

Volume 72, 2014

Editores

Fernando Rodrigo Rafaeli (Editor Chefe)

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Uberlândia, MG, Brasil

Vanessa Avansini Botta Pirani (Editor Adjunto)

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Presidente Prudente, SP, Brasil

Alexandre Loureiro Madureira

Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC
Petrópolis, RJ, Brasil

Edson Luiz Cataldo Ferreira

Universidade Federal Fluminense - UFF
Niterói, RJ, Brasil

Jorge Manuel Vieira Capela

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Araraquara, SP, Brasil

Sandra Augusta Santos

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Campinas, SP, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.9)**, as **figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://www.sbmac.org.br/p_notas.php

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Maria Lewtchuk Espindola
mariia@mat.ufpb.br

Departamento de Matemática
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Universidade Federal da Paraíba



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2014

Coordenação Editorial: Maria do Socorro Nogueira Rangel

Coordenação Editorial da Série: Fernando Rodrigo Rafaeli

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2014 by Maria Lewtchuk Espindola. Direitos reservados, 2014 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Espindola, Maria L.

Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem - São Carlos, SP :
SBMAC, 2014, 68 p., 21.5 cm - (Notas em Matemática
Aplicada; v. 72)

e-ISBN 978-85-8215-058-0

1. EDPs de primeira ordem
 2. EDPs de primeira ordem não lineares
 3. Solução Geral de EDPs de primeira ordem
 4. Transformada de Legendre
 5. Formas diferenciais Pfaffianas
 6. Hamiltonização Alternativa
- I. Espindola, Maria L. IV. Título. V. Série

CDD - 51

A minha mãe Eudokia.
A minha filha Maíra e meus netos Ila e Igor.
Dedico

Agradecimentos

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC). Assim como ao Dr. Nelson Lima Teixeira (in memoriam), ao Dr. Oslim Espindola (in memoriam) e ao Dr. Abdoral de Souza Oliveira (in memoriam) pelas profícuas discussões.

Conteúdo

Prefácio	xi
1 Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem	1
1.1 Introdução	1
1.2 Origens	2
1.3 Tipos de soluções: geral, completa, particular e envoltória	4
1.4 Soluções envoltórias	5
1.5 Soluções envoltórias para dois conjuntos disjuntos de variáveis	6
1.6 Exercícios	8
2 Métodos Clássicos de Resolução de EDPs de Primeira Ordem	11
2.1 Introdução	11
2.2 Equações diferenciais parciais lineares	11
2.3 Exercícios	14
2.4 Equações diferenciais parciais não lineares	15
2.5 Método de Charpit	15
2.6 Exercícios	20
2.7 Exercícios complementares	22
3 Obtenção de Soluções Gerais para Determinadas EDPs	25
3.1 Solução geral de $F(p, q) = 0$ e $F(f(x)p, q) = 0$	25
3.1.1 Introdução	25
3.1.2 Solução Geral para a EDP $F(p, q) = 0$	26
3.1.3 Solução Geral para a EDP $F(f(x)p, q) = 0$	29
3.2 Soluções generalizadas de $F(r, s) = 0$ e $G(s, t) = 0$	30
3.3 Solução geral da equação de Hamilton Jacobi unidimensional	31
3.4 Solução generalizada da EDP p-Laplace	34
3.5 Extensões e generalizações possíveis	37
3.6 Exercícios	37
4 Aplicações em Fundamentos da Mecânica Analítica Hamiltoniana	39
4.1 Introdução	39
4.2 Mecânica Lagrangiana	39
4.2.1 Introdução	39
4.2.2 Formulação Lagrangiana	42
4.3 Mecânica Hamiltoniana	43
4.3.1 Introdução	43
4.3.2 A função Hamiltoniana	44
4.3.3 Equações canônicas de movimento	45

4.4	Hamiltonizações alternativas	46
4.4.1	A definição de Hamiltonização	46
4.5	Procedimento de Hamiltonização alternativa	47
4.6	A definição do momentum	48
4.7	A solução envoltória e o Hamiltoniano usual	49
4.8	Exemplo	50
4.9	Aplicações e extensões de Hamiltonizações alternativas	52
4.9.1	Mecânica singular ou de Dirac e outras aplicações	52
4.9.2	Mecânica puramente singular	52
4.9.3	Exemplo	54
4.9.4	Sistemas parcialmente singulares	55
4.9.5	Conclusão	56
4.10	Linearização da equação de Hamilton-Jacobi	56
4.10.1	Introdução	56
4.10.2	Linearização alternativa da equação de Hamilton-Jacobi	58
4.11	Extensões e a Hamiltonização direta	58
4.11.1	Hamiltonização para teorias de campo	58
4.11.2	Hamiltonização direta	59
4.12	Conclusão geral	61

Prefácio

O principal intuito desse livro é abordar a essência da teoria das equações diferenciais parciais de primeira ordem, cuja intenção fundamental é suprir uma falha que ocorre na maioria dos textos que abordam equações diferenciais parciais. Esses textos, em geral, abordam equações diferenciais parciais de segunda ordem, sendo que muitos se preocupam em deduzir essas equações a partir de problemas particulares abordados por modelos físicos. O texto acaba se tornando pouco objetivo, pois nem todos os estudantes ou pesquisadores na área da matemática dominam conceitos físicos. O livro surgiu como consequência de programas elaborados para disciplinas ministradas de tópicos especiais no curso de graduação de Matemática. A abordagem é voltada a aqueles que querem ter o conhecimento teórico necessário para poder resolver problemas provenientes de modelos que envolvem esses tipos de equações. O livro inicia abordando a origem das equações diferenciais parciais de primeira ordem, após ter sido dada a definição geral de equação diferencial parcial. Na sequência são discutidos os diversos tipos de soluções que aparecem em equações diferenciais parciais: geral, completa, particular e envoltória. Sendo que no texto é ressaltada a importância da solução envoltória, mesmo que essa não pertença à solução geral, mostramos que esta exerce um papel primordial em determinados problemas, podendo fornecer a resolução de diversos problemas aparentemente insolúveis, principalmente os não lineares.

Um dos objetivos do texto, apresentado no segundo capítulo, é expor determinados métodos clássicos de solução de equações diferenciais parciais de primeira ordem lineares ou não. Abordando o método de obtenção de soluções gerais das equações diferenciais parciais de Lagrange ou lineares, desde que ele foi o precursor desse método. Na sequência o método de Charpit para equações diferenciais parciais lineares ou não, é apresentado com diversas aplicações a diferentes tipos de equações [1, 2]. Sendo que o intuito principal é abordar de maneira clara, sistematizada esses métodos sem se preocupar com o excesso de demonstrações ou uso de linguagem matemática complicada. A principal intenção é fornecer ao leitor a possibilidade deste visualizar a existência de métodos que fornecem soluções gerais e que, portanto, podem ser empregados em inúmeros modelos de Matemática pura e aplicada. Sendo que esses métodos podem ser dominados facilmente através dos exemplos e exercícios apresentados. Isso se deve ao fato de que a maioria dos textos se preocupa em apresentar métodos que são aplicados a problemas específicos, onde as condições iniciais e de contorno estão fixas e, portanto, estão tratando de um modelo particular. Os mais abordados são os problemas de Cauchy ou de valor inicial e aqueles que utilizam o método das características. Vale ressaltar que hodiernamente em diversos textos se discute a existência e o comportamento de determinadas soluções para alguns modelos específicos. A intenção desse texto diverge dessa linha procurando sempre premiar a abordagem matemática simples e que resulte em soluções gerais as quais posteriormente podem ser aplicadas a um determinado modelo em

qualquer área que utilize a matemática como sua ferramenta. O livro está baseado em textos clássicos que abordam equações diferenciais parciais [1, 2, 3].

Como desfecho no terceiro capítulo é apresentado um método novo de obtenção de soluções gerais de determinados tipos de equações diferenciais parciais lineares ou não, desenvolvidos por Espindola [4, 6]. O procedimento desenvolvido tem como base uma transformada de Legendre e a utilização de um teorema para formas diferenciais Pfaffianas, que fornece a condição para que estas se tornem integráveis [1]. É interessante ressaltar que este método fornece sempre uma solução geral, i.e., que depende de uma função arbitrária, portanto o método pode ser aplicado a qualquer problema particular, pois não existem restrições sobre as condições que este irá impor, a não serem aquelas devidas a cálculos algébricos específicos, aos quais os métodos numéricos e computacionais conhecidos podem ser aplicados. Sendo apresentada como uma extensão desse método a obtenção da solução geral da equação de Hamilton-Jacobi unidimensional. Assim como a solução generalizada para equações de segunda ordem que podem ser transformadas em sistemas de EDPs de primeira ordem, como por exemplo a EDP p-Laplace.

É importante ressaltar que quase todos os livros que abordam equações diferenciais parciais, geralmente se dedicam as de segunda ordem: equação de Laplace, equação de calor e equação de onda. No entanto, em muitas situações aparecem equações diferenciais parciais de primeira ordem, como, por exemplo, em física matemática e em outros ramos da matemática pura e aplicada. Tais equações surgem na construção de superfícies características de equações diferenciais parciais de segunda ordem, no cálculo variacional, em alguns problemas geométricos, assim como, em problemas de dinâmica dos gases cujas soluções, quase que em geral, são obtidas a partir do método das características. Podemos citar seu aparecimento em: mecânica de meios contínuos, dinâmica de gases, hidrodinâmica, termodinâmica, transferência de massa e calor, teoria de ondas, acústica, fluxos multifásicos, processos de morte e vida média de bactérias, engenharia química, meteorologia, teoria dos processos estocásticos entre outros. Assim como a aplicação no caso de determinados sistemas dinâmicos.

Em alguns casos o domínio da teoria das equações diferenciais parciais de primeira ordem é absolutamente fundamental. No quarto capítulo isso é evidenciado com a apresentação do desenvolvimento da teoria de Hamiltonização alternativa em fundamentos da mecânica analítica, a qual é baseada na análise matemática dos diversos tipos de soluções de equações diferenciais parciais de primeira ordem. Como está exposto nas aplicações dos métodos apresentados no último capítulo, onde se demonstra que a inexistência da descrição de Hamilton em alguns casos, como o da mecânica singular (de Dirac), ocorre devido ao uso da solução envoltória da equação diferencial parcial que define o Hamiltoniano. A existência da solução envoltória está atrelada a condição de não linearidade da equação diferencial parcial, veja em Espindola [7, 8, 9, 5]. Ainda em fundamentos da mecânica analítica é apresentada a linearização da equação de Hamilton-Jacobi, desde que essa é uma equação diferencial parcial de primeira ordem não linear.

João Pessoa, 18 de julho de 2014.

Maria Lewtchuk Espindola

Capítulo 1

Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem

1.1 Introdução

As equações diferenciais parciais surgem em problemas de física ou matemática quando estão envolvidas duas ou mais variáveis independentes. Nestes casos qualquer variável dependente é uma função de mais de uma variável independente, e portanto possui derivadas parciais.

Equações que apresentam derivadas parciais são denominadas *equações diferenciais parciais* e são denotadas como *EDPs*, podendo ser representadas no caso de ordem n como

$$F\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x}, u, x\right) = 0, \quad (1.1)$$

onde $u = u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Exemplos:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad - \quad \text{equação de continuidade;}$$

$$\nabla^2 u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad - \quad \text{equação de Laplace bidimensional;}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad - \quad \text{equação de onda unidimensional;}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad - \quad \text{equação de calor unidimensional;}$$

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad - \quad \text{equação de Hamilton-Jacobi unidimensional.}$$

A ordem da derivada mais elevada que aparece na equação diferencial parcial é chamada *ordem* da equação diferencial parcial.

Uma equação diferencial parcial é *linear* se for de primeiro grau em u e em todas as suas derivadas parciais. (Alguns textos associam o conceito de linearidade da equação diferencial parcial com o do operador linear diferencial, i.e., a equação diferencial parcial passa a ser escrita como $\mathcal{L}u(x) = f(x)$.) Se cada termo da equação diferencial parcial contém a variável dependente ou suas derivadas então a equação linear é dita *homogênea*.

Para o caso de uma função de duas variáveis independentes $z = z(x, y)$ conveniona-se definir

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad (1.2)$$

então a equação diferencial parcial de primeira ordem de funções que dependem de duas variáveis é reescrita como

$$f(p, q, x, y, z) = 0. \quad (1.3)$$

1.2 Origens

É interessante antes de discutirmos as soluções das equações do tipo (1.3), examinar como podemos gerá-las. Considere, por exemplo, a equação que representa todo o conjunto de esferas cujos centros estão sobre o eixo z

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = a^2,$$

onde as constantes a e c são arbitrárias.

Diferenciando esta equação com relação a x e y obtemos

$$x + p(z - c) = 0, \quad y + q(z - c) = 0.$$

Eliminando a constante arbitrária c destas duas equações obtemos

$$yp - xq = 0 \tag{1.4}$$

que é de primeira ordem. Podemos então afirmar que o conjunto de todas as esferas são caracterizadas pela equação (1.4). Por outro lado se agora tomamos o conjunto de cones retos circulares cujo eixo coincide com o eixo z

$$x^2 + y^2 = (z - c)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

onde α , o ângulo entre uma reta qualquer do cone e o eixo z e c são constantes arbitrárias. Derivando e eliminando as constantes iremos obter a equação (1.4). [Prove!]

Se analisarmos o que estas superfícies tem em comum percebemos que ambas são superfícies de revolução cujo eixo de simetria é Oz .

Como qualquer superfície de revolução em torno deste eixo é representada pela equação

$$z = f(x^2 + y^2)$$

então podemos mostrar que todas elas são caracterizadas pela mesma equação (1.4). [Demonstre!]

Com este exemplo observa-se que agora a solução geral depende de uma função arbitrária. Podemos generalizar este resultado primeiramente imaginando uma *solução completa*

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \tag{1.5}$$

onde a e b são constantes arbitrárias. Se agora derivamos esta equação em relação a x e y obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

As equações (1.5) e (1.6) constituem um sistema de equações a partir do qual podemos eliminar as constantes e obter uma equação do tipo da equação (1.3). Se por outro lado generalizamos este resultado considerando a *solução geral* como

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1.7)$$

então suas derivadas são

$$\begin{aligned} F_x + p F_z &= 0, \\ F_y + q F_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

as equações (1.7) e (1.8) formam um sistema de equações a partir do qual, podemos novamente chegar a uma equação diferencial parcial do tipo (1.3).

Podemos concluir que as equações diferenciais parciais de primeira ordem possuem soluções gerais que dependem de uma função arbitrária, da mesma forma que as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem dependem de uma constante arbitrária. Portanto, a partir dessas são obtidas infinitas soluções denominadas de soluções completas e que representam famílias de hipersuperfícies no caso de n variáveis e se reduzem a famílias de superfícies no caso de duas (como no caso das equações diferenciais ordinárias as soluções gerais representam famílias de curvas).

A análise das soluções possíveis, i.e., da existência e unicidade de soluções numa determinada região R para um problema específico que obedece a determinadas condições iniciais e/ou de contorno (sobre ∂R) é abordada, por exemplo, nos problemas de valor inicial ou de Cauchy [1, 2, 10].

1.3 Tipos de soluções: geral, completa, particular e envoltória

Na seção anterior mostramos a existência de vários tipos de soluções, a saber: gerais, completas e particulares. Existem ainda as soluções denominadas de envoltórias ou singulares.

A equação diferencial parcial de primeira ordem no caso de funções que dependem de n variáveis é

$$f(p_i, q_i, u, x) = 0, \quad (1.9)$$

onde

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad q_i = \frac{\partial u}{\partial y_i},$$

$$u = u(x), \text{ e } x = x_1, x_2, \dots, x_n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Os tipos de solução dessa equação diferencial parcial são:

- (a) *solução geral* - dependente de uma função arbitrária;
- (b) *solução completa* - dependente de n constantes arbitrárias, denominadas também *soluções integrais*;
- (c) *solução particular* - independente de constantes ou funções arbitrárias;
- (d) *solução envoltória* - independente da solução geral.

Os três primeiros tipos estão correlacionados, pois da solução geral se obtém qualquer um dos dois seguintes, i.e., a solução completa e a particular podem ser obtidas da geral. Por outro lado, quando estamos envolvidos com a solução de um problema específico, com as condições iniciais e de contorno dadas, podemos obter uma solução particular única a partir da solução geral. No entanto, este não é o caso quando temos somente uma solução completa, desde que as condições dadas no problema podem não ser satisfeitas por esta solução, pois esta já é uma das possíveis soluções particulares obtidas da geral.

As soluções envoltórias - (d) - não estão incluídas na solução geral, desde que são as hipersuperfícies que envolvem famílias de hipersuperfícies (soluções completas) obtidas a partir destas, e só existem para equações diferenciais parciais não lineares [1, 2].

1.4 Soluções envoltórias

Como o próprio nome sugere são as funções que determinam hipersuperfícies que envolvem famílias de hipersuperfícies (soluções completas) obtidas a partir da solução geral e que satisfazem a equação diferencial parcial original. Se quisermos justificar de forma geométrica, podemos dizer que uma solução completa,

$$\varphi(u, x, a) = 0, \quad (1.10)$$

onde $x = x_1, \dots, x_n$, $a = a_1, \dots, a_n$, e os a_i são constantes, é uma família de hipersuperfícies no conjunto das soluções completas obtidas a partir da solução geral. Estas famílias de hipersuperfícies possuem hipersuperfícies envoltórias, que são determinadas impondo que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0, \quad (1.11)$$

denominadas de condição de envoltória.

A obtenção das hipersuperfícies envoltórias é feita determinando os a'_i s a partir do sistema de equações formado pela condição de envoltória (1.11) e (1.10), sendo que a superfície envoltória é obtida a partir da equação (1.10)

$$\varphi(u(x), x, a(x)) = 0.$$

Por exemplo, considerando a equação diferencial parcial não linear

$$z = px + qy + p^2 + q^2,$$

que tem a solução completa

$$\varphi = ax + by + a^2 + b^2 - z = 0, \quad (1.12)$$

onde a e b são constantes, que representa uma família de planos. A condição de envoltória (1.11) nos fornece as equações

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = x + 2a = 0$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = y + 2b = 0,$$

portanto, a partir de (1.12) a solução envoltória é

$$z = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2),$$

que representa um parabolóide de revolução que é a envoltória da família de planos dada por (1.12). Facilmente se verifica que esta é solução da equação diferencial parcial dada, mas que não está contida na solução (1.12). [Verifique!]

1.5 Soluções envoltórias para dois conjuntos disjuntos de variáveis

Como temos interesse na aplicação de soluções envoltórias na Mecânica Hamiltoniana e o espaço de fase é composto por dois conjuntos de variáveis, vamos considerar esses conjuntos de variáveis como $x = x_1, \dots, x_n$ e $y = y_1, \dots, y_n$ e a função $u = u(x, y)$. A EDP fica dada por

$$u(x, y) = f(p, q, x, y), \quad (1.13)$$

onde

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad q_i = \frac{\partial u}{\partial y_i},$$

sendo $p = p_1, \dots, p_n$ e $q = q_1, \dots, q_n$. Escrevendo as soluções gerais como

$$\varphi(u, x, y) = 0,$$

obtemos uma família de soluções completas como

$$\varphi(u, x, y, a, b) = 0, \quad (1.14)$$

onde $a = a_1, \dots, a_n$ e $b = b_1, \dots, b_n$ são constantes. Impondo a condição de envoltória, obtemos o sistema de equações

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} = 0. \quad (1.15)$$

Então a solução do sistema de equações (1.14) e (1.15) determina a solução envoltória.

Vamos supor que podemos explicitar a solução geral

$$u(x, y) = \phi(x, y),$$

logo desta temos a solução completa

$$u(x, y) = \phi(x, y, a, b). \quad (1.16)$$

A condição de envoltória (1.15) resulta em

$$\frac{\partial u}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial b_i} = 0. \quad (1.17)$$

Sendo que a solução envoltória é obtida deste sistema e de (1.16).

Se, por outro lado, a equação (1.13) for linear em p (ou q) e não depender de q (ou de p) então esta equação não possui solução envoltória.

Por exemplo, considere a EDP que é obtida no procedimento de Hamiltonização no caso da mecânica singular ou de Dirac [8]

$$u(x, y) = (y_i - r_i(x)) q_i + s(x)^1,$$

¹Índices repetidos indicam soma (convenção de Einstein).

então o sistema subsidiário desta EDP linear será ².

$$\frac{dx_i}{0} = \frac{dy_i}{y_i - r_i} = \frac{du}{u - s},$$

cujas soluções intermediárias são

$$x_i = c_i \quad u - s = C_i(y_i - r_i), \quad (1.18)$$

desde que

$$y_i \neq r_i,$$

onde i é fixo.

Fazendo $C_i = \psi_i(c)$, onde $c = c_1, \dots, c_n$, obtemos a solução geral

$$u = s + \psi_i(c) (y_i - r_i). \quad (1.19)$$

Considerando

$$\psi_i(c) = a_i,$$

onde a_i são constantes arbitrárias, obtemos de (1.18) a solução completa

$$\varphi = s + a_i(y_i - r_i) - u = 0.$$

A imposição da condição de envoltória - (1.17), resulta em $y_i - r_i = 0$, contrariando a hipótese da solução fornecida por (1.18). Portanto, a equação diferencial parcial não possui envoltória. Esse resultado justifica a inexistência de uma função Hamiltoniana usual para o caso de sistemas singulares, desde que a definição utilizada por Hamilton é exatamente a solução envoltória [7, 8].

1.6 Exercícios

1. Determine a equação diferencial parcial correspondente as seguintes soluções completas:

(a) $u = (a - y)(b - x)$;

(b) $2z^2 = (ax - by)^3$;

²A divisão por zero é uma notação comum para sistemas auxiliares [1, 2]

- (c) $(x - a)^2 + (y - b)^2 - z^2 = z - 1$;
- (d) $z^2 - (a - y)(b - x) = z - 1$;
- (e) $z^2 = (ax - by)(ax + by)$;
- (f) $2a(z^2 - 1) - 3bx^3y^2 = 1$;
- (g) $z^2 = A^2 + B^2 + Ax + By$;
- (h) Demonstre que a função dada é uma solução completa da equação diferencial parcial obtida em cada item.
2. Elimine a função arbitrária nas equações abaixo, e verifique que esta é a solução geral da equação diferencial parcial originada:
- (a) $z = x + y + f(x^2 + y^2)$;
- (b) $2z = x^2 + y^2 + f(xy)$;
- (c) $z = F((x + y)/xy)$;
- (d) $z = f(x + y)$;
- (e) $G(xyz, z^2 - x) = 0$.
- (f) $1/z = G(x^2 - y)$;
- (g) $z = x^2 + y^2 + f(x^2y^2)$;
- (h) $G(xy, 2 - z) = 0$;
- (i) $u = G(x - ct), c = cte$;
- (j) $z = x^2 + y^2 + f(xy)$;
- (k) $G(z - x^2, xy) = 0$.
3. Determine a solução envoltória, se ela existir, para as soluções dadas no problema (1). Demonstre que esta é de fato uma solução nova das equações diferenciais parciais.
4. Verifique que as equações abaixo são soluções completas (ou integrais) de

$$z = 1/p + 1/q :$$

- (a) $z = \sqrt{2x + a} + \sqrt{2y + b}$;
- (b) $z^2 = 2(1 + \lambda^{-1})(x + \lambda y)$.
- (c) Determine se existem soluções envoltórias correspondentes a cada solução e verifique seu resultado.
5. Elimine a função arbitrária nas equações abaixo, e verifique que esta é a solução geral da equação diferencial parcial originada:
- (a) $z = G(yx^2 - zy)$;

- (b) $u = f(x + y, xz)$;
- (c) Determine uma solução completa (integral), a partir desta uma solução envoltória e uma solução particular da equação obtida em (a) e em (b).
6. Determine se $z = x^2 + y^2 + a^2xy - 2a + b^2(xy)^{-1} - 2b$ é uma solução completa (integral) da equação obtida em **2e**, a partir desta solução obtenha uma solução envoltória e uma solução particular. Verifique.

Capítulo 2

Métodos Clássicos de Resolução de EDPs de Primeira Ordem

2.1 Introdução

Nesse capítulo são abordados dois dos principais métodos de solução de equações diferenciais parciais de primeira ordem, denominados clássicos, desde que esses remontam ao desenvolvimento no século XVIII. Iniciamos com o método desenvolvido por Lagrange (1736 - 1813) para o caso linear e que fornece a solução geral da equação linear. No caso abordado as soluções gerais são famílias de superfícies dadas pelas equações $F(x,y,z)=0$. Na sequência abordamos o método de Charpit (método de Charpit-Lagrange) que permite a determinação de soluções completas para equações diferenciais parciais não lineares de diversos tipos, e que se reduz ao de Lagrange no caso linear. Esses métodos podem ser facilmente estendidos para equações diferenciais parciais que envolvem funções com n variáveis.

Existem outros métodos abordados com frequência em diversos textos, que fornecem uma solução particular para um problema específico, como por exemplo, o das características desenvolvido por Cauchy (1789 - 1857) e o conhecido como problema de valor inicial ou de Cauchy, onde são dadas condições de contorno para um determinado problema.

2.2 Equações diferenciais parciais lineares

São equações diferenciais parciais da forma

$$P p + Q q = R, \tag{2.1}$$

onde P , Q e R são função das variáveis x , y e z . Como Lagrange foi o primeiro a estudar este tipo de equação ela passou a ser chamada de *equação de Lagrange*.

Podemos generalizar esta equação para n variáveis independentes como

$$\sum_{i=1}^n F_i p_i = G, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

onde F_i e G são funções das variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_n e da variável dependente z , sendo que $p_i = \partial z / \partial x_i$. É importante ressaltar que o termo *linear* significa que as derivadas p_i aparecem em primeira ordem, mas os seus coeficientes são quaisquer funções das variáveis.

A *solução geral* da equação diferencial parcial linear (2.1) é

$$G(u, v) = 0, \quad (2.3)$$

onde G é uma função arbitrária de $u(x, y, z) = c_1$ e $v(x, y, z) = c_2$, que por sua vez são as *integrais intermediárias* do *sistema auxiliar* de equações

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \quad (2.4)$$

O que é facilmente demonstrado [1, 2, 10]. [Demonstre!]

Vamos considerar como exemplo da aplicação do método a equação diferencial parcial

$$x^2 p + y^2 q = xz.$$

O sistema auxiliar a partir de (2.4) é

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{xz},$$

O qual fornece as integrais intermediárias

$$x^{-1} - y^{-1} = c_1, \quad z/x = c_2$$

logo de (2.3) a solução geral é dada como

$$G(x^{-1} - y^{-1}, z/x) = 0$$

ou

$$z = x g(x^{-1} - y^{-1}).$$

Este método pode ser generalizado para equações diferenciais parciais do tipo (2.2). [Demonstre!]

Ainda podemos considerar o caso que a solução completa ou particular da equação diferencial parcial (2.1) é a requerida, isto é, uma solução que obedeça a determinadas condições, como, por exemplo, soluções que passem por uma determinada curva dada pelas suas equações paramétricas:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

Considerando a substituição destas equações nas soluções intermediárias do sistema auxiliar dado por (2.4)

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x(t), y(t), z(t)) = c_1 \\ v(x, y, z) &= v(x(t), y(t), z(t)) = c_2, \end{aligned} \tag{2.5}$$

obtemos um sistema a partir do qual eliminamos a variável t , obtendo uma relação entre as constantes e conseqüentemente obtemos uma solução particular para o problema a partir de

$$G(c_1, c_2) = G(x, y, z) = 0.$$

Como exemplo considere a equação diferencial parcial

$$xp - yq = x,$$

sendo que a solução, que é uma superfície, deve passar pela seguinte curva:

$$\begin{aligned} x(t) &= -t; \\ y(t) &= 1 - t; \\ z(t) &= -2t + t^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

O sistema auxiliar dado por (2.4)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{x},$$

fornece as integrais intermediárias como

$$xy = c_1,$$

$$z - x = c_2,$$

substituindo (2.6) neste sistema de equações e eliminando t obtemos a relação

$$c_2 = c_1$$

resultando portanto na solução particular

$$z = x + xy.$$

Observe que não foi necessária a determinação da solução geral. [Mostre que está é uma solução particular!]

2.3 Exercícios

1. Determine a solução geral das equações diferenciais parciais abaixo, verificando as soluções obtidas:

- (a) $z(xp + yq) = y^2 - x^2$;
- (b) $px(z - 2y^2) = (z - qy)(z - y^2 - 2x^3)$;
- (c) $(px - qy)(x + y) = -(x - y)(2x + 2y + z)$;
- (d) $y^2p - xyq = x(z - 2y)$;
- (e) $(y + xz)p - (x + yz) = x^2 - y^2$;
- (f) $x(x^2 + 3y^2)p - y(3x^2 + y^2)q = 2z(y^2 - x^2)$;
- (g) $(y + z)u_x + (x + z)u_y + (x - y)u_z = 0$;
- (h) $xu_x + yu_y + zu_z = u$.

2.4 Equações diferenciais parciais não lineares

A obtenção de soluções gerais para equações diferenciais parciais não lineares apresenta uma grande dificuldade, existindo vários métodos específicos para determinados tipos de equação, que fornecem soluções completas (integrais) para equações diferenciais parciais do tipo (1.3) como

$$F(x, y, z, a, b) = 0. \quad (2.7)$$

A partir desta podemos obter soluções particulares que obedecem a determinadas condições iniciais e/ou de contorno, ou então, aquelas obtidas através da determinação a partir das condições de envoltória dadas por (1.11) sobre as superfícies representadas por (2.7).

Existem uma série de métodos específicos para a obtenção de solução particulares de equações diferenciais parciais não lineares. Entre esses o que é baseado principalmente em ideias geométricas, desenvolvido por Cauchy é denominado de método das características. Neste método também obtemos soluções particulares únicas para as condições dadas de um problema específico [1, 2, 10].

Outro método que fornece soluções completas para equações diferenciais parciais de primeira ordem, lineares ou não, é o método de Charpit que iremos desenvolver na próxima seção [1, 2].

2.5 Método de Charpit

Um método para resolver a equação diferencial parcial $f(p, q, x, y, z) = 0$, linear ou não, foi proposto por Charpit, fornecendo uma solução completa. Alguns textos o denominam de método de Charpit-Lagrange desde que no caso linear este se reduz ao de Lagrange.

Com o intuito de desenvolver o método de Charpit vamos analisar as condições em que todas as soluções de uma determinada equação diferencial parcial

$$f(p, q, x, y, z) = 0 \quad (2.8)$$

são também soluções da equação

$$g(p, q, x, y, z) = 0. \quad (2.9)$$

Neste caso as equações são denominadas de *compatíveis*.

Se o Jacobiano

$$J \equiv \frac{\partial(f, g)}{\partial(p, q)} \neq 0 \quad (2.10)$$

então a partir do sistema de equações (2.8) e (2.9) podemos obter as seguintes expressões explícitas para p e q

$$\begin{aligned} p &= \phi(x, y, z) \\ q &= \psi(x, y, z). \end{aligned} \tag{2.11}$$

A condição para que o par de equações diferenciais parciais seja compatível é equivalente a condição de que o sistema (2.8) seja completamente integrável, i.e., que a equação

$$\phi dx + \psi dy = dz \tag{2.12}$$

seja integrável. A condição de integrabilidade é dada por [1]

$$[f, g] = 0, \tag{2.13}$$

onde

$$[f, g] \equiv \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, p)} + p \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, p)} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, q)} + q \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, q)}. \tag{2.14}$$

[Prove!]

A ideia fundamental do método de Charpit é a introdução de uma segunda equação diferencial parcial de primeira ordem

$$g(p, q, x, y, z, a) = 0, \tag{2.15}$$

que contém uma constante arbitrária a e que deve satisfazer as seguintes condições:

- (a) As equações (2.8) e (2.9) podem ser resolvidas fornecendo

$$p = p(x, y, z, a)$$

e

$$q = q(x, y, z, a);$$

- (b) A seguinte equação é integrável

$$dz = p(x, y, z, a)dx + q(x, y, z, a)dy. \tag{2.16}$$

Quando tal função g é encontrada a solução da equação (2.16)

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \quad (2.17)$$

contendo duas constantes arbitrárias, será uma solução completa da equação (2.8).

O principal problema a ser resolvido é a determinação da segunda equação (2.9), i.e., o que precisamos determinar é uma equação $g = 0$ compatível com a equação dada $f = 0$. Esta compatibilidade implica nas condições dadas pelas equações (2.13) e (2.14).

Expandindo a última equação (2.14) observamos que ela é equivalente a equação diferencial parcial linear

$$f_p \frac{\partial g}{\partial x} + f_q \frac{\partial g}{\partial y} + (pf_p + qf_q) \frac{\partial g}{\partial z} - (f_x + pf_z) \frac{\partial g}{\partial p} - (f_y + qf_z) \frac{\partial g}{\partial q} = 0 \quad (2.18)$$

para a determinação de g . Portanto nosso problema agora é encontrar uma solução desta equação diferencial parcial linear, a mais simples possível e que depende de a . Com este intuito utilizamos o sistema de equações subsidiárias correspondentes a equação diferencial parcial acima

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{-(f_x + pf_z)} = \frac{dq}{-(f_y + qf_z)}. \quad (2.19)$$

Estas equações são denominadas *equações de Charpit*.

A partir das soluções destas equações se obtém p e q , as quais substituídas em (2.17) fornecem a solução completa de (2.8).

É interessante observar que, geralmente, não é necessário resolver todas as equações de Charpit, mas somente aquelas necessárias para determinar p e q .

Para exemplificar vamos considerar alguns tipos de equações que podem ser facilmente resolvidos pelo método de Charpit.

(a) *Equações envolvendo somente p e q .*

Para estas equações temos

$$f(p, q) = 0. \quad (2.20)$$

As equações de Charpit de (2.19) são

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}.$$

Uma solução simples é

$$p = a,$$

e de (2.20)

$$q = Q(a).$$

Portanto a solução é obtida integrando (2.16)

$$z = ax + Q(a)y + b,$$

onde b é uma constante.

(b) *Equações que não envolvem as variáveis independentes.*

A equação diferencial parcial neste caso é

$$f(p, q, z) = 0, \tag{2.21}$$

cujos sistema subsidiário, a partir da equação (2.19), é

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{p f_p + q f_q} = \frac{dp}{-p f_z} = \frac{dq}{-q f_z}.$$

Das duas últimas obtemos a relação

$$p = aq,$$

que substituída em (2.11) permite a determinação de p e q . O restante do procedimento é idêntico ao de (a). [Faça um exemplo!]

(c) *Equações Separáveis.*

Uma equação diferencial parcial é dita *separável* se puder ser escrita na forma

$$F(x, p) = G(y, q). \tag{2.22}$$

As equações de Charpit de (2.19) são

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{-G_q} = \frac{dz}{p F_p - q G_q} = \frac{dp}{-F_x} = \frac{dq}{G_y}.$$

Uma das equações que podem ser obtidas é

$$F_p dp + F_x dx = 0,$$

cuja solução é

$$F(x, p) = a,$$

e portanto de (2.22)

$$G_g(y, q) = a.$$

A partir do sistema de equações formadas pelas duas últimas equações se determina p e q , e assim se obtém uma solução completa da equação procedendo da mesma maneira que nos casos anteriores.

Como exemplo, vamos considerar a equação diferencial parcial

$$p^2 y(1 + x^2) = qx^2,$$

que pode ser reescrita na forma separável como

$$\frac{p^2(1 + x^2)}{x^2} = \frac{q}{y}.$$

Das equações de Charpit resulta que

$$p = \frac{ax}{\sqrt{1 + x^2}}$$

e

$$q = a^2 y,$$

portanto uma solução completa é

$$z = a\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}a^2 y^2 + b,$$

onde a e b são constantes. [Prove!]

(d) *Equação de Clairaut.*

Uma equação diferencial parcial é dita de Clairaut se pode ser escrita na forma

$$z = xp + yq + g(p, q). \quad (2.23)$$

cujo sistema subsidiário de (2.19) é

$$\frac{dx}{x + g_p} = \frac{dy}{y + g_q} = \frac{dz}{px + yq + pg_p + qg_q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}.$$

Logo as soluções intermediárias são

$$p = a, \quad q = b,$$

onde a, b são constantes, e substituindo em (2.23) obtemos a solução completa

$$z = ax + by + f(a, b).$$

É interessante observar que no caso da equação diferencial parcial linear o método de Charpit se reduz ao método apresentado anteriormente - § 2.1. [Demonstre!]

2.6 Exercícios

1. Mostre que as equações diferenciais parciais

$$xp - yq = x,$$

e

$$x^2p + q = xz$$

são compatíveis e determine suas soluções. Foi necessário resolver as duas equações diferenciais parciais? Justifique.

2. Considere

$$u = u(x_1, x_2, x_3)$$

e

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Mostre que as equações diferenciais parciais

$$f(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3) = 0$$

e

$$g(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3) = 0$$

são compatíveis se

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x_1, u_1)} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(x_2, u_2)} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(x_3, u_3)} = 0.$$

3. Determine a solução completa das equações diferenciais parciais abaixo, verificando as soluções:

- (a) $(p^2 + q^2)y = qz$;
- (b) $2x + p^2 + qy + 2y^2 = 0$;
- (c) $p = (z + qy)^2$;
- (d) $z^2 = xypq$;
- (e) $q = 3p^2$;
- (f) $p - 3x^2 = q^2 - y$;
- (g) $z^2(p^2z^2 + q^2) = 1$;
- (h) $2(z + xp + yq) = yp^2$;
- (i) $p + q = pq$;
- (j) $z = p^2 - q^2$;
- (k) $p^2q(x^2 + y^2) = p^2 + q$;
- (l) $pqz = p^2(xq + p^2) + q^2(yp + q^2)$;
- (m) $xp + yq - p - q + \ln pq - z = 0$.

4. Considere a equação diferencial parcial (a)

$$z = xp + yq + p + q + pq.$$

- (a) Determine utilizando o método de Charpit a solução completa da equação diferencial parcial.
- (b) Mostre que esta é uma família de planos e determine a solução envoltória desta, se existir.
- (c) Determine uma solução particular que é a envoltória da solução da família

de planos que passam pela origem.

- (d) Existe alguma relação entre as duas soluções envoltórias.

2.7 Exercícios complementares

1. Demonstre que no caso da equação diferencial parcial linear o método de Charpit se reduz ao apresentado na seção 2.1 para a equação de Lagrange.

Dê um exemplo.

2. Mostre a aplicação do método de Charpit para cada um dos tipos de equações diferenciais parciais, justificando os passos. Escolha um exemplo para cada tipo equação e determine a sua solução, verifique seu resultado:

a) $f(p, q) = 0$;

b) $f(p, q, z) = 0$;

c) $f(x, p) = g(y, q)$;

d) $z = xp + yq + g(p, q)$.

3. Mostre que as equações diferenciais parciais

$$yp - xq = y,$$

e

$$p + y^2q = zy$$

são compatíveis e determine suas soluções.

Foi necessário resolver as duas equações diferenciais parciais? Justifique.

4. Determine a solução geral, se possível, ou a completa das equações diferenciais parciais abaixo, verifique as soluções obtidas:

(a) $p/xz - q/yz - 1 = 0$;

(b) $(x - z)p + (z - y)q - y = 0$;

(c) $z^2p + x^2q - x^2 = 0$;

(d) $y^3z^3p + x^3z^3q - x^3 = 0$;

(e) $yu_x + xu_y - yu_z = 0$, onde $u = u(x, y, z)$;

(f) $yu_x + uu_y + u^2 = 0$, onde $u = u(x, y, z)$.

(h) $(p^2 - q^2)y = pz$;

(i) $xzp - yzq - z = 0$;

(j) $(x + y)p + (y + z)q - z + x = 0$;

- (k) $y^2p + z^2q - y^2 = 0$;
- (l) $y^2z^2p + x^2z^2q - x^2y^2 = 0$;
- (m) $yu_x + xy^3u_y - xz^2u_z = yu$, onde $u = u(x, y, z)$;
- (n) $xuu_x + u_y - u_z + y^2u^2 = 0$, onde $u = u(x, y, z)$;
- (o) $p^2 - (1 - z)q^2 = z_{-1}$;
- (p) $p^4 - q^2 = x^2 - y^2$;
- (q) $(p^2 + q^2)x = pz$;
- (r) $z^2 = p^2 - q^2$.

5. Resolva a equação diferencial parcial

$$z = xp + yq + g(p^2 + q^2).$$

Qual é o tipo de solução obtida? Qual é o método empregado?

Capítulo 3

Obtenção de Soluções Gerais para Determinadas EDPs

3.1 Solução geral de $F(p, q) = 0$ e $F(f(x)p, q) = 0$

.

3.1.1 Introdução

O método de Charpit, como outros métodos, fornecem em geral no máximo soluções completas, ou particulares, como é o caso do método das características quando aplicados a equações diferenciais parciais, lineares ou não, dos tipos:

$$F(p, q) = 0;$$

$$F(f(x)p, q) = 0;$$

$$F(p, h(y)q) = 0$$

ou

$$F(f(x)p, q) = V(x),$$

onde $p = \partial u / \partial x$, $q = \partial u / \partial y$ e $u = u(x, y)$ [1, 2, 3, 10].

No método proposto aqui obtém-se infinitas soluções integrais, i.e., a solução geral na forma implícita e em determinados casos a solução geral de forma explícita para equações diferenciais parciais lineares ou não.

O procedimento desenvolvido tem como base uma transformada de Legendre e a utilização de um teorema para formas diferenciais Pfaffianas, que fornece a condição para que estas se tornem integráveis [1].

Na extensão do método podemos obter soluções para equações diferenciais parciais de segunda ordem de um dos tipos

$$F(r, s) = 0$$

e

$$F(s, t) = 0,$$

onde se utiliza a notação:

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

desde que estas podem ser transformadas nas equações diferenciais parciais acima [11].

Outra extensão possível é para equações diferenciais parciais de primeira ordem com diversas variáveis

$$F(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = 0,$$

sendo

$$u = u(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n),$$

onde

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad q_i = \frac{\partial u}{\partial y_i}.$$

3.1.2 Solução Geral para a EDP $F(p, q) = 0$

Considere a equação diferencial parcial de primeira ordem

$$F(p, q) = 0,$$

onde $u = u(x, y)$ e

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

A forma diferencial Pfaffiana para u é

$$du = p dx + q dy. \quad (3.1)$$

Aplicando uma transformada de Legendre em (3.1) obtemos

$$d(xp + yq) - du - xdp - ydq = 0.$$

Desde que

$$dF = F_p dp + F_q dq = 0,$$

logo

$$dp = -\left(\frac{F_q}{F_p}\right) dq$$

então

$$d(xp + yq) - du + \left(x \frac{F_q}{F_p} - y\right) dq = 0. \quad (3.2)$$

Sendo essa uma forma diferencial Pfaffiana pode ser aplicado o teorema que fornece a condição de integrabilidade [1]:

Teorema 3.1. *A condição necessária e suficiente para que a equação diferencial Pfaffiana*

$$\mathbf{X} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

seja integrável é que

$$\mathbf{X} \cdot \text{rot}\mathbf{X} = 0$$

.

Que neste caso resulta em

$$\mathbf{X} \cdot \text{rot}\mathbf{X} = -\left(\frac{\partial}{\partial(xp + yq)} + \frac{\partial}{\partial u}\right) \left(x \frac{F_q}{F_p} - y\right) = 0,$$

que integrada fornece

$$u - xp - yq = \phi(q). \quad (3.3)$$

Substituindo na equação (3.2) obtém-se

$$\left(x \frac{F_q}{F_p} - y \right) = -\phi'(q). \quad (3.4)$$

A solução geral da equação diferencial é dada pela equação (3.3) na qual q é determinado a partir de (3.4). Esta é uma solução geral desde que ela possui uma função arbitrária $\phi(q)$, i.e., a cada escolha arbitrária de $\phi(q)$ a equação (3.4) e a equação diferencial parcial original formam um sistema de equações algébrico que determina $q = q(x, y)$ e $p = p(x, y)$, que uma vez substituídos em (3.3) fornecem uma solução da equação diferencial parcial, que pode ser completa ou particular.

Em alguns casos podemos explicitar $p = f(q)$ (ou $q = g(p)$) e a solução geral da equação diferencial parcial a partir de (3.3) fica

$$u = x f(q) + yq + \phi(q), \quad (3.5)$$

com a condição que é obtida de (3.4)

$$x f'(q) + y = \phi'(q). \quad (3.6)$$

Um exemplo da aplicação do método no caso em que podemos explicitar p é a equação

$$F(p, q) = p - Bq - A = 0,$$

onde A, B são constantes. Portanto

$$p = f(q) = Bq + A,$$

e

$$f' = B,$$

portanto a solução será de (3.5)

$$u = xp + yq + \phi(q) = x(Bq + A) + yq + \phi(q),$$

onde $q = q(x, y)$ será determinada a partir de (3.6).
Neste caso (3.6) fica

$$xf' + y = Bx + y = \phi'(q),$$

logo $q = \Psi(Bx + y)$ e a solução geral da equação diferencial parcial é dada por

$$\begin{aligned} u &= Ax + (Bx + y) \Psi(Bx + y) + \phi(\Psi(Bx + y)) = \\ &= Ax + \Phi(Bx + y). \end{aligned}$$

3.1.3 Solução Geral para a EDP $F(f(x)p, q) = 0$

Considerando a equação diferencial parcial

$$F(f(x)p, q) = 0,$$

para utilizar um procedimento semelhante ao da seção anterior, explicitamos p

$$p = G(q)/f(x)$$

substituímos na forma diferencial e aplicamos uma transformada de Legendre, obtendo

$$du = d[H(x)G(q) + yq] - [H(x)G'(q) + y] dq,$$

onde

$$H(x) = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

Esta é uma forma diferencial Pfaffiana e a sua condição de integrabilidade obtida a partir do Teorema 3.1 é

$$H(x)G'(q) + y = \phi'(q). \quad (3.7)$$

Portanto a solução geral da equação diferencial parcial será

$$u = H(x)G(q) + yq - \phi(q), \quad (3.8)$$

onde $\phi(q)$ é uma função arbitrária que uma vez escolhida irá determinar o valor de $q = q(x, y)$ a partir da equação (3.7), e que após determinada deve ser substituída em (3.8) uma solução completa ou particular.

De maneira análoga se obtém a solução geral de

$$F(p, h(y)q) = 0.$$

Se

$$q = G(p)/h(y)$$

então a solução geral é dada por

$$u = xp + G(p)H(y) - \phi(p),$$

onde

$$H(y) = \int \frac{dy}{h(y)}$$

e a condição de integrabilidade

$$\phi'(p) = G'(p)H(y) + x.$$

3.2 Soluções generalizadas de $F(r, s) = 0$ e $G(s, t) = 0$

Na extensão do método podemos obter soluções para equações diferenciais parciais de segunda ordem de um dos tipos

$$F(r, s) = 0$$

ou

$$G(s, t) = 0,$$

onde

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

desde que estas podem ser transformadas nas equações diferenciais parciais acima. As soluções obtidas dependem de uma função arbitrária, como são EDPs de segunda ordem a solução geral depende de duas função arbitrárias, logo definimos esta como solução generalizada.

Solução generalizada de uma EDP de segunda ordem é definida como aquela que contém uma função arbitrária,

Com esse intuito basta fazer as transformações

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

No caso da equação diferencial parcial $F(r, s) = 0$ resulta em

$$F\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}\right) = F(p, q) = 0,$$

e para a equação diferencial parcial $G(s, t) = 0$ obtemos

$$G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}\right) = G(p, q) = 0.$$

Portanto ambas recaem no caso acima descrito $f(p, q) = 0$, § 3.1.2.

Existem outras EDPs de segunda ordem que por diversos métodos podem ser transformadas em equações diferenciais parciais de primeira ordem dos tipos abordado aqui, por exemplo, através do método de Monge para EDPs de segunda ordem homogêneas. Nesses casos sempre obtemos uma solução generalizada da equação diferencial parcial [11].

3.3 Solução geral da equação de Hamilton Jacobi unidimensional

Considere a mais geral equação de Hamilton-Jacobi para um sistema conservativo não relativístico unidimensional

$$a(x) \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

ou de forma equivalente,

$$ap^2 + V - q = 0, \quad (3.9)$$

onde

$$p = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Portanto

$$dS = p dx + q dt = d(px + qt) - x dp - t dq, \quad (3.10)$$

onde foi aplicada uma transformada de Legendre.

Substituindo p obtido a partir de (3.9) em (3.10) obtemos

$$\begin{aligned} dS &= d\left(x\sqrt{(q-V)/a} + qt\right) - \\ &- \frac{x(a'V - aV' - qa')}{2\sqrt{a(q-V)}} dx - \\ &- \left(t + \frac{x}{2a\sqrt{a(q-V)}}\right) dq, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $a' = da/dx$ e $V' = dv/dx$. A integração de (3.11) resulta em

$$S(x, t) = x\sqrt{(q-V)/a} + qt - F(x, q), \quad (3.12)$$

sendo F tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q} &= t + \frac{x}{2\sqrt{a(q-V)}}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{x(a'V - aV' - qa')}{2a\sqrt{a(q-V)}} \equiv H(x, q). \end{aligned} \quad (3.13)$$

A integração da Eq. (3.14) conduz a

$$F = \int H(x, q) dx + G(q),$$

onde G é uma função arbitrária. Usando este resultado em (3.13) se obtém a equação que define a variável q como uma função de x e t , para cada escolha arbitrária da função G :

$$\int \frac{\partial H}{\partial q} dx + G'(q) = t + \frac{x}{2\sqrt{a(q-V)}}. \quad (3.14)$$

Então S , fornecido por (3.12) é uma função de x e t . Facilmente se comprova que a solução S resolve a equação (3.9) e como possui uma função arbitrária é portanto a sua solução geral. [Demonstre!]

É interessante ressaltar que no método de separação de variáveis aplicados à equação de Hamilton-Jacobi, as soluções usuais são obtidas fazendo a hipótese de que $q = \text{constante}$ (i.e., $dq = 0$, $S(x, t) = W(x) + C(t)$) a qual não admite a obtenção de uma solução geral.

Como primeiro exemplo considere uma partícula livre descrita pela equação de Hamilton-Jacobi a seguir ($a = \text{constante}$)

$$a \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial S}{\partial t} = ap^2 - q = 0,$$

A partir de (3.12) se obtém a solução

$$S = x\sqrt{q/a} + qt - F.$$

onde a função F é determinada a partir do sistema obtido de (3.13) e (3.14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q} &= t + \frac{x}{2\sqrt{aq}}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Cuja solução é

$$\begin{aligned} F &= G(q), \\ G'(q) &= t + \frac{x}{2\sqrt{aq}}. \end{aligned}$$

Esta equação fornece a cada escolha da função arbitrária G a variável q como uma função de x e t . Por exemplo, se $G = Cq$ então

$$q = x^2/4a(C - t)^2,$$

logo

$$S(x, t) = x^2/4a(C - t). \quad (3.15)$$

Esta solução foi previamente obtida utilizando o conhecimento do movimento da partícula [12], o que não foi necessário nesse método.

A solução

$$S(x, t) = x\sqrt{C/a} + Ct$$

obtida pelo método de separação de variáveis é obtida substituindo $dq = 0$ em (3.11).

Outro exemplo interessante é a equação de Hamilton-Jacobi correspondente ao problema do oscilador harmônico que (em unidades convenientes) é dada por

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + x^2 - \frac{\partial S}{\partial t} = p^2 + x^2 - q = 0.$$

Sua solução é

$$S(x, t) = qt + \frac{1}{2}x\sqrt{q-x^2} + \frac{q}{2}\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}\right) - G(q),$$

onde $q = q(x, t)$ é obtido da equação

$$t + \frac{1}{2}x\sqrt{q-x^2} = G'(q) + \frac{q}{2}\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}\right),$$

para cada escolha da função arbitrária G .

A solução com variáveis separáveis ($q = C$) é

$$S(x, t) = \frac{1}{2}x\sqrt{C-x^2} + Ct - \frac{C}{2}\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right).$$

3.4 Solução generalizada da EDP p-Laplace

A equação

$$u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0 \tag{3.16}$$

é uma equação diferencial parcial p -harmônica (ou p -Laplace) definida em \mathbb{R}^2 , para $p \rightarrow \infty$ foi estudada por G. Aronsson [13, 14]. Quaisquer soluções obtidas para esta equação diferencial parcial trazem informações importantes em diversas situações desde que esta é uma equação diferencial parcial não linear.

No caso as funções $u = u(x, y)$ são as soluções de viscosidade ∞ -harmônicas de $\Delta_\infty u = 0$, onde

$$\Delta_\infty u = |\nabla u|^{-2} \sum_{i,j} u_{x_i} u_{x_i x_j} u_{x_j}.$$

O conjunto de soluções de (3.17) apresentados em outros artigos, como nos de G. Aronsson [13, 14] e o de Peres [15] pode ser ampliado. Com esse intuito é utilizado o método de Monge para equações diferenciais parciais uniformes ou quase lineares.¹ O método de Monge reduz esta equação diferencial parcial de segunda ordem no sistema de Monge, cuja solução resulta numa EDP de primeira ordem do tipo $f(p, q) = 0$. Portanto a aplicação do método desenvolvido [4, 6, 16] para determinar a solução geral desta equação fornece uma solução generalizada da equação (3.17) [11].

A equação diferencial parcial p -harmônica (3.17) pode ser reescrita como

$$p^2 r + 2pqs + q^2 t = 0, \quad (3.17)$$

onde

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

O método de Monge [1], pode ser aplicado para a equação (3.18) que sendo quasilinear, uniforme e homogênea resulta no seguinte sistema de Monge:

$$p^2(dy)^2 - 2pqdx dy + q^2(dx)^2 = 0 \quad (3.18)$$

$$p^2 dp dy + q^2 dq dx = 0. \quad (3.19)$$

A partir da equação (3.19) temos

$$(p dy - q dx)^2 = 0,$$

ou

$$dy = \frac{q}{p} dx.$$

Que substituída em (3.20) fornece a forma diferencial

¹Equações diferenciais parciais da forma $Rr + Ss + Tt = V$, onde R, S, T e V são funções de p, q, x, y e u são denominadas uniformes ou quase lineares.

$$pdp + qdq = 0,$$

cuja solução é

$$p^2 + q^2 = \lambda^2,$$

onde λ é uma constante arbitrária.

Como a equação diferencial parcial é da forma $F(p, q) = 0$ logo sua solução é dada pelas equações (3.5)

$$u = x\sqrt{\lambda^2 - q^2} + yq + \varphi(q), \quad (3.20)$$

com a condição fornecida por (3.6)

$$\varphi'(q) = y - \frac{xq}{\sqrt{\lambda^2 - q^2}}, \quad (3.21)$$

onde $\varphi(q)$ é uma função arbitrária.

Portanto, obtemos uma solução generalizada, i.e., uma solução de (3.17) que depende de uma função arbitrária, o que amplia as soluções que existem [13, 14].

Cada escolha da função arbitrária $\varphi(q)$, a eq. (3.22) fornece $q = q(x, y)$ que substituído em (3.21) determina uma solução completa $u = u(x, y)$, dependente de duas constantes arbitrárias.

Considere

$$\varphi(q) = \arcsin\left(\frac{q}{\lambda}\right) + \mu,$$

onde μ é uma constante arbitrária. Da equação (3.22) temos

$$q = \frac{x \pm y\sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2) - 1}}{x^2 + y^2}.$$

A solução completa da EDP (3.17) é obtida substituindo q em (3.21) resultando em

$$\begin{aligned} u &= x \left[\lambda^2 - \left(\frac{x \pm y\sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2) - 1}}{x^2 + y^2} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &+ y \left(\frac{x \pm y\sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2) - 1}}{x^2 + y^2} \right) + \\ &+ \arcsin\left(\frac{x \pm y\sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2) - 1}}{\lambda(x^2 + y^2)} \right) + \mu. \end{aligned}$$

3.5 Extensões e generalizações possíveis

Como este procedimento não apresenta quaisquer restrições quando aplicado a diferentes tipos de equações diferenciais parciais, então podemos concluir que de fato é um método bastante geral. Ao passo que este fornece sempre soluções dependentes de uma função arbitrária é permitido afirmar que este pode ser aplicado a qualquer problema, pois não existem restrições sobre as condições que este irá impor, a não ser aquelas devidas a cálculos algébricos específicos, nos quais os métodos numéricos conhecidos podem ser aplicados. Numa abordagem futura poderia se tentar a extensão desse método para um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem, como por exemplo, os sistemas dinâmicos.

3.6 Exercícios

1. Escreva um texto sobre cada um dos itens:
 - (a) Condições Iniciais e Condições de Contorno;
 - (b) Soluções Envoltórias;
 - (c) Solução de EDPs para n variáveis independentes;
 - (d) Solução de EDPs quasilineares;
 - (e) Problema de Cauchy;
 - (f) Método das características;
 - (g) Formas diferenciais Pfaffianas;
 - (h) Transformada de Legendre;
 - (i) EDPs compatíveis;
 - (j) Aplicações de EDPs de primeira ordem.

Capítulo 4

Aplicações em Fundamentos da Mecânica Analítica Hamiltoniana

4.1 Introdução

Uma nova abordagem generalizada para os fundamentos da Mecânica Analítica é representada por meio do estudo de Hamiltonizações alternativas, através da análise matemática de diferentes soluções da equação diferencial parcial que define a função Hamiltoniana, suas consequências e aplicações, como por exemplo: Mecânica Singular ou de Dirac, linearização da equação de Hamilton-Jacobi. Concluindo com a discussão de possíveis generalizações e aplicações.

Apesar de ser um capítulo totalmente voltado para os fundamentos da Mecânica Analítica é importante ressaltar que todo o desenvolvimento desta teoria é baseado na análise matemática dos diversos tipos de soluções de equação diferenciais parciais e suas consequências.

4.2 Mecânica Lagrangiana

4.2.1 Introdução

Formulações alternativas, em relação a de Newton, serão abordadas para reescrever as equações de movimento que independam do sistema de coordenadas, sendo que estas se fundamentam sobre as considerações das funções de energia envolvidas.

O movimento de um sistema mecânico de N partículas no \mathbb{R}^3 é representado pela solução de um sistema de N equações vetoriais de movimento, obtidas das

leis de Newton, do tipo¹

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{\dot{r}}_i), \quad (4.1)$$

onde \mathbf{r}_i representa o vetor posição de cada partícula, \mathbf{p}_i o seu momentum, \mathbf{F}_i são as forças que atuam no sistema e que podem depender de \mathbf{r}_i , de suas derivadas de qualquer ordem e do tempo.

Este é um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem no caso geral. A obtenção da sua solução depende de $6N$ constantes que são obtidas a partir das condições iniciais ou de contorno dadas. Se observa na natureza que quando as forças podem ser expressas analiticamente elas dependem no máximo das posições e das velocidades das partículas, o que algumas vezes facilita a obtenção de soluções.

Por outro lado a força que atua sobre cada partícula é a soma das forças externas e internas do sistema. Como a força total sobre o sistema é a soma de todas estas forças, a validade da terceira lei de Newton nos garante que esta soma passa a ser o somatório das forças externas que atuam no sistema (a soma das forças internas se anula). Portanto

$$\mathbf{F} \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{P}, \quad (4.2)$$

onde

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$$

é o momentum total do sistema.

Se as forças externas que atuam no sistema se anulam então $\mathbf{P} = \text{constante}$, o que gera um dos princípios de conservação, i.e., *o momentum linear total do sistema é conservado quando a força externa é nula*.

Da mesma forma podemos obter outras constantes de movimento, e que muitas vezes podem ser consideradas como a solução de um determinado problema.

Por outro lado, podemos obter o princípio da conservação da energia que é o mais importante para o desenvolvimento da Mecânica Analítica. Primeiramente, vamos calcular a integral de linha da força sobre a trajetória da partícula sobre a qual ela atua

$$\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \int_1^2 \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{\dot{r}}_i) \cdot d\mathbf{r}_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{\dot{r}}_i^2 \Big|_1^2, \quad (4.3)$$

esta integral de linha é definida como *trabalho realizado pela força*.

Como queremos considerar quantidades conservadas, vamos supor que o trabalho realizado sobre cada partícula é armazenado nesta, sob a forma de energia cinética

¹ Os índices i, j, k, \dots variam de 1 até N .

do movimento, i.e., e a grandeza $\frac{1}{2}m_i\mathbf{d}\mathbf{r}_i^2$ é denominada de T_i =*energia cinética da partícula*. Portanto somando sobre todas as partículas obtemos de (4.3) que

$$\sum_{i=1}^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i\mathbf{d}\mathbf{r}_i^2 \Big|_1^2 = \sum_{i=1}^N T_i \Big|_1^2 = T^{(2)} - T^{(1)}. \quad (4.4)$$

Para determinados sistemas mecânicos, chamados de *conservativos*, o trabalho independe da trajetória real, dependendo, portanto, só dos pontos inicial e final. Logo podemos dizer que

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -dV, \quad (4.5)$$

pois esta é uma diferencial exata, onde a função $V = V(x_I)$, $I = 1, 2, \dots, 3N$, chamada de energia potencial, depende somente das componentes dos vetores posição de cada partícula. Neste caso particular a equação (4.4) fornece

$$T^{(1)} + V^{(1)} = T^{(2)} + V^{(2)} = E. \quad (4.6)$$

Onde definimos E como a *energia total do sistema*. Portanto podemos enunciar o *princípio da conservação da energia* como: *a energia total do sistema $E = T + V$ é conservada*.

As quantidades conservadas de um sistema mecânico são também denominadas de *constantes de movimento*.

Ainda temos de (4.5) que para qualquer sistema conservativo as componentes da força são dadas por

$$F_I = -\frac{\partial V}{\partial x_I}. \quad (4.7)$$

Logo quando o sistema está em equilíbrio, $F_I = 0 \Rightarrow \partial V/\partial x_I = 0$, a energia potencial apresenta valores estacionários (*Princípio da energia mínima*). Podemos considerar este caso como uma primeira aplicação do método da mecânica analítica aplicável a um conjunto restrito de sistemas conservativos.

A mecânica analítica consiste no desenvolvimento da ideia geral de que todas as propriedades mecânicas de sistemas complexos podem ser resumidas especificando a forma matemática de um número limitado de funções escalares da energia.

Nos casos abordados acima dizemos que o sistema tem $3N$ *graus de liberdade*. No entanto, em diversos problemas mecânicos o movimento do sistema é de alguma forma limitado, por exemplo um pêndulo simples, a distância da massa (que consideramos como uma partícula) é constante em relação a um determinado ponto. Quando conseguimos expressar essas limitações como equações algébricas entre as coordenadas e o tempo, chamamos estas de *vínculos holônomicos*. Os demais vínculos que podem ser expressos como inequações, ou equações diferenciais parciais não integráveis, são chamados de *não holônomicos*.

Quando o sistema possui M vínculos, faz com que das $3N$ coordenadas M deixam de ser independentes, reduzindo portanto os graus de liberdade do sistema para $3N - M$. Muitas vezes esses vínculos estão associados a forças descontínuas, ou desconhecidas, impedindo o uso das equações (4.1) para descrevê-los.

Apesar de existirem diversas maneiras de tratar este tipo de problemas, como, por exemplo, adicionando o Princípio de D'Alembert às leis de Newton, este é um dos motivos que conduziram a formulações diferentes como as da mecânica analítica para descrever diversos sistemas mecânicos [17].

4.2.2 Formulação Lagrangiana

O objetivo da formulação Lagrangiana é apresentar uma forma alternativa de escrever as equações de movimento fundamentada em princípios que envolvem considerações sobre funções de energia e na obtenção de equações que independem do sistema de coordenadas generalizadas utilizado.

Na formulação Lagrangiana se utilizam as *coordenadas generalizadas* para descrever o sistema - q_i . Coordenadas generalizadas são geralmente distâncias ou ângulos, mas podem ser outras variáveis associadas ao sistema. Em muitos sistemas mecânicos com vínculos as coordenadas generalizadas podem ser escolhidas de tal forma que os vínculos (holonômicos) ficam automaticamente incluídos. Mas temos os sistemas não holonômicos descritos por $3N$ equações de movimento e M equações de vínculo.

O espaço das coordenadas generalizadas é denominado de *espaço de configuração*. No caso de um sistema de m partículas teremos um espaço de configuração de dimensão $3m$, se existirem vínculos estaremos em algum subespaço deste.

Existe uma função chamada de Lagrangiano do sistema

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t),$$

que descreve este através das equações de movimento de Euler-Lagrange, sendo que este sistema possui N graus de liberdade, q_i são as coordenadas generalizadas do sistema, enquanto que, $\dot{q}_i = dq_i/dt$ são as *velocidades generalizadas*.

As equações movimento podem ser obtidas a partir do Princípio de Hamilton

$$\delta \int L(q, \dot{q}, t) dt = 0.$$

Aplicando a técnica variacional obtemos

$$\delta \int L dt = \int \delta L dt = \int \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0.$$

Integrando por partes o segundo termo da última integral e considerando que estamos impondo a condição de que não existe variação nos extremos, i.e., $\delta \dot{q}_i = 0$ o princípio de Hamilton resulta em

$$\int \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0.$$

Como δq_i são arbitrários, então

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (4.8)$$

que são conhecidas como equações de Euler-Lagrange do sistema.

Existem maneiras alternativas de deduzir as equações de Euler-Lagrange utilizando o fato do sistema ser conservativo. Por outro lado quando utilizamos o princípio de Hamilton as equações de Euler-Lagrange podem ser aplicadas a sistemas não mecânicos, nos quais as leis de Newton e conseqüentemente a noção de sistema conservativo não possuem um significado óbvio. Além do procedimento ser elegante matematicamente e conciso, pode ser facilmente generalizado para funções Lagrangeanas que dependem de derivadas superiores das coordenadas generalizadas.

As N equações de Euler-Lagrange obtidas representam as propriedades do sistema, para quaisquer sistemas mecânicos holônomos ou não. A limitação para os sistemas conservativos ocorre desde que consideremos a definição usual da função Lagrangiana

$$L = T - V, \quad (4.9)$$

onde T é a energia cinética do sistema, e $V = V(q)$ a sua energia potencial [17, 18].

4.3 Mecânica Hamiltoniana

4.3.1 Introdução

Na formulação Lagrangiana e na Newtoniana aparecem quantidades que definimos como momentum linear (quantidade de movimento) $\mathbf{p} = m\mathbf{\dot{r}}$ ou momentum angular (momento da quantidade de movimento) $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. No entanto, é importante ressaltar que as únicas variáveis do formalismo Lagrangiano são as coordenadas generalizadas e o tempo. E de fato, no espaço de configuração, dados $q_i = q_i(t)$ obtemos a trajetória da partícula e suas velocidades $\dot{q}_i = \dot{q}_i(t)$.

É possível definir um novo conjunto de variáveis independentes p_i , denominadas de *momenta generalizados* como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (4.10)$$

associadas as coordenadas generalizadas q_i .

O conjunto dos pares de variáveis q_i, p_i são denominadas de *variáveis conjugadas*. Os N pares q_i, p_i definem um novo espaço chamado de *espaço de fase*. A mudança de coordenadas nos conduzem a outra formulação, a de Hamilton, para a mecânica analítica.

O momentum generalizado se conserva sempre que a sua coordenada conjugada não aparece na função Lagrangiana, denominada de *coordenada ignorável*, desde que de (4.8) obtemos

$$(d/dt)(\partial L/\partial \dot{q}_i) = \partial L/\partial q_i = 0,$$

implicando em $p_i = C_i$, onde C_i são constantes.

Aparentemente não existem grandes vantagens na nova formulação em relação a solução dos problemas resolvidos pela formulação Lagrangiana. No entanto, por exemplo, cada equação de movimento de Euler-Lagrange de segunda ordem se transforma em duas de primeira ordem, tornando a determinação de soluções mais simples. Ainda podemos dizer que no espaço de fase como a cada ponto correspondem seis constantes, o conhecimento de um único ponto deste espaço é suficiente para determinar completamente a solução (que tem seis constantes arbitrárias), enquanto que no espaço de configuração um ponto corresponde a três constantes, não determinando uma trajetória única.

Na verdade, a principal vantagem da formulação Hamiltoniana é formar uma base bastante sólida para as mecânicas quântica e estatística.

4.3.2 A função Hamiltoniana

Na formulação Hamiltoniana se define uma nova variável dependente

$$H(p, q, t) = H(p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N, t),$$

chamada de Hamiltoniano do sistema, tal que exista a seguinte relação entre as novas variáveis e as anteriores

$$H(p, q, t) \equiv p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (4.11)$$

onde as variáveis \dot{q}_i devem ser obtidas a partir de (4.10) como funções das variáveis q, p e t . As equações (4.10) fornecem o sistema de equações dadas por $p_i = p_i(q, \dot{q}, t)$ que deve ser resolvido para obtermos $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$, o que nem sempre é simples. Sendo que no caso em que a função Lagrangiana é linear em alguns \dot{q}_i 's se torna impossível, gerando todo um desenvolvimento de um ramo da mecânica analítica chamada de mecânica singular ou de Dirac.

Esta definição da função Hamiltoniana H pode ser justificada de várias formas, por ser uma grandeza que representa uma constante de movimento, desde que a função Lagrangiana não dependa de t , ou por representar a energia total do sistema, $H = T + V = E$, no caso conservativo e em alguns outros sistemas. No entanto,

não devemos confundi-la com a energia total, pois existem sistemas onde a energia total e o Hamiltoniano são constantes de movimento mas são diferentes [17, 18].

A definição dada por (4.11) é uma transformação de coordenadas denominada transformação de Legendre, que muda as variáveis do conjunto $\{q_i, \dot{q}_i, t\}$ para $\{q_i, p_i, t\}$.

4.3.3 Equações canônicas de movimento

A forma alternativa para as equações de movimento podem ser obtidas diferenciando $H = H(q, p, t)$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (4.12)$$

e de (4.11)

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - dL. \quad (4.13)$$

Como $L = L(q, \dot{q}, t)$ então

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \\ &= \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

onde utilizamos (4.10), substituindo em (4.13) e utilizando (4.8) obtemos

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \\ &= -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Os coeficientes da última equação comparados com os da equação (4.12) fornecem

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4.14)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (4.16)$$

As equações (4.14) e (4.15) são as equações de movimento de Hamilton em sua forma canônica, denominadas de *equações canônicas de movimento*. Em alguns casos estas equações são de solução mais simples que as de Euler-Lagrange, desde que são equações de primeiro grau. Com certeza ficam extremamente fáceis quando existem coordenadas ignoráveis na função Hamiltoniana, desde que então a coordenada conjugada é uma constante de movimento. Neste caso existe o método de Hamilton-Jacobi, no qual o problema se reduz a obter um sistema de coordenadas conveniente que forneça um Hamiltoniano com uma grande quantidade de coordenadas ignoráveis. A grande dificuldade deste método é a equação de Hamilton-Jacobi que em geral é de difícil solução, desde que é não linear.

4.4 Hamiltonizações alternativas

4.4.1 A definição de Hamiltonização

Um procedimento geral de *Hamiltonização* para sistemas mecânicos descritos por uma função Lagrangiana é desenvolvido neste capítulo.

Uma tradição centenária prescreve o uso de transformações de Legendre para a passagem da descrição Lagrangiana para a Hamiltoniana. Provamos nessa seção que esta prescrição não é um postulado a priori, mas aparece como uma *consequência* para sistemas não singulares e se mostra inadequada para os singulares.

Definimos *Hamiltonização*, para sistemas mecânicos com N graus de liberdade descritos por uma função Lagrangiana, como o procedimento dado pelos seguintes passos:

i. Existe uma função chamada de Lagrangiano do sistema $L(q, \dot{q}, t)$ que o descreve através das equações de Euler-Lagrange (§4.1.2), i.e.,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (4.17)$$

ii. É possível definir um novo conjunto de variáveis independentes p_i (denominadas de momenta do sistema) e uma variável dependente $H(p, q, t)$ chamada de Hamiltoniano do sistema, tal que existe a seguinte relação entre as novas variáveis e as anteriores

$$H(p, q, t) \equiv p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t). \quad (4.18)$$

iii. O movimento do sistema mecânico pode ser descrito pelas equações (4.8), ou de forma alternativa, pelo conjunto de equações canônicas de movimento, conhecidas como equações de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad (4.19)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4.20)$$

A equivalência entre as descrições Lagrangiana (i) e Hamiltoniana, definida pelos passos (ii) e (iii), é obtida sempre que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial H/\partial p_i)} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (4.21)$$

onde o Lagrangiano é considerado como função de q_k , $\partial H/\partial p_k$ e t . Na verdade, estas condições de equivalência são obtidas das equações de Euler-Lagrange - (4.8) - nas quais utilizamos o primeiro conjunto de equações de Hamilton (4.14).

4.5 Procedimento de Hamiltonização alternativa

O procedimento de Hamiltonização consiste na substituição do primeiro conjunto de equações de Hamilton - (4.14), na definição da função Hamiltoniana - (4.11) resultando em

$$H = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - L \left(q, \frac{\partial H}{\partial p}, t \right), \quad (4.22)$$

que passa a ser a equação diferencial parcial que define a função Hamiltoniana, que vamos definir como *EDP Hamiltoniana*. Portanto qualquer função H que satisfaça esta equação pode ser definida como o Hamiltoniano do sistema mecânico, sendo que esta descrição será canônica.

Esta equação diferencial parcial possui uma solução generalizada linear nos momentos dada por

$$H = p_i A_i - L(q, A, t), \quad (4.23)$$

onde os A_i 's são funções arbitrárias de q_k e t .

Por outro lado, se o Lagrangiano não é singular, então a equação (4.22) possui também uma solução envoltória (singular), que é obtida através das seguintes condições:

$$\frac{\partial H}{\partial A_i} = 0. \quad (4.24)$$

Estas condições de envoltória determinam as funções arbitrárias A_i .

Portanto, podemos concluir que se L é uma função Lagrangiana não singular (regular) teremos duas maneiras alternativas de hamiltonizar o sistema mecânico:

- (a) o Hamiltoniano é uma solução particular obtida de (4.23);
- (b) o Hamiltoniano é a solução envoltória de (4.22).

Se optarmos pela alternativa (a) para hamiltonizar o sistema, então as funções arbitrárias A_i serão determinadas a partir do primeiro conjunto de equações de Hamilton (4.14) e pelas relações de equivalência entre as descrições Hamiltoniana e Lagrangiana (4.21).

Caso a escolha recaia sobre a alternativa (b) as funções A_i serão obtidas através das condições de envoltória - (4.24).

4.6 A definição do momentum

É importante ressaltar que, em todo o procedimento desenvolvido até agora, não foi utilizada a definição usual dos momenta ($p = \partial L / \partial \dot{q}$). Efetivamente os momenta passam a ser definidos pelo segundo conjunto de equações de movimento de Hamilton - (4.15).

Se escolhermos a alternativa (a) para hamiltonizar o sistema os momenta obtidos a partir das equações (4.15) diferem daqueles obtidos a partir da definição usual, desde que de (4.23)

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} = \\ &= - p_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial A_j} \frac{\partial A_j}{\partial q_i} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_i} - \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial A_j} \right) \frac{\partial A_j}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

utilizando as equações de Euler-Lagrange - (4.8)

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= - \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial A_j} \right) \frac{\partial A_j}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \neq \\ &\neq \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right). \end{aligned}$$

Enquanto que, se a escolha for a alternativa (b) para a Hamiltonização do sistema, então podemos demonstrar que as equações (4.15) conduzem as definições usuais dos momenta.

A partir de (4.24) e (4.23) temos

$$\frac{\partial H}{\partial A_i} = p_i - \frac{\partial L}{\partial A_i} = 0. \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.25) e utilizando as equações de Euler-Lagrange - (4.8), obtemos

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (4.27)$$

as quais reproduzem as definições usuais dos momenta.

De maneira alternativa, de (4.14) e (4.23) temos

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = A_i. \quad (4.28)$$

De (4.26) observamos que as condições de envoltória (4.24) conduzem novamente a definição usual dos momenta

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (4.29)$$

logo, a Hamiltonização usual (§4.2.1 e §4.2.2).

Para esta alternativa as condições de equivalência - hamiltonizar - são identidades.

(Demonstre!)

4.7 A solução envoltória e o Hamiltoniano usual

Das seções antecedentes, podemos concluir que a escolha da solução envoltória da equação diferencial parcial que define o Hamiltoniano - (4.22), implica na definição usual dos momenta. Portanto tanto a *obtenção do Hamiltoniano usual*, assim como todo o procedimento utilizado usualmente resultam como *consequência da escolha da solução envoltória da equação diferencial parcial (4.22) para hamiltonizar o sistema*.

Se, por outro lado, o Lagrangiano for singular [19], i.e., linear nos momenta, a alternativa (b) não é mais permitida, pois a equação diferencial parcial (4.22) é uma equação linear em p , e portanto, não possui solução envoltória.

A conclusão é que este procedimento de Hamiltonização contém o usual sempre que este existe e define uma nova Hamiltonização em qualquer caso, inclusive naqueles em que o procedimento usual não nos fornece quaisquer resultados.

Portanto, este procedimento é uma generalização e pode ser aplicado a todo sistema mecânico descrito por um Lagrangiano, seja este singular ou não.

4.8 Exemplo

Para ilustrar o formalismo desenvolvido acima, vamos considerar o seguinte Lagrangiano

$$L(q, \dot{q}, t) = a\dot{q}^2 + b q^2,$$

a e b constantes. Este sistema mecânico possui a seguinte equação de movimento

$$a\ddot{q} - b q = 0.$$

O Hamiltoniano é definido pela seguinte equação diferencial parcial - (4.22) -

$$H = p \frac{\partial H}{\partial p} - a \left[\frac{\partial H}{\partial p} \right]^2 - b q^2,$$

cuja solução é

$$H = p A - a A^2 - b q^2. \quad (4.30)$$

As equações de movimento de Hamilton - (4.14) e (4.15) - correspondentes são:

$$\dot{q} = \partial H / \partial p = A;$$

$$\dot{p} = - \partial H / \partial q = - p \partial A / \partial q + 2a \partial A / \partial q + b q.$$

Se optarmos pela alternativa (a) para hamiltonizar o sistema, então da relação de equivalência entre as descrições Hamiltoniana e Lagrangiana - (4.21)- temos

$$d(2a A)/dt - 2b q = 0,$$

cuja solução é

$$A = \pm \sqrt{C + b q^2/a},$$

onde C uma constante arbitrária.

Portanto a função Hamiltoniana de (4.30) fica igual a

$$H = \left(\pm \sqrt{C + b q^2/a} \right) p - 2b q^2 - a C.$$

A primeira equação de Hamilton fica

$$\dot{q} = \pm \sqrt{C + b q^2/a}$$

O momentum p é definido por

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \mp \frac{b q p}{a \sqrt{C + b q^2/a}} + 4b q = p' \dot{q} = \\ &= p' \left(\pm \sqrt{C + b q^2/a} \right), \end{aligned}$$

onde $p' = dp/dq$, cuja solução é

$$p = \pm \frac{2b q^2 + D}{\sqrt{C + b q^2/a}},$$

D uma constante arbitrária. Este momentum difere de $\partial L/\partial \dot{q} = 2a \dot{q} = 2a A$, desde que não estamos considerando a solução envoltória.

Se, por outro lado, a escolha recair sobre a alternativa (b), então da condição de envoltória (4.24)

$$\partial H/\partial A = 0 \quad \Longrightarrow \quad p - 2a A = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = p/2a.$$

Substituindo o valor de A em (4.30) temos a função Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{4a} - b q^2,$$

que é o Hamiltoniano usual.

O movimento do sistema é descrito pelas equações de Hamilton

$$\dot{q} = \frac{p}{2a} \quad \dot{p} = 2b q.$$

Neste caso da condição de envoltória temos $p = 2a A = 2a \dot{q}$, que é o mesmo momentum obtido da definição usual $p = \partial L/\partial \dot{q}$.

4.9 Aplicações e extensões de Hamiltonizações alternativas

4.9.1 Mecânica singular ou de Dirac e outras aplicações

Para os sistemas mecânicos singulares a técnica usual (definindo $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$) é imprópria, pois não permite a obtenção dos \dot{q}_i 's em função dos p_i 's, q_i 's e de t . Isto ocorre desde que o determinante do Jacobiano da transformação das coordenadas do espaço de configuração (q, \dot{q}, t) para aquelas do espaço de fase (q, p, t) se anula, i.e., não é possível determinar a partir do sistema de equações $p_i = F_i(q, \dot{q}, t)$ os \dot{q}_i 's em função de q , p e t . Este Jacobiano nada mais é do que a própria matriz Hessiana, pois

$$J = \left(\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_i} \right) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right).$$

Os sistemas mecânicos podem então ser classificados de acordo com o número K de equações que resultam das condições de envoltória (4.24), em:

- i. Sistemas não singulares ou regulares, se $K = N$;
- ii. Sistemas puramente singulares, se $K = 0$;
- iii. Sistemas parcialmente singulares ou mistos, se $0 < K < N$.

Portanto para sistemas do tipo (i) e (iii) teremos duas Hamiltonizações alternativas.

4.9.2 Mecânica puramente singular

A mecânica puramente singular é definida como aquela cuja descrição Lagrangiana é tal que não só a matriz Hessiana ($J = 0$) é nula, mas seus elementos também. Portanto o Lagrangiano que descreve este sistema é linear em todos os \dot{q}_i 's.

A forma mais geral do Lagrangiano para os sistemas puramente singulares com N graus de liberdade é

$$L(q, \dot{q}, t) = a_i(q, t) \dot{q}_i - V(q, t). \quad (4.31)$$

As equações de movimento de Euler-Lagrange para este sistema são

$$\dot{a}_i = \frac{\partial a_j}{\partial q_i} \dot{q}_j - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (4.32)$$

O Hamiltoniano que descreve este sistema é definido pela seguinte equação diferencial parcial, obtida de (4.22),

$$H = (p_i - a_i) \frac{\partial H}{\partial p_i} + V. \quad (4.33)$$

Como a equação diferencial parcial é linear, sua solução geral é

$$H(q, p, t) = G_i(q, t) (p_i - a_i) + V(q, t), \quad (4.34)$$

onde os G_i 's são funções arbitrárias de q e t .

Neste caso a equação diferencial parcial que define o Hamiltoniano é linear, logo não existe solução envoltória, implicando a existência de uma única forma de Hamiltonização (alternativa (a) da seção 4.5).

As equações de Hamilton (equações canônicas de movimento) - (4.14) e (4.15) - correspondentes são:

$$\dot{q}_i = G_i; \quad (4.35)$$

$$\dot{p}_i = -(p_j - a_j) \frac{\partial G_j}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + G_j \frac{\partial a_j}{\partial q_i}. \quad (4.36)$$

A equivalência entre as descrições Hamiltoniana e Lagrangiana deve ser imposta, o que é possível devido ao caráter arbitrário das funções G_i . A partir das condições de equivalência (4.21) temos

$$\dot{a}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial a_j}{\partial q_i} G_j. \quad (4.37)$$

Estas equações constituem um sistema algébrico (de fácil solução) para as funções G_j .

Os momenta p_i (até agora indefinidos) são determinados resolvendo o sistema de equações diferenciais parciais que resultam do segundo conjunto de equações de Hamilton (4.36). Este sistema pode ser reescrito, utilizando as equações (4.37), como

$$\dot{p}_i - \dot{a}_i = -\frac{\partial G_j}{\partial q_i} (p_j - a_j). \quad (4.38)$$

Das soluções deste sistema devem ser excluídas aquelas que resultam em $p_i = a_i$.

Esta dificuldade de hamiltonizar os sistemas singulares da maneira usual é bastante conhecida, desde que neste caso é impossível determinar os \dot{q}_i 's a partir das definições usuais dos momenta ($p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$). (Justifique!)

Este problema resultou na teoria de Dirac [19] para estes sistemas.

4.9.3 Exemplo

Como exemplo da aplicação do procedimento de Hamiltonização para sistemas singulares vamos considerar o seguinte Lagrangiano

$$L = q_2 \dot{q}_1 - 2q_1 \dot{q}_2 + q_1 q_2.$$

A equação diferencial parcial que define o Hamiltoniano - (4.33) - é

$$H = (p_1 - q_2) \frac{\partial H}{\partial p_1} + (p_2 + 2q_1) \frac{\partial H}{\partial p_2} - q_1 q_2,$$

com o sistema auxiliar

$$\frac{dp_1}{p_1 - q_2} = \frac{dp_2}{p_2 + 2q_1} = \frac{dq_1}{0} = \frac{dq_2}{0} = \frac{dH}{H + q_1 q_2},$$

cujas integrais subsidiárias são:

$$q_1 = C_1;$$

$$q_2 = C_2;$$

$$H + q_1 q_2 = C_3(p_1 - q_2);$$

$$H + q_1 q_2 = C_4(p_2 + 2q_1).$$

Portanto a solução geral da equação diferencial parcial é

$$H(q, p, t) = G_1(q_1, q_2) (p_1 - q_2) + G_2(q_1, q_2) (p_2 + 2q_1) - q_1 q_2,$$

onde G_i são funções arbitrárias de q_1 e q_2 .

O primeiro conjunto de equações Hamilton - (4.35), se reduz a

$$\dot{q}_i = G_i, \quad (i = 1, 2).$$

As condições de equivalência entre as descrições Hamiltoniana e Lagrangiana de (4.21) resultam no seguinte sistema:

$$\dot{q}_2 = q_2 - 2G_2 = G_2;$$

$$-2\dot{q}_1 = q_1 + G_1 = -2G_1.$$

Este sistema é algébrico e possui as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} G_1 &= -\frac{q_1}{3} \\ G_2 &= \frac{q_2}{3}, \end{aligned}$$

Portanto o Hamiltoniano será

$$H = \frac{1}{3}(q_2 p_2 - q_1 p_1). \quad (4.39)$$

Os momenta são determinados a partir do sistema de equações diferenciais parciais obtidos de (4.8)

$$\begin{aligned} p_1 &= q_2 f_1(q_1 q_2); \\ p_2 &= q_1 f_2(q_1 q_2), \end{aligned}$$

com f_1 e f_2 funções arbitrárias do produto $q_1 q_2$. Sendo que devemos ter $f_1 \neq 1$ e $f_2 \neq -2$, pois estes valores levam a inconsistência da descrição.

4.9.4 Sistemas parcialmente singulares

Os sistemas parcialmente singulares (caso misto) tem o determinante da matriz Hessiana nulo, mas os seus elementos não são todos nulos. Vamos considerar o Lagrangiano que é linear em alguns \dot{q}_i 's.

Considerando um Lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$, que descreve um sistema mecânico com N graus de liberdade, a equação (4.23) fornece o Hamiltoniano H (solução da equação diferencial parcial (4.22)), ou seja

$$H = A_i p_i - L(q, A, t). \quad (4.40)$$

Para sistemas mecânicos parcialmente singulares (ou mistos) algumas das funções $A_m = A_m(q, p, t)$ ($m = 1, \dots, K$; $K < N$), podem ser determinadas a partir das condições de envoltória - (4.24). A determinação dos A_i 's destas condições implicam na definição usual dos momenta $p_m = \partial L / \partial \dot{q}_m$ (§ 4.3), i.e., teremos um

número K de momenta definidos da forma usual. A partir de (4.24) K funções A_m são fixadas em termos dos q_i 's e p_i 's. Se estes K valores forem substituídos em (4.23) teremos um Hamiltoniano que só dependerá dos q_i 's, p_m 's e A_n 's, onde $n = K + 1, \dots, N$.

Os passos seguintes, neste caso, coincidem com o procedimento de Hamiltonização dos sistemas puramente singulares (§ 4.9.2), já que os A_n 's ($n = K + 1, \dots, N$) não podem ser determinados a partir das condições de envoltória, desde que a equação diferencial parcial que define o Hamiltoniano é linear nos \dot{q}_n 's correspondentes.

Portanto, sistemas parcialmente singulares possuem duas formas alternativas de Hamiltonização, logo duas função Hamiltoniana alternativas.

4.9.5 Conclusão

Portanto, podemos concluir que o procedimento de Hamiltonização desenvolvido para sistemas pura ou parcialmente singulares fornece Hamiltonianos idênticos àqueles obtidos na teoria de Dirac. No entanto, o Hamiltoniano obtido no nosso procedimento de Hamiltonização não possui vínculos. Isto ocorre já que demonstramos que a definição usual dos momenta $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$, só pode ser utilizada nos sistemas não singulares ou para os momenta associados aquelas coordenadas em relação as quais o Lagrangiano não é singular.

O procedimento de Hamiltonização que desenvolvemos é uma generalização dos formalismos conhecidos, pois engloba num único formalismo sistemas singulares ou não, e contém os formalismos conhecidos: o usual sempre que existe e o de Dirac no caso de sistemas singulares (no entanto, sem os vínculos).

A possibilidade de aplicação deste procedimento de Hamiltonização aos sistemas singulares se deve ao fato de que não impomos, a priori, a definição usual dos momenta.

É interessante evidenciar que a nossa abordagem no caso singular é muito mais simples, desde que não necessita, como a teoria de Dirac, de novas definições, como por exemplo: igualdades fracas e fortes; superespaço de fase, ou de um novo procedimento variacional envolvendo p 's, q 's e \dot{q} 's.

4.10 Linearização da equação de Hamilton-Jacobi

4.10.1 Introdução

O procedimento de Hamiltonização desenvolvido na seção 4.5 nos fornece dois Hamiltonianos alternativos, um dos quais é bilinear nos momenta (Hamiltoniano usual), enquanto que o outro é linear nos p 's, sendo que ambos descrevem o mesmo sistema mecânico. Este resultado nos conduz à linearização da equação de Hamilton-Jacobi.

O método aplicado para escrever a equação de Hamilton-Jacobi pode ser resumido da maneira que se segue. Dado um Lagrangiano

$$L(q, \dot{q}, t) = a_{ij}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q, t),$$

se L não é singular (i.e., $\det(\partial^2 L / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j) = \det(a_{ij}) \neq 0$), então o Hamiltoniano correspondente é

$$H(q, p, t) = \frac{1}{4} b_{ij}(q, t) p_i p_j + V(q, t), \quad (4.41)$$

onde $b_{ij} a_{jm} = \delta_{im}$. Este Hamiltoniano foi obtido utilizando a definição usual dos momenta ($p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i = 2a_{ij} \dot{q}_j$), pois a matriz hessiana não é nula, permitindo a determinação dos \dot{q} 's em termos dos p 's.

Para construir a equação de Hamilton-Jacobi fazemos a seguinte mudança de variáveis em (4.41):

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}; \\ H &= -\frac{\partial S}{\partial t}, \end{aligned}$$

onde S é a *função principal de Hamilton*, o que resulta na seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{1}{4} b_{ij} \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial S}{\partial q_j} + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (4.42)$$

sendo que esta é a *equação de Hamilton-Jacobi*.

Sendo a equação (4.42) uma equação diferencial parcial não linear a sua solução apresenta, em geral, dificuldades intrinsecas.

Por outro lado, a solução da equação de Hamilton-Jacobi tem aplicações múltiplas, por exemplo como: conceito fundamental na mecânica clássica (função principal de Hamilton) [20]; ferramenta prática para obter soluções de outras equações diferenciais parciais [21]; base para a mecânica quântica [22]; aproximação de ordem zero no método WKB [23] etc.

O procedimento de Hamiltonização desenvolvido no capítulo anterior fornece um Hamiltoniano alternativo no caso de sistemas não singulares, que é linear nos momenta (correspondente ao mesmo sistema mecânico), resultando na linearização da equação de Hamilton-Jacobi. Esta equação tem todas as vantagens da linearidade, inclusive a possibilidade de se obter a sua solução geral, a qual é com certeza mais importante que qualquer solução completa quando se trata da formulação quântica de qualquer teoria [24].

Existe uma abordagem alternativa deste método de linearização, como uma técnica *ad-hoc* [9], onde utilizamos as transformações canônicas, que pode ser justificada pelo procedimento de Hamiltonização.

4.10.2 Linearização alternativa da equação de Hamilton-Jacobi

Como consequência do procedimento de Hamiltonização, desenvolvido na seção 4.5, obtivemos que o mesmo sistema mecânico pode ser descrito por dois Hamiltonianos diferentes, o usual que fornece equação de Hamilton-Jacobi usual, dado pela equação (4.42), e o Hamiltoniano alternativo, descrito no ítem (a), desde que este sistema não seja puramente singular [7, 8].

A alternativa (a) fornece o seguinte Hamiltoniano alternativo

$$\bar{H} = p_i A_i - a_{ij} A_i A_j + V,$$

onde os A_i 's são definidos pelas equações (4.14) como

$$2(d/dt)(a_{jk} A_j) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} A_i A_j - \frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

A equação de Hamilton-Jacobi correspondente a este Hamiltoniano é dada por

$$A_i \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_i} + a_{ij} A_i A_j + V + \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = 0. \quad (4.43)$$

que é uma equação diferencial parcial linear.

Logo, por causa da possibilidade de descrever o mesmo sistema através do Hamiltoniano alternativo, temos aqui uma maneira de contornar um problema de difícil manipulação, passando agora a resolver uma equação diferencial parcial com todas as vantagens da linearidade.

4.11 Extensões e a Hamiltonização direta

4.11.1 Hamiltonização para teorias de campo

O procedimento de Hamiltonização para sistemas mecânicos tem como uma das possíveis generalizações a Hamiltonização de teorias de campo [25].

O formalismo Hamiltoniano para campos é bem estabelecido para aquelas teorias cuja densidade Lagrangiana não é linear em ϕ_t (derivada temporal da variável campo), e possui diferentes abordagens no caso linear [24, 26].

No procedimento de Hamiltonização desenvolvido a densidade Hamiltoniana é definida pela equação diferencial parcial construída a partir da definição usual e o primeiro conjunto de equações de Hamilton [25].

As teorias de campo, descritas por densidades Lagrangianas não lineares em ϕ_t , apresentam duas Hamiltonizações alternativas dependendo de uma escolha entre a solução linear nas densidades de momenta e a solução *envoltória* da equação diferencial parcial que define a densidade Hamiltoniana. Se a escolha recair sobre

a solução envoltória o formalismo Hamiltoniano usual é reproduzido, i.e., obtemos a densidade Hamiltoniana e a densidade de momentum usuais.

Se, por outro lado, a densidade Lagrangiana for linear em ϕ_t , então a equação diferencial parcial que define a densidade Hamiltoniana é linear e, portanto não admite envoltória, i.e., não admite a Hamiltonização usual.

Neste formalismo não assumimos, a priori, a definição usual da densidade de momentum ($\pi = \delta L / \delta \phi_t$), mas demonstramos que esta definição é uma consequência da condição de envoltória da solução.

Portanto, a definição usual da densidade de momentum será válida somente quando pudermos optar pela descrição Hamiltoniana usual, nos demais casos a densidade de momentum passa a ser definida a partir das equações de campo como: $\pi_t = -\delta H / \delta \phi$.

O procedimento de Hamiltonização desenvolvido é uma generalização do usual, desde que unifica os formalismos para teorias de campo descritas por densidades Lagrangianas lineares em ϕ_t (singulares) e as não lineares e, por outro lado, contém o procedimento usual sempre que este existe.

Portanto, este procedimento resolve o problema de Hamiltonização de campos singulares, como por exemplo: o de Schrödinger, o de KdV, o de campos auto-duais, o da eletrodinâmica clássica, etc...

Existe uma série de aplicações possíveis para este procedimento de Hamiltonização: strings; campo de partículas de spin 1/2 (campo de Dirac); campo gravitacional (no contexto da relatividade geral); etc...

4.11.2 Hamiltonização direta

Os sistemas mecânicos são geralmente descritos por uma função Lagrangiana L e o procedimento de Hamiltonização é, então, desenvolvido com o auxílio das transformações de Legendre. A passagem do espaço de configuração para o de fase é efetuado definindo-se novas variáveis, chamadas de momenta, como $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$.

No capítulo 3 desenvolvemos um procedimento de Hamiltonização que unifica o formalismo para todos os sistemas, singulares ou não, desde que sejam descritos por uma função Lagrangiana conhecida.

No entanto, muitos sistemas mecânicos não possuem uma descrição Lagrangiana e existem alguns métodos para determinar a função Hamiltoniana diretamente, como aquele desenvolvido por Santilli[27].

No procedimento de Hamiltonização desenvolvido na seção 3, concluímos que o primeiro conjunto de equações canônicas de movimento (equações de Hamilton) reproduz as equações de Euler-Lagrange, enquanto que o segundo define as variáveis momenta. Esta subdivisão nos induz a um novo procedimento de Hamiltonização que denominaremos de Hamiltonização Direta [28, 29].

Este procedimento será aplicado a sistemas descritos pelas equações de movimento, sem a necessidade do conhecimento de uma função Lagrangiana.

Um procedimento de Hamiltonização muito semelhante ao de Hamiltonização direta é o de Hamiltonização de sistemas mecânicos não-holonômicos [30]. Neste caso também não existe uma descrição Lagrangiana, é utilizado um Lagrangiano auxiliar, e o Hamiltoniano é determinado com o auxílio das equações de movimento e das equações de vínculos.

O procedimento de Hamiltonização usual, que supõe o conhecimento de uma função Lagrangiana, é recomposto quando demonstramos que ao Hamiltoniano ob-

tido pode-se adicionar uma função arbitrária $f(q, \dot{q}, t)$ sem alterar o procedimento de Hamiltonização (desde que esta adição só muda a definição dos momenta). Se esta função for o negativo da função Lagrangiana, então o procedimento de Hamiltonização é o usual.

Como esta Hamiltonização independe do número de equações de movimento que descrevem o sistema, então pode ser aplicado a sistemas que possuem um número ímpar de equações. Um dos exemplos deste caso é a Mecânica de Nambu, que possui um número ímpar de equações de movimento de primeira ordem [31, 32]. Utilizando o procedimento de Hamiltonização direta podemos demonstrar que a Mecânica de Nambu é uma mecânica usual (singular) [33].

Vamos considerar um sistema mecânico com N graus de liberdade, descrito pelas suas equações de movimento.

$$\Phi_i(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) = 0 \quad (4.44)$$

onde $q = q^1, q^2, \dots, q^N$, $\dot{q} = dq/dt$ e $\ddot{q} = d^2q/dt^2$.

Independentemente do fato deste sistema de equações ser de primeira ou segunda ordem, pode-se definir uma nova variável dependente $H = H(q, p, t)$, chamada Hamiltoniano do sistema como

$$H(q, p, t) = A^i(q, t) p_i, \quad (4.45)$$

onde $p = p_1, p_2, \dots, p_N$, sendo que os p_i 's são as novas variáveis independentes, as quais denominaremos de momenta, e os A_i 's são funções apropriadas das variáveis q^i e do tempo t .

Aplicando o procedimento variacional à função Hamiltoniana obtemos

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k. \quad (4.46)$$

Como a função Hamiltoniana deve fornecer uma descrição canônica do sistema, então de (4.45)

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = A^k, \quad (4.47)$$

e

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta(A^k p_k) = \delta(\dot{q}^k p_k) = \delta \dot{q}^k p_k + \dot{q}^k \delta p_k \\ &= \frac{d}{dt} (p_k \delta q^k) - \dot{p}_k \delta q^k + \dot{q}^k \delta p_k \end{aligned} \quad (4.48)$$

Comparando as equações (4.46) e (4.48) e usando o princípio de Hamilton para desprezar o termo $d(p_k \delta q^k)/dt$ (pois este é um termo de superfície e não contribui para a integral), resulta

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad (4.49)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (4.50)$$

desde que q^i e p_i devem ser variáveis independentes. Estas equações fornecem uma descrição canônica do sistema mecânico como é desejável.

É importante observar que as equações (4.47) e (4.49) são idênticas.

Por outro lado, o sistema de equações dado por (4.50) é um sistema de equações diferenciais parciais que definem as variáveis momenta (até agora indefinidas).

Para completar a descrição Hamiltoniana do sistema as funções A^i devem ser determinadas.

Das equações (4.44) e (4.47) obtemos:

$$\Phi_i(\dot{A}, A, q, t) = 0, \quad (4.51)$$

onde $A = A^1, \dots, A^N$.

Este é um sistema de equações diferenciais parciais que representa a equivalência entre as duas descrições do sistema através: das equações de movimento ou do Hamiltoniano.

Se for possível reescrever o sistema de equações de movimento - (4.44) - na forma cinemática no espaço de configuração [27] como:

$$\ddot{q}^i = \Psi_i(\dot{q}, q, t), \quad (4.52)$$

então as equações (4.51) serão um sistema quasi-linear de equação diferenciais parciais, o qual geralmente é fácil de resolver [3].

Desde que neste procedimento de Hamiltonização não existem restrições sobre o número e o tipo equações de movimento, podendo inclusive incluir equações de vínculos, podemos concluir que sempre existe uma descrição Hamiltoniana, e que este procedimento é independente da existência de um formalismo Lagrangiano.

4.12 Conclusão geral

O procedimento de Hamiltonização desenvolvido tanto na mecânica de partículas, como em teoria de campo é uma generalização das existentes, já que engloba numa única formulação os casos singulares ou não. Ou seja, a teoria clássica de Hamiltonização para o caso não singular e a de Dirac para o singular estão incluídas neste procedimento.

Nos casos não singulares ou parcialmente singulares demonstramos a existência de duas formas alternativas de Hamiltonizar. Uma das alternativas, no caso não singular, conduz à definição usual dos momenta e portanto ao Hamiltoniano clássico.

A outra resulta em um Hamiltoniano linear nos momenta, e a definição destes agora difere da usual. No entanto, ambas são descrições canônicas do sistema.

Demonstramos também que no caso de sistemas mecânicos pura ou parcialmente singulares obtemos os mesmos Hamiltonianos que os da teoria de Dirac. No entanto, é importante ressaltar que o procedimento de Hamiltonização desenvolvido é muito mais simples e direto, pois:

- i) o Hamiltoniano resultante não possui vínculos adicionais, o que facilita a posterior quantização, evitando o cálculo de todos os vínculos (que, em geral, é bastante trabalhoso), a classificação e análise destes;
- ii) não são necessárias novas definições como a das igualdades fortes e fracas, nem redefinições do espaço de fase;
- iii) não necessita de novos procedimento variacionais.

Neste procedimento de Hamiltonização a definição do momentum não é assumida a priori, mas surge como consequência do formalismo. Provamos que a definição usual dos momenta está associada a escolha da solução envoltória da equação diferencial parcial que define o Hamiltoniano, desde que esta exista.

Demonstrando portanto, qual é o problema nos fundamentos da mecânica analítica que provoca a série de problemas na descrição Hamiltoniana usual. O procedimento de Hamiltonização é então completamente desenvolvido demonstrando que é possível Hamiltonizar qualquer sistema mecânico ou contínuo.

A estrutura canônica é sempre preservada seja no caso singular ou não .

Existe uma série de possibilidades de desenvolvimentos das possíveis aplicações deste procedimento:

- i) a linearização da equação de Hamilton-Jacobi (que foi desenvolvida no § 4.2) tanto para a mecânica generalizada como para a teoria de campo;
- ii) a análise dos resultados obtidos na quantização através dos dois Hamiltonianos alternativos;
- iii) a análise do procedimento de quantização no caso singular;
- iv) a interpretação da função arbitrária que aparece no momentum como um gauge da teoria e a sua associação a possíveis simetrias.
- v) a Hamiltonização no caso de sistemas descritos por Lagrangianos de ordem superior.

Em teoria de campo, principalmente aquelas singulares, existe uma série de possíveis aplicações deste procedimento de Hamiltonização: strings; a casos singulares que não são descritos por Lagrangianos (ou densidades Lagrangianas) lineares, como por exemplo, a partícula relativística, campo de partículas de spin 1/2 (campo de Dirac), campo gravitacional (no contexto da relatividade geral), campos auto-duais (envolvendo mais do que um campo), as simetrias associadas aos gauges na eletrodinâmica, etc...

O procedimento de Hamiltonização direta sendo uma generalização do procedimento de Hamiltonização alternativas o inclui como caso particular. Por outro lado, como na Hamiltonização direta não existem restrições sobre o número de equações de movimento, podemos concluir que sempre existe uma descrição Hamiltoniana, independente da existência de um formalismo Lagrangiano.

Este procedimento de Hamiltonização direta pode ser facilmente generalizado para a teoria de campo. Como não existe no procedimento de Hamiltonização

direta nenhuma restrição quanto ao número de equações que descrevem o sistema este pode ser aplicado para sistemas não Lagrangianos, não holonômicos [30, 12], de Nambu ou para sistemas dinâmicos.

No caso da Mecânica de Nambu é demonstrado usando o procedimento de Hamiltonização direta que esta é uma mecânica usual (singular) e não uma generalização desta[33].

Uma das aplicações de muito interesse na atualidade é a Hamiltonização direta de sistemas dinâmicos desde que são descritos por um conjunto de equação de primeira ordem, e raramente possuem descrições lagrangianas. Possibilitando neste caso a Hamiltonização do sistema e a conseqüente quantização de sistemas dinâmicos.

Existe uma grande diversidade de extensões. Entre as extensões temos o desenvolvimento do procedimento de Hamiltonização direta para as teorias de campo, possibilitando a conseqüente Hamiltonização da gravitação. Outra é a comparação entre as quantizações obtidas a partir dos diferentes Hamiltonianos obtidos no procedimento de Hamiltonização.

Finalmente, podemos concluir que como não existem restrições para a aplicação deste procedimento de Hamiltonização, o procedimento de Hamiltonização forma uma base sólida da mecânica analítica tanto para um sistema de partículas como para o caso contínuo.

Bibliografia

- [1] SNEDDON, I. *Elements of Partial Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1957.
- [2] FORSYTH, A. R. *A Treatise on Differential Equations*. London: McMillan, 1903.
- [3] COURANT, R.; HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics*. New York: Interscience, 1962.
- [4] ESPINDOLA, M. L. Método de Solução das EDPS : $F(u_x, u_y) = 0$; $F(f(x)u_x, u_y) = 0$; $F(u_x, h(y)u_y) = 0$. In: II Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações, João Pessoa: Caderno de Resumos II ENAMA, 2008. p. 84-86.
- [5] ESPINDOLA, M. L. Envelope solutions for PDEs depending on two disjoint sets of variables. In: The Sugarcane Symposium - Symposium in Real Analysis XXXVII, USP/São Carlos: Book Of Abstract XXXVII Symposium in Real Analysis, 2013. <http://sugarcane.icmc.usp.br/book.pdf>
Soluções envoltórias para EDPs com dois conjuntos disjuntos de variáveis. In: VI Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações, Aracajú: Caderno de Resumos VI ENAMA, 2012. p.114 - 115.
Apresentado no I Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sul, Curitiba: SBMAC - I CNMAC Sul, 2014.
- [6] ESPINDOLA, M. L. Solução Geral da Equação de Hamilton-Jacobi Unidimensional. In: III Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações, João Pessoa: Caderno de Resumos III ENAMA, 2009. p. 64-66.
In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, XXXIII, 2010. São Carlos: SBMAC, Anais do XXXIII CNMAC, 2010, v. 3, p. 151-156, ISSN 1984820X.
- [7] ESPINDOLA, M. L.; ESPINDOLA, O.; TEIXEIRA, N. L. Hamiltonization as a Two Fold Procedure. *Hadronic J.*, v. 9, 121-125, 1986.
- [8] ESPINDOLA, M. L.; ESPINDOLA, O.; TEIXEIRA, N. L. Hamiltonization for Singular and Non Singular Mechanics. *J. Math. Phys.* v. 28, 807-810, 1986.
- [9] ESPINDOLA, M. L.; ESPINDOLA, O.; TEIXEIRA, N. L. Linearization of the Hamilton-Jacobi Equation. *J. Math. Phys.* v. 27, 1754-1757, 1986.
- [10] IÓRIO, V. *Equação Diferencial Parcial - Um Curso de Graduação*. Rio de Janeiro: IMPA, Segunda edição, 2007.

- [11] ESPINDOLA, M. L. Solução Generalizada da EDP p-Laplace: $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$. In: Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - CMAC Nordeste, 2012, Natal. Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional. São Carlos: SBMAC, 2012. v. 1. p. 71-74.
In: IV Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações, Belém: Caderno de Resumos IV ENAMA, 2010. p. 92-93.
Apresentado no I Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sul, Curitiba: SBMAC - I CNMAC Sul, 2014.
- [12] SALETAN, E. J.; CROMER, A. H. *Theoretical Mechanics*. New York: Wiley, 1971.
- [13] ARONSSON, G. On the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$. *Arkiv för Matematik*, v. 7, pp. 395-425, 1968.
- [14] ARONSSON, G. On certain singular solutions of the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$. *Manuscripta Mathematica*, v.47, Numbers 1-3, p. 395-425, 1984.
- [15] ARONSSON, G.; PERES, Y.; SCHRAMM, O.; SHEFFIELD, S.; WILSON, D. B. Tug-of-war and the infinity Laplacian. *J. Amer. Math. Soc.*, v. 22, p. 167-210, 2009.
- [16] ESPINDOLA, M. L. General Solution to Unidimensional Hamilton-Jacobi Equation, *arXiv:1302.0591*, 2013.
- [17] LEECH, J. W. *Mecânica Analítica*. Rio de Janeiro: Ed. USP, 1971.
- [18] GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. New York: Addison Wesley, 1971.
- [19] DIRAC, P. A. M. Generalized Hamiltonian dynamics. *Can. J. of Math.*, v. 2, p. 129-148, 1950;
ibid. *Lectures on Quantum Mechanics*. New York: Yeshiva University, 1964.
- [20] ARNOLD, V. *Méthodes Mathématiques Classique*. Moscou: Mir, 1976.
- [21] CHODOS, A.; SOMMERFIELD, C. M. Practical use of the Hamilton-Jacobi Equation, *J. Math. Phys.*, v. 24, p. 271, 1983.
- [22] DUREAU, L. D. Hamiltonian Operator in Generalized Coordinates, *Am. J. Phys.*, v. 33, p. 895, 1965.
- [23] SCHIFF, L. I. *Quantum Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [24] DIRAC, P. A. M. The Hamiltonian Form of Field Dynamics, *Can. J. Math.*, v. 3, p. 1-27, 1951.
- [25] ESPINDOLA, M. L.; ESPINDOLA, O.; TEIXEIRA, N. L. Two Fold Hamiltonization for Field Theory. *Hadronic J.*, v. 10, p. 83-86, 1987.
- [26] KODAMA, Y.; WADATI, M. *Progr. Theor. Phys.*, v. 56, p. 1740-1746, 1976;
ibid. *Progr. Theor. Phys.*, v. 57, p. 1900-1911, 1977.
- [27] SANTILLI, R. M. *Foundations of Theoretical Mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1983.

- [28] ESPINDOLA, M. L. Direct Hamiltonization. *Hadronic J. Suppl.*, v. 11, n. 4, p. 369-371, 1996.
- [29] ESPINDOLA, M. L. Direct Hamiltonization - Generalization of An Alternative Hamiltonization. *Intern. J. Of Bifurcation And Chaos*, v. 22, n. 6, p. 1250135 (5pages), 2012.
- [30] ESPINDOLA, O.; ESPINDOLA, M. L.; NEGRI, L. J.; TEIXEIRA, N. L. Hamiltonization for Non Holonomic Systems. *J. Phys. A*, v. 20, p. 1713-1721, 1987.
- [31] NAMBU, Y. *Phys. Rev. D*, v. 7, p. 2405-2014, 1973.
- [32] ESTABROOK, F. B. *Phys. Rev. D*, v. 8, p. 2740-2748, 1973.
- [33] ESPINDOLA, M. L., Direct Hamiltonization for Nambu Systems, *ArXiv 0810.2310*, 2008.

Índice

- EDP $F(f(x)p, q) = 0$, 29
 - solução geral, 29
- EDP $F(p, q) = 0$, 26
 - solução geral, 28
- EDP de Primeira Ordem
 - linear, 11
 - não linear, 15
- EDP Hamiltoniana
 - solução envoltória, 47
 - solução generalizada, 47
- EDP p-Laplace, 34
 - p-harmônica, 34
 - sistema de Monge, 35
 - solução generalizada, 36
- EDPs compatíveis, 15
- EDPs de primeira ordem, 2
 - origens, 2
- Equação de Hamilton Jacobi unidimensional, 31
 - Solução geral, 33
- Equação de Hamilton-Jacobi
 - linearização, 56
- Equação de Lagrange, 12
 - solução geral, 12
 - solução particular, 13
- Equações de Charpit, 17
- Equações diferenciais parciais, 1
 - definição, 1
 - EDPs, 1
 - homogênea, 2
 - linear, 2
 - ordem, 2
- Forma diferencial Pfaffiana, 27
 - condição de integrabilidade, 27
- Fundamentos da mecânica Hamiltoniana, 39
- Hamiltonização, 46
- Hamiltonização direta, 59
- Hamiltonizações alternativas, 46
 - definição de momentum, 48
- EDP Hamiltoniana, 47
- Hamiltoniano usual, 49
- mecânica de Dirac, 52
- mecânica puramente singular, 52
- procedimento, 47
- sistemas parcialmente singulares, 55
- teorias de campo, 58
- Método de Charpit, 15
 - aplicações, 17
 - Equação de Clairaut, 19
- Mecânica Hamiltoniana, 43
 - equações canônicas de movimento, 46
 - equações de movimento de Hamilton, 46
 - espaço de fase, 44
 - Hamiltoniano, 44
 - momentum generalizado, 43
- Mecânica Lagrangiana, 42
 - equações de Euler-Lagrange, 43
 - espaço de configuração, 42
 - Lagrangiano, 42
- Soluções Envoltórias, 5
 - Condição de envoltória, 5
 - Existência, 6
 - superfície envoltória, 5
- Tipos de soluções
 - completa, 5
 - envoltória, 5
 - generalizada, 31
 - geral, 5
 - particular, 5
- Transformada de Legendre, 27