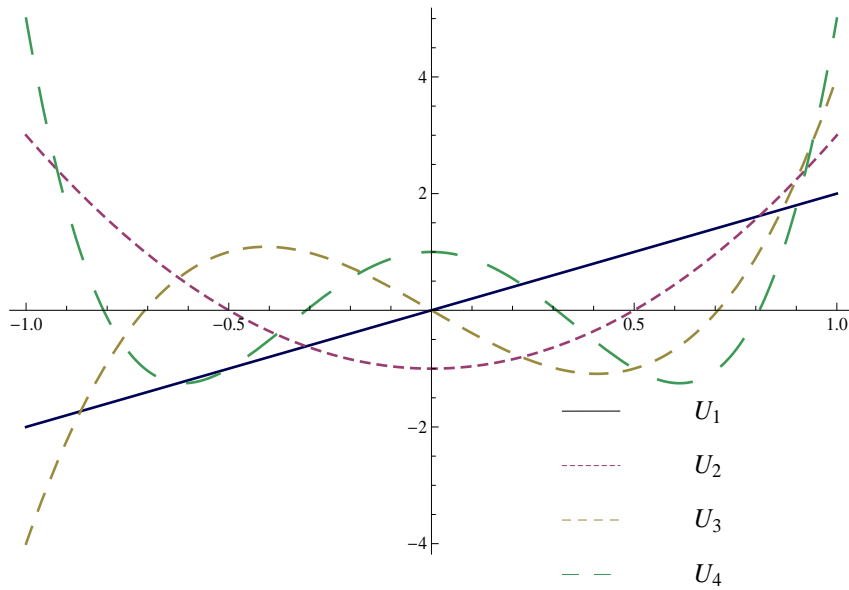


Figura 2.6: Polinômios de Chebyshev 2^a de espécie

2.5.2 Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre, denotados por $L_n^{(\alpha)}(x)$, podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues dada por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x}],$$

(ver Krylov [20, pag.34], observamos que Chihara [6, pag.145] apresenta um múltiplo desta fórmula).

Nesta seção mostraremos que são polinômios ortogonais, no intervalo $[0, \infty)$, com relação à função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$.

Derivando a fórmula acima pela regra de Leibnitz com $f(x) = x^{\alpha+n}$

e $g(x) = e^{-x}$, obtemos

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) &= (-1)^n x^{-\alpha} e^x \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) \dots (\alpha + j + 1) \\ &\quad \times x^{\alpha+j} (-1)^j e^{-x} \\ &= (-1)^n \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) \dots (\alpha + j + 1) x^j. \end{aligned}$$

Como o coeficiente do termo de maior grau aparece quando $j = n$, então

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) &= (-1)^n \left[(-1)^n \binom{n}{n} x^n \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} (\alpha + n) x^{n-1} + \dots \right] \\ &= x^n - n(\alpha + n)x^{n-1} + \dots . \end{aligned}$$

Daí, $a_{n,n} = 1$. Os polinômios de Laguerre como definidos acima são, portanto, mônicos.

Teorema 2.16. *A relação de ortogonalidade para os polinômios de Laguerre é dada por*

$$\begin{aligned} \langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle &= \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ n! \Gamma(n + \alpha + 1), & \text{se } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Demonstração: Consideremos, sem perda de generalidade, $m \leq n$.

$$\begin{aligned} \langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle &= \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &= (-1)^n \int_0^\infty \frac{d^n(x^{\alpha+n} e^{-x})}{dx^n} L_m^{(\alpha)}(x) dx. \end{aligned}$$

Considerando $y_n(x) = x^{\alpha+n}e^{-x}$, obtemos $\frac{d^n(x^{\alpha+n}e^{-x})}{dx^n} = y_n^{(n)}(x)$. Logo,

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x)(-1)^n y_n^{(n)}(x) dx.$$

Integrando n vezes por partes, obtemos

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^\infty \frac{d^n[L_m^{(\alpha)}(x)]}{dx^n} y_n(x) dx.$$

i) Para $m < n$

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^\infty [L_m^{(\alpha)}(x)]^{(n)} y_n(x) dx = 0,$$

pois $[L_m^{(\alpha)}(x)]^{(n)} \equiv 0$.

ii) Para $m = n$,

$$\begin{aligned} \langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x)]^{(n)} y_n(x) dx \\ &= \int_0^\infty a_{n,n} n! y_n(x) dx \\ &= n! \int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Como $\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx, y > 0$, então,

$$\int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-x} dx = \Gamma(n + \alpha + 1)$$

e chegamos ao resultado desejado. ■

Dos resultados acima, obtemos facilmente que

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{n(n-1)!(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{(n-1)!\Gamma(\alpha+n)} = n(\alpha+n).$$

Vamos agora calcular $\beta_{n+1} = \frac{\langle xL_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle}{\langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle}$. Sabemos que

$$L_n^{(\alpha)}(x) = x^n - n(n + \alpha)x^{n-1} + \dots .$$

Logo, obtemos

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = x^{n+1} - (n + 1)(n + 1 + \alpha)x^n + \dots$$

e

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = x^{n+1} - n(n + \alpha)x^n + \dots .$$

Daí,

$$xL_n^{(\alpha)}(x) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = [(n + 1)(n + \alpha + 1) - n(n + \alpha)]x^n + \dots . \quad (2.5.15)$$

Mas,

$$\begin{aligned} & [(n + 1)(n + \alpha + 1) - n(n + \alpha)]L_n^{(\alpha)}(x) \\ &= [(n + 1)(n + \alpha + 1) - n(n + \alpha)]x^n \\ & \quad - [(n + 1)(n + \alpha + 1) - n(n + \alpha)]n(n + \alpha)x^{n-1} + \dots . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & [(n + 1)(n + \alpha + 1) - n(n + \alpha)]x^n \\ &= [(n + 1)(n + \alpha + 1) - n(n + \alpha)]L_n^{(\alpha)}(x) \\ & \quad + [(n + 1)(n + \alpha + 1) - n(n + \alpha)]n(n + \alpha)x^{n-1} + \dots \\ &= [(n + 1)(n + \alpha + 1) - n(n + \alpha)]L_n^{(\alpha)}(x) + q_{n-1}(x), \end{aligned}$$

onde $q_{n-1}(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$. Substituindo em (2.5.15) podemos escrever

$$\begin{aligned} xL_n^{(\alpha)}(x) &= L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + [(n + 1)(n + \alpha + 1) - n(n + \alpha)]L_n^{(\alpha)}(x) \\ & \quad + q_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Fazendo o produto interno dessa expressão pelo polinômio $L_n^{(\alpha)}(x)$, temos

$$\begin{aligned} \langle xL_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle &= \langle L_{n+1}^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle + [(n + 1)(n + \alpha + 1) - n(n + \alpha)] \\ & \quad \times \langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle + \langle q_{n-1}, L_n^{(\alpha)} \rangle. \end{aligned}$$

Como, pelo Teorema 2.2, $\langle q_{n-1}, L_n^{(\alpha)} \rangle = 0$, então

$$\frac{\langle xL_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle}{\langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle} = [(n+1)(n+\alpha+1) - n(n+\alpha)],$$

e, portanto, $\beta_{n+1} = 2n + \alpha + 1$.

Assim, a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Laguerre é dada por

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - (2n + \alpha + 1))L_n^{(\alpha)}(x) - n(n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1.$$

Podemos, então, calcular os primeiros polinômios de Laguerre:

$$\begin{aligned} L_0^{(\alpha)}(x) &= (-1)^0 x^{-\alpha} e^x x^\alpha e^{-x} = 1. \\ L_1^{(\alpha)}(x) &= (-1)x^{-\alpha} e^x \frac{d}{dx}(x^{\alpha+1} e^{-x}) = x - \alpha - 1. \\ L_2^{(\alpha)}(x) &= (x - 3 - \alpha)(x - \alpha - 1) - (\alpha + 1)(1) \\ &= x^2 - 2(\alpha + 2)x + (\alpha + 2)(\alpha + 1). \end{aligned}$$

Nas Figuras 2.7 e 2.8 observamos, respectivamente, a propriedade de entrelaçamento dos nós (veja Teorema 2.10) e o crescimento da raiz $x_{4,i}$ com α para cada i . Para demonstração de que os zeros dos Polinômios de Laguerre são funções crescentes de α sugerimos o livro de Szegő [30].

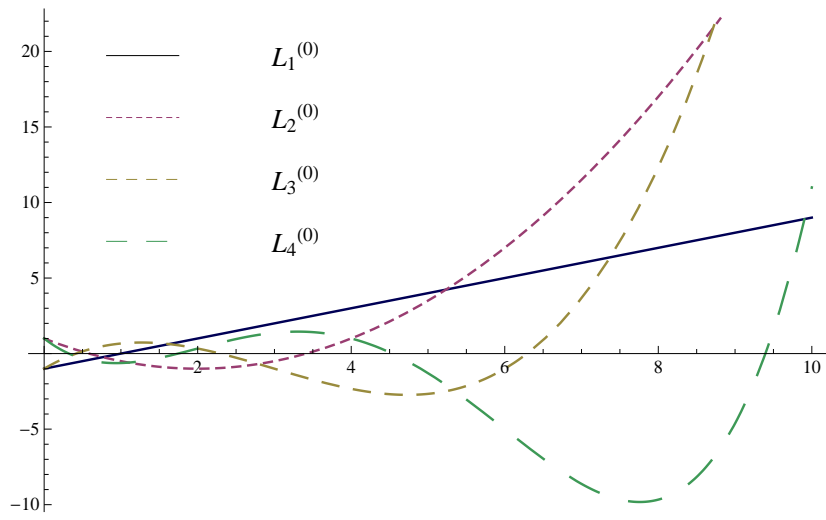


Figura 2.7: Polinômios de Laguerre de graus de 1 a 4 e $\alpha = 0$.

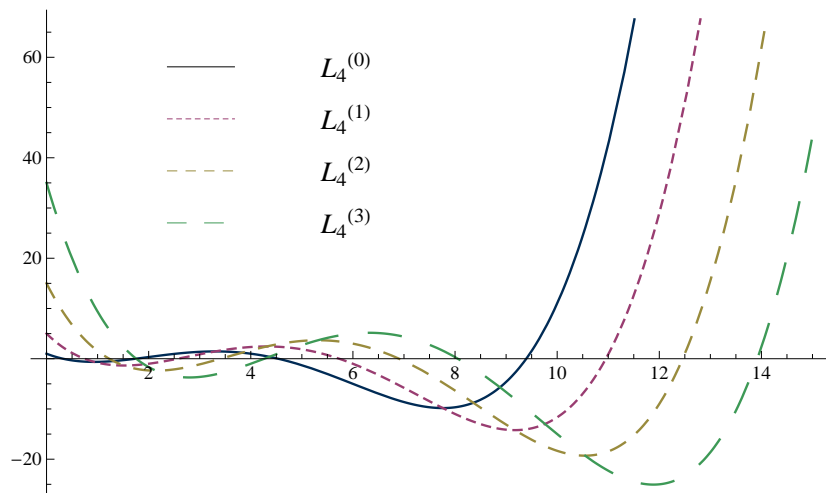


Figura 2.8: Polinômios de Laguerre de grau 4 e $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

2.5.3 Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite, denotados por $H_n(x)$, podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues dada por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}], \quad (2.5.16)$$

(ver Krylov [20, pag.33] ou Chihara [6, pag.145]).

Nesta seção, veremos que esses polinômios formam uma sequência de polinômios ortogonais, no intervalo $(-\infty, \infty)$, com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$.

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Hermite, obtida através das equações (2.2.3) (2.2.4) e (2.5.16), é dada por

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = 2x$.

Calculando os primeiros polinômios, podemos obter os coeficientes dos termos de maior grau

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 = 2^0 \\ H_1(x) &= 2x = 2^1 x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 = 2^2 x^2 - 2 \\ &\vdots \\ H_n(x) &= 2^n x^n + \dots \end{aligned}$$

Logo, por recorrência, $a_{n,n} = 2^n$.

Teorema 2.17. *Os polinômios de Hermite satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade*

$$\langle H_n, H_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (2.5.17)$$

Demonstração: Consideremos, sem perda de generalidade, $m \leq n$.

i) Seja $m < n$. Substituindo $H_n(x)$ por sua fórmula de Rodrigues e chamando $\phi(x) = e^{-x^2}$, obtemos

$$\langle H_n, H_m \rangle = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \phi^{(n)}(x) dx.$$

Integrando por partes,

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(n-1)}(x) H'_m(x) dx.$$

Logo, após integrar n vezes por partes, temos

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(n)}(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{H_m^{(n)}(x)}_{=0} e^{-x^2} dx = 0.$$

ii) Se $m = n$,

$$\langle H_n, H_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \underbrace{H_n^{(n)}(x)}_{2^n n!} dx = 2^n n! \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}_{\sqrt{\pi}}. \quad \blacksquare$$

Seja $y(x) = e^{-x^2}$, então

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x).$$

Derivando esta última expressão, obtemos

$$y^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{-x^2} [2xH_n(x) - H'_n(x)].$$

Portanto, obtemos uma outra relação para os polinômios de Hermite,

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x).$$

Na Figura 2.9 também podemos observar que os zeros de polinômios de graus consecutivos se intercalam, conforme foi demonstrado no Teorema 2.10.

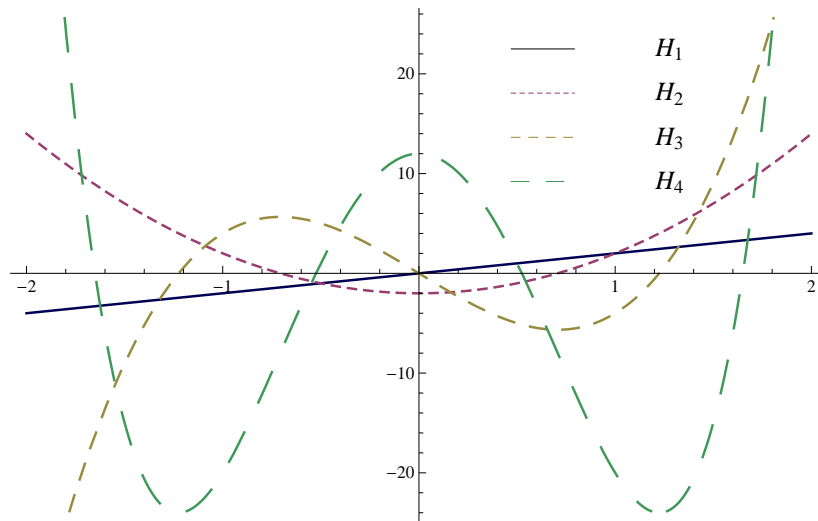


Figura 2.9: Polinômios de Hermite de graus de 1 a 4.

2.6 Exercícios

Sessão 2.1

Exercício 2.1. *Sejam $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$, $m \geq 1$, pertencentes a uma sequência de polinômios ortogonais. Sem usar o fato de serem dois a dois ortogonais, demonstre que $\{P_j(x)\}_{j=0}^m$ são linearmente independentes.*

Exercício 2.2. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO em $[a, b]$ com relação à função peso $\omega(x)$. Mostre que se $\pi(x)$ um polinômio e*

$$\int_a^b P_n(x)\pi(x)\omega(x)dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

então $\pi(x) \equiv 0$.

Sessão 2.2

Exercício 2.3. Escrever a relação entre ρ_n e $\tilde{\rho}_n$ dados no Teorema 2.2.

Exercício 2.4. Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO com relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx.$$

Seja $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x)$. Mostre, então, que

$$c_k = \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Exercício 2.5. Mostre que

$$Q_n(x) = \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x - y} \omega(y) dy, \quad n = 1, 2, \dots,$$

onde $P_n(x) \in SPO$ em $[a, b]$ com relação à função peso $\omega(x)$, satisfaz à mesma relação de recorrência que $P_n(x)$. Ache as condições iniciais.

Exercício 2.6. Usando a relação

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-j-1} y^j, \quad (2.6.1)$$

mostre que os polinômios $Q_n(x)$ definidos acima são de grau $n - 1$.

Exercício 2.7. Demonstre a relação (2.6.1) acima.

Exercício 2.8. Demonstre o Teorema 2.7 sobre o Identidade de Cristo-ffel-Darboux para os polinômios ortonormais.

Sugestão: Use o Teorema 2.6 e as equações (2.2.10) e (2.2.11).

Sessão 2.4

Exercício 2.9. Demonstre que se ξ_k e ξ_{k+1} são dois zeros consecutivos de $P_n(x) \in SPO$, então existe $\eta_k \in (\xi_k, \xi_{k+1})$ que é zero de $P_{n+1}(x)$.

Sessão 2.5

Exercício 2.10. *Demonstre a Propriedade 2.1 (veja 2.5.7):*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \frac{\Gamma(\beta + n + 1)}{n! \Gamma(\beta + 1)},$$

em que $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ são os polinômios de Jacobi.

Exercício 2.11. *Mostre as seguintes igualdades:*

$$P_{2n}^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2n + \alpha + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(2n + 1)} P_n^{(\alpha,-1/2)}(2x^2 - 1)$$

$$P_{2n+1}^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2n + \alpha + 2)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(2n + 2)} x P_n^{(\alpha,1/2)}(2x^2 - 1)$$

Para os exercícios de 2.12 a 2.20, $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ é a sequência de polinômios ortogonais de Legendre.

Exercício 2.12. *Demonstre que*

- $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1)P_n(x).$
- $(1 - x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x).$
- $P_n(x) = xP_{n-1}(x) + \frac{x^2 - 1}{n}P'_n(x).$

Exercício 2.13. *Demonstre que*

- $\int_{-1}^1 xP_n(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{2n}{4n^2 - 1}, n \geq 1.$
- $\int_{-1}^1 P_n(x)P'_{n+1}(x)dx = 2, n \geq 0.$
- $\int_{-1}^1 xP'_n(x)P_n(x)dx = \frac{2n}{2n + 1}, n \geq 0.$

Exercício 2.14. *Seja $\omega(x) = (x^2 - 1)^n$ e $\omega^{(k)}(x)$ sua derivada de ordem k , para $k = 1, 2, \dots$. Mostre que $\omega(x)$ e $\omega^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, se anulam para $x = 1$ e $x = -1$.*

Exercício 2.15. Usando o exercício anterior e integração por partes, mostre que

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0, \quad 0 \leq k < n.$$

Exercício 2.16. Partindo da Fórmula de Rodrigues para os polinômios de Legendre e usando a regra de Leibnitz, mostre que:

$$P'_{n+1}(x) = \frac{1}{2(n+1)}(x^2 - 1)P''_n(x) + \frac{n+2}{n+1}xP'_n(x) + \frac{n+2}{2}P_n(x). \quad (2.6.2)$$

Exercício 2.17. Seja $P_n(x)$ o polinômio de Legendre de grau n . Demonstre que ele satisfaz à equação diferencial de segunda ordem:

$$(x^2 - 1)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0. \quad (2.6.3)$$

Exercício 2.18. Mostre que a equação (2.6.3) é equivalente a:

$$[(1 - x^2)P'_n(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Exercício 2.19. Demonstre que

$$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x). \quad (2.6.4)$$

Sugestão: Use as equações (2.6.3) e (2.6.2).

Exercício 2.20. Demonstre que

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x).$$

Sugestão: Use a equação (2.6.4) e relação de recorrência de três termos para os polinômios de Legendre.

Exercício 2.21. Demonstre as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} G_n^{(\lambda)}(1) &= \binom{n+2\lambda-1}{n} \\ G_n^{(\lambda)}(-x) &= (-1)^n G_n^{(\lambda)}(x). \end{aligned}$$

Exercício 2.22. Seja $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ SPO de Chebyshev de 1ª espécie. Demonstre as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} a) \int T_0(x) dx &= T_1(x) \\ b) \int T_1(x) dx &= \frac{1}{4} T_2(x) \\ c) \int T_n(x) dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right], \quad n > 1. \end{aligned}$$

Exercício 2.23. Demonstre que os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade:

$$\langle U_n(x), U_m(x) \rangle = \begin{cases} \pi/2, & n = m \geq 0, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

e à relação de recorrência de três termos:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),$$

para $n \geq 1$, com $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = 2x$.

Exercício 2.24. Usando o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, construa os 3 primeiros polinômios de Laguerre, $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$. Sabe-se que são ortogonais segundo o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx.$$

Exercício 2.25. Seja $y = H_n(x)$ o polinômio de Hermite de grau n . Mostre que ele satisfaz à seguinte equação diferencial:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Capítulo 3

Quadratura Gaussiana

Como uma aplicação dos polinômios ortogonais, faremos, nesta seção, um estudo sobre as Fórmulas de Quadratura Gaussianas, cujos nós são os zeros de polinômios ortogonais. Com essa escolha dos nós, a precisão da fórmula é a maior possível. Para os que desejarem se aprofundar neste assunto, os livros [9, 10, 20, 29] são ótimas referências.

3.1 Introdução

Consideremos integrais da forma

$$I(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx,$$

onde $w(x)$ é uma função peso em $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Sejam $a \leq x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n} \leq b$, n pontos distintos em $[a, b]$. Da mesma forma que fizemos no Capítulo 1, Seção 1.3, usando a fórmula de Lagrange (1.3.1) para construirmos o polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre os n pontos distintos $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$,

obtemos

$$\begin{aligned}
 I(f) &= \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n \frac{\pi(x)}{(x-x_{n,k})\pi'(x_{n,k})} f(x_{n,k}) + R_{n-1}(x) \right] w(x) dx \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left[\frac{1}{\pi'(x_{n,k})} \int_a^b \frac{\pi(x)}{x-x_{n,k}} w(x) dx \right] f(x_{n,k}) \right\} \\
 &\quad + \int_a^b R_{n-1}(x) w(x) dx.
 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Logo, podemos escrever

$$I(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k}f(x_{n,k}) + E_n(f), \tag{3.1.2}$$

cujos pesos $W_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, são dados por

$$W_{n,k} = \frac{1}{\pi'(x_{n,k})} \int_a^b \frac{\pi(x)}{x-x_{n,k}} w(x) dx \tag{3.1.3}$$

e o erro, por

$$E_n(f) = \int_a^b R_{n-1}(x)w(x)dx.$$

3.2 Fórmulas de Quadratura Gaussianas

Teorema 3.1. *A regra de quadratura (3.1.2) com pesos dados por (3.1.3) é exata para polinômios de grau no máximo $2n-1$ se, e somente se,*

i) é interpolatória;

ii) $\pi(x)$ é ortogonal em (a,b) , com relação à função peso $w(x)$, a todo polinômio de grau menor que n .

Demonstração: (\implies)

i) imediato.

ii) Seja um polinômio $Q(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ e $\pi(x)$ o polinômio dos nós. Mostremos que $\langle \pi, Q \rangle = 0$.

Sabemos que

$$\langle \pi, Q \rangle = \int_a^b \pi(x)Q(x)w(x)dx.$$

Como $\pi(x)Q(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$ e $\pi(x_{n,k}) = 0$, por hipótese

$$\langle \pi, Q \rangle = \sum_{k=1}^n W_{n,k} \pi(x_{n,k})Q(x_{n,k}) = 0.$$

(\Leftarrow) Seja $P(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Logo, podemos escrevê-lo da forma

$$P(x) = \pi(x)Q(x) + r(x), \quad \text{onde } Q(x), r(x) \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Observe que $P(x_{n,k}) = r(x_{n,k})$. Mas,

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)w(x)dx &= \int_a^b [\pi(x)Q(x) + r(x)] w(x)dx \\ &= \int_a^b \pi(x)Q(x)w(x)dx + \int_a^b r(x)w(x)dx. \end{aligned}$$

Pela hipótese *ii*),

$$\int_a^b \pi(x)Q(x)w(x)dx = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)w(x)dx &= \int_a^b r(x)w(x)dx \stackrel{i)}{=} \sum_{k=1}^n W_{n,k} r(x_{n,k}) \\ &= \sum_{k=1}^n W_{n,k} P(x_{n,k}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

As fórmulas de quadratura com n pontos que têm precisão $2n - 1$ são conhecidas como *Fórmulas de Quadratura Gaussianas*.

Uma importante aplicação das Fórmulas de Quadratura Gaussianas é o resultado a seguir sobre os zeros dos polinômios ortogonais.

Teorema 3.2. *Entre quaisquer dois zeros de $P_N(x)$ existe pelo menos um zero de $P_n(x)$, $n > N \geq 2$.*

Demonstração: Suponha que, para algum $n > N$, $P_n(x)$ não possui zeros entre $x_{N,p}$ e $x_{N,p+1}$ ($1 \leq p < N$). Faça

$$\rho(x) = \frac{P_N(x)}{(x - x_{N,p})(x - x_{N,p+1})};$$

logo, $\rho(x)$ tem grau $N-2$ e $\rho(x)P_N(x) \geq 0$, para todo $x \notin (x_{N,p}, x_{N,p+1})$.

De acordo com o Teorema 3.1, na quadratura de Gauss com n pontos temos que, para $P(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$,

$$\int_a^b P(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k}P(x_{n,k}),$$

e, como $n > N$, segue que

$$\int_a^b \rho(x)P_N(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k}\rho(x_{n,k})P_N(x_{n,k}).$$

Entretanto, $\rho(x)P_N(x)$ não pode se anular em todo $x_{n,k}$, novamente pelo fato de que $n > N$. Isto, aliado ao fato de que $\rho(x)P_N(x) \geq 0$, para todo $x \notin (x_{N,p}, x_{N,p+1})$, demonstra que

$$\int_a^b \rho(x)P_N(x)w(x)dx > 0,$$

o que entra em contradição com o fato de que $P_N(x)$ é o polinômio ortogonal em (a, b) relativamente a $w(x)$.

Portanto, para $n > N$, existe $x_{n,k}$ ($1 \leq k \leq n$) tal que $x_{N,p} < x_{n,k} < x_{N,p+1}$. ■

Teorema 3.3. *Se a fórmula de quadratura (3.1.2) é exata para polinômios de grau menor ou igual a $2n - 2$, então os pesos $W_{n,k}$, $k = 1, \dots, n$, são positivos.*

Demonstração: Considere $P(x) \in \mathbb{P}_{2n-2}$, dado da seguinte forma

$$P(x) = \left[\frac{\pi(x)}{x - x_{n,k}} \right]^2. \text{ Então, pelo teorema anterior,}$$

$$\begin{aligned} 0 < \int_a^b P(x)w(x)dx &= \int_a^b \left[\frac{\pi(x)}{x - x_{n,k}} \right]^2 w(x)dx \\ &= \sum_{j=1}^n W_{n,j} \left[\frac{\pi(x_{n,j})}{x_{n,j} - x_{n,k}} \right]^2 = W_{n,k} [\pi'(x_{n,k})]^2 \end{aligned}$$

Logo, $W_{n,k} > 0$, para $k = 1, 2, \dots, n$. ■

Apresentaremos a seguir algumas consequências do que vimos anteriormente.

1. Seja $P_n(x)$ um polinômio ortogonal em (a, b) com relação à função peso $w(x)$. Então, $P_n(x) = c_n \pi(x)$ onde $\pi(x)$ é o polinômio dos nós, ortogonal em (a, b) com relação à função peso $w(x)$. Logo, $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, que são os zeros de $\pi(x)$, são, também, os zeros de $P_n(x)$. Como, $P'_n(x) = c_n \pi'(x)$, obtemos a seguinte expressão para os pesos $W_{n,k}$:

$$W_{n,k} = \frac{1}{P'_n(x_{n,k})} \int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_{n,k}} w(x) dx, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.2.1)$$

onde $P_n(x) \in \{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ que é uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) , em relação à função peso $w(x)$.

2. Sabemos que os polinômios associados aos ortogonais são definidos por

$$Q_n(x) = \int_a^b \frac{P_n(y) - P_n(x)}{y - x} w(y) dy,$$

onde $Q_n(x)$ é de grau $n-1$. Logo, $Q_n(x_{n,k}) = \int_a^b \frac{P_n(y)}{y - x_{n,k}} w(y) dy$.

Portanto, de (3.2.1), temos

$$W_{n,k} = \frac{Q_n(x_{n,k})}{P_n'(x_{n,k})}, \quad k = 1, \dots, n.$$

3. Seja $P_n^*(x)$ uma SPO*, sabemos que $P_n^*(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}$ e que $a_{n,n}^* = \frac{a_{n,n}}{\|P_n(x)\|}$, onde $\|P_n(x)\| = \sqrt{\langle P_n, P_n \rangle}$. De (3.2.1), temos

$$W_{n,k} = \frac{1}{P_n^{*'}(x_{n,k})} \int_a^b \frac{P_n^*(x)}{x - x_{n,k}} w(x) dx. \quad (3.2.2)$$

Sabemos que $P_n^*(x)$ satisfaz à Identidade de Christoffel-Darboux:

$$\sum_{j=0}^n P_j^*(x) P_j^*(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \frac{P_{n+1}^*(x) P_n^*(y) - P_n^*(x) P_{n+1}^*(y)}{x - y}.$$

Fazendo $y = x_{n,k}$, obtemos

$$\sum_{j=0}^{n-1} P_j^*(x) P_j^*(x_{n,k}) = -\frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \frac{P_n^*(x) P_{n+1}^*(x_{n,k})}{x - x_{n,k}},$$

e, assim,

$$\frac{P_n^*(x)}{x - x_{n,k}} = -\frac{\gamma_{n+1}^*}{P_{n+1}^*(x_{n,k})} \sum_{j=0}^{n-1} P_j^*(x) P_j^*(x_{n,k}). \quad (3.2.3)$$

Substituindo (3.2.3) em (3.2.2), obtemos

$$\begin{aligned} W_{n,k} &= -\frac{\gamma_{n+1}^*}{P_n^{*'}(x_{n,k}) P_{n+1}^*(x_{n,k})} \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b P_j^*(x) P_j^*(x_{n,k}) w(x) dx \\ &= -\frac{\gamma_{n+1}^*}{P_n^{*'}(x_{n,k}) P_{n+1}^*(x_{n,k})} \int_a^b P_0^*(x) P_0^*(x_{n,k}) w(x) dx \\ &= -\frac{\gamma_{n+1}^*}{P_n^{*'}(x_{n,k}) P_{n+1}^*(x_{n,k})}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$W_{n,k} = -\frac{a_{n+1,n+1}^*}{a_{n,n}^* P_n^{*'}(x_{n,k}) P_{n+1}^*(x_{n,k})}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.2.4)$$

4. Substituindo-se n por $n-1$ na Identidade de Christoffel-Darboux e procedendo da mesma forma encontramos

$$W_{n,k} = \frac{a_{n,n}^*}{a_{n-1,n-1}^* P_n^{*'}(x_{n,k}) P_{n-1}^*(x_{n,k})}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.2.5)$$

Como $P_n^*(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}$ e $a_{n,n}^* = \frac{a_{n,n}}{\|P_n(x)\|}$, de (3.2.5) obtemos

$$W_{n,k} = \frac{a_{n,n} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{a_{n-1,n-1} P_n'(x_{n,k}) P_{n-1}(x_{n,k})}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.2.6)$$

Para demonstrarmos o teorema do erro na quadratura gaussiana, necessitaremos do lema a seguir.

Lema 3.1. *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e $p(x)$ uma função integrável em $[a, b]$ com $\int_a^b p(x) dx > 0$. Então, existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c) \int_a^b p(x)dx.$$

Demonstração: Como f é contínua em $[a, b]$, que é um compacto, então f atinge um máximo M e um mínimo m em $[a, b]$. Logo,

$$m \leq f(x) \leq M,$$

para $x \in [a, b]$. Então,

$$p(x)m \leq p(x)f(x) \leq p(x)M$$

o que implica que

$$m \int_a^b p(x)dx \leq \int_a^b p(x)f(x)dx \leq M \int_a^b p(x)dx.$$

Logo,

$$m \leq \frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx} \leq M.$$

Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}. \quad \blacksquare$$

Analisaremos, agora, a precisão das fórmulas de quadratura gaussianas com n nós. Observe que são exatas para polinômios de graus $\leq 2n - 1$, enquanto que as fórmulas de Newton-Côtes com o mesmo número de pontos são exatas para polinômios de graus $\leq n - 1$ ou $\leq n$, dependendo se n é par ou ímpar.

Teorema 3.4. [Teorema Geral do Erro] *Considere a fórmula de quadratura dada por (3.1.2) com pesos e nós como nas observações acima. Se $f(x) \in C^{2n}[a, b]$, então*

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{k=1}^n W_{n,k}f(x_{n,k}) \\ &= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b \pi^2(x)w(x)dx, \quad a < \eta < b. \end{aligned}$$

Demonstração: Da equação (3.1.2), temos que

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{k=1}^n W_{n,k}f(x_{n,k}).$$

Sabemos que o polinômio de interpolação de Hermite $\mathcal{H}_{2n-1}(x)$, dado por (1.3.9), é de grau no máximo $2n - 1$ e satisfaz

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{2n-1}(x_{n,i}) = y_{n,i} = f(x_{n,i}), \\ \mathcal{H}'_{2n-1}(x_{n,i}) = y'_{n,i} = f'(x_{n,i}), \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2.7)$$

Pelo Teorema 1.8, vimos que

$$R_{2n-1}(x) = f(x) - \mathcal{H}_{2n-1}(x) = \frac{\pi^2(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi_x). \quad (3.2.8)$$

Integrando (3.2.8) em relação à função peso $w(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b R_{2n-1}(x)w(x)dx &= \int_a^b (f(x) - \mathcal{H}_{2n-1}(x))w(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)w(x)dx - \int_a^b \mathcal{H}_{2n-1}(x)w(x)dx. \end{aligned}$$

e, assim,

$$\int_a^b \frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!} \pi^2(x)w(x)dx = \int_a^b f(x)w(x)dx - \int_a^b \mathcal{H}_{2n-1}(x)w(x)dx.$$

Como $\mathcal{H}_{2n-1}(x)$ é de grau no máximo $2n-1$, a fórmula de quadratura gaussiana é exata para esse polinômio. Logo,

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k} \mathcal{H}_{2n-1}(x_{n,k}) + \int_a^b \frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!} \pi^2(x)w(x)dx.$$

Mas, de (3.2.7), $\mathcal{H}_{2n-1}(x_{n,k}) = f(x_{n,k})$, $k = 1, 2, \dots, n$, e a equação acima pode ser dada por

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k} f(x_{n,k}) + \int_a^b \frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!} \pi^2(x)w(x)dx.$$

Logo,

$$E_n(f) = \int_a^b \frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!} \pi^2(x)w(x)dx.$$

Como $f(x) \in C^{2n}[a, b]$, então $f^{(2n)}(x)$ é contínua e, além disso, $g(x) = \pi^2(x)w(x) \geq 0$ com $\int_a^b g(x)dx > 0$. Assim, pelo lema anterior, $\exists \eta \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f^{(2n)}(\xi_x) \pi^2(x)w(x)dx = f^{(2n)}(\eta) \int_a^b \pi^2(x)w(x)dx.$$

Portanto,

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b \pi^2(x)w(x)dx. \quad \blacksquare$$

3.3 Exemplos

3.3.1 Fórmulas de Quadratura de Gauss-Legendre

Consideremos fórmulas de quadratura da seguinte forma

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k}f(x_{n,k}) + E_n.$$

Sabemos que os polinômios de Legendre $P_n(x)$ definidos em (2.5.11) são ortogonais com relação à função peso $w(x) = 1$ no intervalo $[-1, 1]$.

Logo, para construirmos fórmulas de quadratura gaussianas para o caso acima, devemos utilizar os zeros desses polinômios como nós e calcular os pesos também utilizando-se os polinômios de Legendre.

Como exemplo, consideremos $n = 3$ e calculemos, então, os pesos e os nós da fórmula de quadratura acima. Sabemos que os nós $x_{3,1}, x_{3,2}$ e $x_{3,3}$ são os zeros do polinômio $P_3(x)$. Da relação de recorrência (2.5.12), obtemos

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Logo,

$$x_{3,1} = -\frac{\sqrt{15}}{5}, \quad x_{3,2} = 0, \quad x_{3,3} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

De (3.2.6) temos que os pesos são dados por

$$W_{3,k} = \frac{a_{3,3} \langle P_2, P_2 \rangle}{a_{2,2} P_3'(x_{3,k}) P_2(x_{3,k})}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Como $a_{2,2} = \frac{3}{2}$, $a_{3,3} = \frac{5}{2}$, $\langle P_2, P_2 \rangle = \frac{2}{5}$ e $P_3'(x) = \frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2}$, obtemos

$$W_{3,k} = \frac{2}{3P_3'(x_{3,k})P_2(x_{3,k})}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Logo,

$$W_{3,1} = \frac{5}{9}, \quad W_{3,2} = \frac{8}{9} \quad \text{e} \quad W_{3,3} = \frac{5}{9}.$$

Portanto, a fórmula de quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + E_3(f)$$

é exata para polinômios de grau no máximo 5, isto é, $E_3(f) = 0$ se $f(x) \in \mathbb{P}_5$.

Vamos comparar essa fórmula com a Regra 1/3 de Simpson, ambas com 3 pontos. Vamos aproximar a integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \tag{3.3.1}$$

utilizando as duas regras.

Sabemos que, para utilizar a Quadratura de Gauss-Legendre, o intervalo de integração deve ser $[-1, 1]$. Vamos, então, fazer a mudança de variáveis $x = \frac{t+3}{2}$ e obtemos

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{t+3} dt. \tag{3.3.2}$$

Aproximando (3.3.2) pela Quadratura de Gauss-Legendre com $n = 3$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{t+3} dt &\approx \frac{5}{9} \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{5} + 3} + \frac{8}{9} \frac{1}{0+3} + \frac{5}{9} \frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{5} + 3} \\ &= 0.6931216931, \end{aligned}$$

utilizando-se 10 dígitos significativos de precisão.

Aproximemos, agora, a integral (3.3.1) pela Regra 1/3 de Simpson.

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{1/2}{3} \left[\frac{1}{1} + 4 \times \frac{1}{1+1/2} + \frac{1}{2} \right] = 0.6944444444,$$

também com 10 dígitos significativos de precisão.

O valor exato da integral (3.3.1), retendo-se apenas 10 dígitos significativos de precisão, é 0.6931471806.

Comparando essas duas aproximações com o valor exato, observe que com a Quadratura de Gauss-Legendre com $n = 3$ temos 4 dígitos corretos, enquanto que com a Regra 1/3 de Simpson, também com 3 pontos, temos apenas 2.

3.3.2 Fórmulas de Quadratura de Gauss-Chebyshev

Consideremos, agora, fórmulas de quadratura da seguinte forma

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n.$$

Sabemos que os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$ definidos em (2.5.13) são ortogonais com relação à função peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ no intervalo $[-1, 1]$.

Portanto, para construirmos fórmulas de quadratura Gaussianas para o caso acima, o adequado é utilizarmos esses polinômios para obtermos os nós e os pesos.

De (2.5.14) sabemos que os zeros dos polinômios de Chebyshev são dados por

$$x_{n,k} = \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

e, ainda,

$$a_{n,n} = 2^{n-1} \quad \text{e} \quad \langle T_n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2}, \quad n \geq 1.$$

Assim, de (3.2.6), temos

$$W_{n,k} = \frac{2^{n-1} \langle T_{n-1}, T_{n-1} \rangle}{2^{n-2} T'_n(x_{n,k}) T_{n-1}(x_{n,k})} = \frac{\pi}{T'_n(x_{n,k}) T_{n-1}(x_{n,k})} \quad k = 1, \dots, n.$$

Como

$$T'_n(x) = \frac{n \operatorname{sen}(n\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

então, para $k = 1, 2, \dots, n$,

$$T'_n(x_{n,k}) = \frac{n \operatorname{sen}(n\theta_k)}{\operatorname{sen}(\theta_k)}, \quad \text{onde } \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} T_{n-1}(x_{n,k}) &= \cos((n-1)\theta_k) = \cos(n\theta_k)\cos(\theta_k) + \operatorname{sen}(n\theta_k)\operatorname{sen}(\theta_k) \\ &= \operatorname{sen}(n\theta_k)\operatorname{sen}(\theta_k). \end{aligned}$$

Logo,

$$T'_n(x_{n,k})T_{n-1}(x_{n,k}) = n\operatorname{sen}^2(n\theta_k) = n(1 - \cos^2(n\theta_k)) = n.$$

Daí,

$$W_{n,k} = \frac{\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n, \quad n \geq 2.$$

Portanto, para $n \geq 2$,

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) + E_n(f), \quad (3.3.3)$$

com $E_n(f) = 0$ sempre que $f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Mas, (3.3.3) também vale quando $n = 1$, pois $T_1(x) = x$, $x_{1,1} = 0$ e

$$W_{1,1} = \frac{a_{1,1} \langle T_0, T_0 \rangle}{a_{0,0} T'_1(x_{1,1}) T_0(x_{1,1})} = \pi.$$

Assim,

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi f\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) + E_1(f) = \pi f(0) + E_1(f).$$

3.4 Exercícios

Exercício 3.1. *Mostre que se $w(x) = w(-x)$ e $(a, b) = (-b, b)$, então $W_{n,i} = W_{n,n-i+1}$.*

Exercício 3.2. *Mostre que, na Fórmula de Quadratura Gaussiana (3.1.1),*

$$\sum_{n=1}^n W_{n,k} = \mu_0,$$

onde μ_0 é o momento de ordem 0 definido na Definição 1.18.

Exercício 3.3. *Determine a fórmula de integração de Gauss para integrar exatamente a função $f(x)$ no intervalo $[-1, 1]$, com relação à função peso $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ quando $f(x)$ for um polinômio de grau $\leq 2n-1$.*

Exercício 3.4. *A integral dupla pode ser obtida da seguinte maneira: mantendo-se x constante, integra-se aproximadamente em relação a y por alguma regra de quadratura. Em seguida, a integral em relação a x é também aproximada por uma regra de quadratura. Sabendo-se que $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$ aproxime*

$$I = \int_1^2 \int_2^3 f(x, y) dy dx,$$

usando as regras de quadratura de Gauss mais adequadas com três pontos com relação a x e com dois pontos com relação a y .

Exercício 3.5. *Use a Regra de quadratura de Gauss mais apropriada para aproximar a área da figura formada pelas curvas $g_1(x)$ e $g_2(x)$ dadas abaixo e as retas $x = 0$ e $x = 2$.*

$$\begin{cases} g_1(x) &= x(x^2 - 1) \\ g_2(x) &= 1 - x^2 \end{cases}$$

Exercício 3.6. *Use as regras de quadratura de Gauss mais adequadas para resolver os itens abaixo.*

a) Sabendo que $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, calcule $\Gamma(4)$.

b) Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 \theta d\theta$.

Exercício 3.7. Obtenha a regra de quadratura gaussiana que integre exatamente

$$I = \int_{-1}^1 f(x)x^2 dx$$

quando $f(x)$ for um polinômio de grau ≤ 2 .

Exercício 3.8. Encontrar a fórmula de quadratura de Gauss-Legendre com $n = 4$ e $n = 5$.

Exercício 3.9. Calcular

$$\int_{-1}^1 (x^5 + 2x^4) dx \quad \text{e} \quad \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

pela fórmula de quadratura mais adequada obtida no exercício anterior.

Exercício 3.10. Fazer o mesmo que o Exercício 3.8 para os polinômios ortogonais de Hermite.

Exercício 3.11. Use a quadratura de Gauss mais adequada para aproximar as integrais

$$i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{e^{(x^2-2x+1)}} dx, \quad ii) \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2+2x} + \frac{1}{2-2x} \right)^{1/2} dx.$$

Use as tabelas constantes dos Apêndices 1 a 4.

Exercício 3.12. Obtenha a Regra de Quadratura Gaussiana da forma

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n W_k f(x_k) + E_n(f),$$

que seja exata para $f(x) \in \mathbb{P}_3$.

Apêndice 1

Daremos, aqui, os valores dos pesos $W_{n,k}$ e dos nós $x_{n,k}$ para Fórmulas de Quadratura da forma

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n W_{n,k}f(x_{n,k}),$$

que são exatas para $f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Essas fórmulas foram discutidas na Seção 3.2. Para mais detalhes sobre essas Fórmulas de Quadratura, sugerimos os textos [9, 10, 29].

Os pesos $W_{n,k}$ e os nós $x_{n,k}$ são simétricos com relação a $x = 0$, isto é,

$$W_{n,k} = W_{n,n-k+1}, \quad x_{n,k} = x_{n,n-k+1}.$$

Por essa razão, as tabelas a seguir darão apenas os valores dos nós que pertencem ao intervalo $[0, 1)$ e os correspondentes pesos.

Os cálculos foram feitos usando-se o software MAPLE 3 com 100 dígitos significativos de precisão e informamos apenas os 25 primeiros.

Para tabelas com mais valores de nós e pesos, recomendamos o livro de Krylov [20].

$x_{n,k}$	$W_{n,k}$
$n = 2$	
.5773502691896257645091488	1.000000000000000000000000

$x_{n,k}$	$W_{n,k}$
$n = 3$	
0.00000000000000000000000000000000	0.88888888888888888888888888888889
0.7745966692414833770358531	0.555555555555555555555555555556
$n = 4$	
0.3399810435848562648026658	0.6521451548625461426269361
0.8611363115940525752239465	0.3478548451374538573730639
$n = 5$	
0.00000000000000000000000000000000	0.568888888888888888888888888889
0.5384693101056830910363144	0.4786286704993664680412915
0.9061798459386639927976269	0.2369268850561890875142640
$n = 6$	
0.2386191860831969086305017	0.4679139345726910473898703
0.6612093864662645136613996	0.3607615730481386075698335
0.9324695142031520278123016	0.1713244923791703450402961
$n = 7$	
0.00000000000000000000000000000000	0.4179591836734693877551020
0.4058451513773971669066064	0.3818300505051189449503698
0.7415311855993944398638648	0.2797053914892766679014678
0.9491079123427585245261897	0.1294849661688696932706114

$x_{n,k}$	$W_{n,k}$
$n = 8$	
0.1834346424956498049394761	0.3626837833783619829651504
0.5255324099163289858177390	0.3137066458778872873379622
0.7966664774136267395915539	0.2223810344533744705443560
0.9602898564975362316835609	0.1012285362903762591525313
$n = 9$	
0.000000000000000000000000	0.3302393550012597631645251
0.3242534234038089290385380	0.3123470770400028400686304
0.6133714327005903973087020	0.2606106964029354623187429
0.8360311073266357942994298	0.1806481606948574040584720
0.9681602395076260898355762	(-1)0.8127438836157441197189216
$n = 10$	
0.1488743389816312108848260	0.2955242247147528701738930
0.4333953941292471907992659	0.2692667193099963550912269
0.6794095682990244062343274	0.2190863625159820439955349
0.8650633666889845107320967	0.1494513491505805931457763
0.9739065285171717200779640	(-1)0.6667134430868813759356881

$x_{n,k}$	$W_{n,k}$
$n = 2$	
0.5857864376269049511983113	0.8535533905932737622004222
3.414213562373095048801689	0.1464466094067262377995778
$n = 3$	
0.4157745567834790833115339	0.7110930099291730154495902
2.294280360279041719822050	0.2785177335692408488014449
6.289945082937479196866416	(-1)0.1038925650158613574896492
$n = 4$	
0.3225476896193923118003615	0.6031541043416336016359660
1.745761101158346575686817	0.3574186924377996866414920
4.536620296921127983279285	(-1)0.3888790851500538427243817
9.395070912301133129233536	(-3)0.5392947055613274501037906
$n = 5$	
0.2635603197181409102030619	0.5217556105828086524758609
1.413403059106516792218408	0.3986668110831759274541333
3.596425771040722081223187	(-1)0.7594244968170759538765331
7.085810005858837556922124	(-2)0.3611758679922048454461263
12.64080084427578265943322	(-4)0.2336997238577622789114908
$n = 6$	
0.2228466041792606894643548	0.4589646739499635935682849

$x_{n,k}$	$W_{n,k}$
$n = 6$	
(continuação)	
1.188932101672623030743151	0.4170008307721209941133776
2.992736326059314077691325	0.1133733820740449757387062
5.775143569104510501839830	(-1)0.1039919745314907489891330
9.837467418382589917715547	(-3)0.2610172028149320594792429
15.98287398060170178254579	(-6)0.8985479064296212388252921
$n = 7$	
0.1930436765603624138382479	0.4093189517012739021304329
1.026664895339191950345199	0.4218312778617197799292810
2.567876744950746206907786	0.1471263486575052783953742
4.900353084526484568101714	0.02063351446871693986570561
8.182153444562860791081828	(-2)0.1074010143280745522131960
12.73418029179781375801264	(-4)0.1586546434856420126873262
19.39572786226254031171258	(-7)0.3170315478995580562271322
$n = 8$	
0.1702796323051009997888619	0.3691885893416375299205828
0.9037017767993799121860202	0.4187867808143429560769786
2.251086629866130689307118	0.1757949866371718056996599
4.266700170287658793649422	(-1)0.3334349226121565152213253
7.045905402393465697279325	(-2)0.2794536235225672524938924
10.75851601018099522405996	(-4)0.9076508773358213104238501
15.74067864127800457802876	(-6)0.8485746716272531544868018
22.86313173688926410570053	(-8)0.1048001174871510381615089

$x_{n,k}$	$W_{n,k}$
$n = 9$	
0.1523222277318082474281071	0.3361264217979625196734677
0.8072200227422558477414192	0.4112139804239843873091469
2.005135155619347122983033	0.1992875253708855808605756
3.783473973331232991675406	(-1)0.4746056276565159926211636
6.204956777876612606973535	(-2)0.5599626610794583177004199
9.372985251687576201809710	(-3)0.3052497670932105663054128
13.46623691109209357109788	(-5)0.6592123026075352392255723
18.83359778899169661414990	(-7)0.4110769330349548442902410
26.37407189092737679614100	(-10)0.3290874030350707576466814
$n = 10$	
0.1377934705404924308307725	0.3084411157650201415474708
0.7294545495031704981603731	0.4011199291552735515157803
1.808342901740316048232920	0.2180682876118094215886485
3.401433697854899514482532	(-1)0.6208745609867774739290213
5.552496140063803632417558	(-2)0.9501516975181100553839072
8.330152746764496700238767	(-3)0.7530083885875387754559644
11.84378583790006556491854	(-4)0.2825923349599565567422564
16.27925783137810209953265	(-6)0.4249313984962686372586577
21.99658581198076195127709	(-8)0.1839564823979630780921535
29.92069701227389155990879	(-12)0.9911827219609008558377547

Apêndice 3

Daremos, aqui, os valores dos pesos $W_{n,k}$ e dos nós $x_{n,k}$ das Fórmulas de Quadratura Gaussianas associadas aos polinômios clássicos Hermite da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2} dx \approx \sum_{k=1}^n W_{n,k} f(x_{n,k}),$$

que são exatas para $f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Essas fórmulas foram discutidas na Seção 3.2. Para mais detalhes sobre essas Fórmulas de Quadratura, sugerimos os textos [9, 10, 29].

Como no caso do Apêndice 1, aqui também os pesos $W_{n,k}$ e os nós $x_{n,k}$ são simétricos com relação a $x = 0$,

$$W_{n,k} = W_{n,n-k+1}, \quad x_{n,k} = x_{n,n-k+1}.$$

Por essa razão, as tabelas a seguir darão apenas os valores dos nós que pertencem ao intervalo $[0, \infty)$ e os correspondentes pesos.

Os cálculos foram feitos usando-se o software MAPLE 3 com 100 dígitos significativos de precisão e informamos apenas os 25 primeiros.

Para tabelas com mais valores de nós e pesos, recomendamos o livro de Krylov [20].

$x_{n,k}$	$W_{n,k}$
$n = 1$	
0.000000000000000000000000	1.772453850905516027298167
$n = 2$	
0.7071067811865475244008444	0.8862269254527580136490837
$n = 3$	
0.000000000000000000000000	1.181635900603677351532112
1.224744871391589049098642	0.2954089751509193378830279
$n = 4$	
0.5246476232752903178840603	0.8049140900055128365060492
1.650680123885784555883341	(-1)0.8131283544724517714303456
$n = 5$	
0.000000000000000000000000	0.9453087204829418812256893
0.9585724646138185071127706	0.3936193231522411598284956
2.020182870456085632928724	(-1)0.1995324205904591320774346
$n = 6$	
0.4360774119276165086792159	0.7246295952243925240919147
1.335849074013696949714895	0.1570673203228566439163116
2.350604973674492222833922	(-2)0.4530009905508845640857473

$x_{n,k}$	$W_{n,k}$
$n = 7$	
0.000000000000000000000000	0.8102646175568073267648766
0.8162878828589646630387110	0.4256072526101278005203175
1.673551628767471445031801	(-1)0.5451558281912703059217857
2.651961356835233492447082	(-3)0.9717812450995191541494243
$n = 8$	
0.3811869902073221168547189	0.6611470125582412910304160
1.157193712446780194720766	0.2078023258148918795432586
1.981656756695842925854631	(-1)0.1707798300741347545620306
2.930637420257244019223503	(-3)0.1996040722113676192060905
$n = 9$	
0.000000000000000000000000	0.7202352156060509571243347
0.7235510187528375733226399	0.4326515590025557501998121
1.468553289216667931667016	(-1)0.8847452739437657328797511
2.266580584531843111802097	(-2)0.4943624275536947217224566
3.190993201781527607230048	(-4)0.3960697726326438190458629
$n = 10$	
0.3429013272237046087891650	0.6108626337353257987835650
1.036610829789513654177492	0.2401386110823146864165233
1.756683649299881773451401	(-1)0.3387439445548106313616473
2.532731674232789796408961	(-2)0.1343645746781232692201566
3.436159118837737603326725	(-5)0.7640432855232620629159368

Apêndice 4

Daremos, aqui, as Fórmulas de Quadratura Gaussianas associadas aos polinômios clássicos de Chebyshev

- de 1ª espécie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{k=1}^n W_{n,k} f(x_{n,k}),$$

- e de 2ª espécie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sqrt{1-x^2} dx \approx \sum_{k=1}^n W_{n,k} f(x_{n,k}),$$

que são exatas para $f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Essas fórmulas foram discutidas na Seção 3.2. Para mais detalhes sobre essas Fórmulas de Quadratura, sugerimos os textos [9, 10, 29].

Nesses dois casos, os pesos $W_{n,k}$ e os nós $x_{n,k}$ são dados explicitamente. As duas fórmulas acima são dadas, respectivamente, por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sqrt{1-x^2} dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) f\left(\cos \frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Veja Subseção 3.3.2 e Exercício 3.3.

Bibliografia

- [1] R.P. Agarwal, G.V. Milovanović, Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, **128** (2002), 151-166.
- [2] E.X.L. Andrade, “Sobre Polinômios Similares aos Ortogonais Associados a uma Classe Especial de Distribuições”, Tese de doutorado, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, 1995.
- [3] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, “Special Functions”, Encyclopedia of Mathematics and Applications, Cambridge University Press, 1999.
- [4] R.G. Bartle, “Elementos de Análise Real”, Editora Campus Ltda., Rio de Janeiro, 1983.
- [5] R.L. Burden, J.D. Faires, A.C. Reynolds, “Numerical Analysis”, Prindle, Weber & Achmidt, Inc., Boston, 1978.
- [6] T.S. Chihara, “An Introduction to Orthogonal Polynomials”, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [7] S.D. Conte, “Elementary Numerical Analysis”, McGraw-Hill, Inc., Tokio, 1965.
- [8] P.J. Davis, “Interpolation and Approximation”, Blaisdell Publishing Co., 1963.
- [9] P.J. Davis, P. Rabinowitz, “Numerical Integration”, Blaisdell Publishing Co., 1967.

- [10] P.J. Davis, P. Rabinowitz, “Methods of Numerical Integrations”, Academic Press, New York, 1975.
- [11] V.N. Faddeva, “Computational Methods of Linear Algebra”, Dover Publications, Inc., N.Y., 1959.
- [12] D.G. Figueiredo, “Análise I”, LTC Editora S.A., Rio de Janeiro, 1975.
- [13] W. Gautschi, Orthogonal polynomials - constructive theory and applications, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **12** e **13** (1985), 61-76.
- [14] I.M. Gel’fand, “Lectures Notes on Linear Algebra”, Dover Publications, Inc., N.Y., 1989.
- [15] G.H. Golub, C. Van Loan, “Matrix Computations”, 3rd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [16] W. Greub, “Linear Algebra”, 4th ed., Graduate Texts in Mathematics, No. 23, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975.
- [17] P.R. Halmos, “Finite-dimensional Vector Spaces”, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.
- [18] P. Henrici, “Applied and Computational Complex Analysis”, vol.2, John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [19] K. Hoffman, R. Kunze, “Linear Algebra”, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1971.
- [20] V.I. Krylov, “Approximate Calculation of Integrals”, Macmillan, New York, 1962.
- [21] E.L. Lima, “Análise Real, vol. 1: Funções de uma Variável”, Coleção Matemática Universitária, 10 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [22] B. Noble, J.W. Daniel, “Applied Linear Algebra”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

- [23] E.C. de Oliveira, “Funções Especiais com Aplicações”, Livraria da Física-Editora da USP, São Paulo, SP, 2005.
- [24] G.M. Phillips, P.J. Taylor, “Theory and Applications of Numerical Analysis”, Academic Press, London, 1973.
- [25] F.R. Rafaeli, “Zeros de Polinômios Ortogonais na Reta Real”, Tese de doutorado, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, 2010.
- [26] E.D. Rainville, “Special Functions”, The Macmillan Company, New York, 1960.
- [27] W. Rudin, “Princípios de Análise Matemática”, trad. E.R.H. Brito, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1971.
- [28] A. Sri Ranga, “Polinômios Ortogonais e Similares”, Tese de Livre-Docência, ICMC, USP, São Carlos, SP, 1990.
- [29] A.H. Stroud, D. Secrest, “Gaussian Quadrature Formulas”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [30] G. Szegő, “Orthogonal Polynomials”, American Math. Society, Colloq. Publ., New York, 23, 1939.

Índice

- Base, 18
- Christoffel-Darboux, 65
 - Identidade de, 65, 114
 - Fórmula Confluyente, 69
 - Polinômios Mônicos, 65
 - Polinômios Ortonormais, 68
- Combinação Linear, 16
 - Dependência Linear, 16
- Distribuição, 45, 51
 - de Stieltjes, 46
 - Forte, 45
 - Medida, 51
 - Momentos, 45
- Espaço Vetorial, 14
- Fórmulas de Quadratura, 36
 - Gaussianas, 110
 - de Chebyshev, 120, 137
 - de Hermite, 133
 - de Laguerre, 129
 - de Legendre, 118, 125
 - Erro, 116
 - Nós, 113
 - Pesos, 112, 113, 115
 - Grau de Precisão, 38, 111
 - Interpolatórias, 36, 38, 111
 - Erro, 38, 39
 - Gaussianas, 110
 - Newton-Côtes, 39
 - Regra 1/3 de Simpson, 40
 - Regra 3/8 de Simpson, 40
 - Regra do Trapézio, 40
- Função, 21
 - Beta, 24
 - Gama, 21
- Gram-Schmidt, 18
 - Processo de Ortogonalização, 18, 52
- Hankel, 57
 - Determinantes de, 57, 58
- Hermite, 32
 - Interpolação Polinomial, 32
 - Erro, 34
- Integral, 41
 - de Riemann, 41
 - de Riemann-Stieltjes, 42
 - Partição, 41
- Interpolação Polinomial, 26
 - Erro, 29
 - Hermite, 32
 - Interpolação de, 32

- Lagrange, 30
 - Fórmula de, 31
 - Polinômios Fundamentais de, 31
- Lagrange, 30
 - Fórmula de, 31, 37
 - Interpolação Polinomial, 30
 - Polinômios Fundamentais de, 31
- Leibnitz
 - Regra de, 96
- Matriz, 13
 - de Jacobi, 68
 - Hermitiana, 13
 - Positiva-definida, 15
 - Quadrada, 13
 - Semi Positiva-definida, 15
 - Simétrica, 13
 - Transposta, 13
- Newton-Côtes, 39
 - Fórmulas Fechadas de, 39
 - Regra 1/3 de Simpson, 40
 - Regra 3/8 de Simpson, 40
 - Regra do Trapézio, 40
- Norma, 15
- Ortogonalidade, 15
- Polinômios Ortogonais, 51
 - de Chebyshev de 1ª espécie, 74, 87
 - Relação de Recorrência, 88
 - de Chebyshev de 2ª espécie, 74, 92
- Relação de Recorrência, 92
- de Gegenbauer, 74, 86
- Relação de Recorrência, 87
- de Hermite, 74, 102
 - Fórmula de Rodrigues, 102
 - Relação de Recorrência, 102, 103
- de Jacobi, 74, 75
 - Fórmula de Rodrigues, 75
 - Relação de Recorrência, 78
- de Laguerre, 74, 96
 - Fórmula de Rodrigues, 96
 - Relação de Recorrência, 100
- de Legendre, 74, 84
 - Fórmula de Rodrigues, 84
 - Relação de Recorrência, 85
- Existência, 58
- Função Peso, 51
- Mônicos, 62
 - Relação de Recorrência, 62, 63
- Ortonormais, 52, 66
 - Relação de Recorrência, 66, 67
 - Sequências, 52
- Relação de Recorrência, 60
 - Coefficientes, 60
- Sequência, 52
- Simétricos, 72
- Ultrasféricos, 86
- Zeros, 64, 69, 70, 111
 - Autovalores, 65, 68
- Produto Escalar, 14
- Produto Interno, 14
- Regra de Leibnitz, 96

- Riemann, 41
 - Integral de, 41
- Riemann-Stieltjes, 42
 - Integral de, 42
- Rolle, 30
 - Teorema de, 30, 35
- Simpson, 40
 - Regra 1/3 de, 40
 - Regra 3/8 de, 40
- Teorema, 35
 - de Rolle, 30
 - Valor Médio, 43
- Trapézio, 40
 - Regra do, 40
- Vandermonde, 26
 - Determinante de, 26
 - Matriz de, 26