Notas em Matemática Aplicada
ISSN 2175-3385
E-ISSN 2236-5915

Volume 90, 2020

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2020

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.9), as figuras em eps** e deve ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://https://proceedings.science/notas-sbmac

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2020

CÁLCULO DE ORDEM NÃO INTEIRA PARA INICIANTES

José Vanterler da Costa Sousa
vanterlermatematico@hotmail.com
Jayme Vaz Júnior
vaz@unicamp.br
Edmundo Capelas de Oliveira
capelas@unicamp.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2020

Coordenação Editorial: Mateus Bernardes

Coordenação Editorial da Série: Sandra M. C. Malta

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Sousa, José V. C.
Cálculo de Ordem não Inteira para Iniciantes - Campinas, SP : SBMAC, 2020, 94 p., 21.5 cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 90)

ISBN 978-65-86388-00-8 e-ISBN 978-65-86388-01-5

1. Cálculo fracionário 2. Derivada de Caputo 3. Transformada de Laplace I. Sousa, José V. C. II. Vaz Jr., Jayme III. Oliveira, Edmundo C.

CDD - 51

À Ingrid, Liliane e Ivana.
Dedicamos

Agradecimentos

Escrever um livro, em particular com o objetivo de que seja a base de um minicurso de seis horas, no CNMAC, não nos parece tarefa fácil, ainda mais quando o assunto a ser transmitido é pioneiro.

Tendo isso em mente, após várias conversas e discussões com estudantes e professores, gostaríamos de agradecer aos colaboradores que contribuíram de diferentes formas, direta ou indiretamente, na elaboração do presente texto, desde a sugestão de algum tópico até uma particular aplicação.

É sempre difícil mencionar nomes em agradecimentos com receio de se esquecer algum nome. Se, porventura, deixamos de agradecer um colaborador, desde já nos retratamos. Em ordem alfabética, Prof. Dr. Adrian Ricardo Gómez Plata, Profa. Dra. Arianne Vellasco Gomes, Mestranda Aurora Martha Pulido Parra, Profa. Dra. Daniela dos Santos de Oliveira, Profa. Dra. Eliana Contharteze Grigoletto, Profa. Dra. Ester Cristina Fontes de Aquino Rosa, Dr. Fábio Grangeiro Rodrigues, Prof. Dr. Félix da Silva Costa, Profa. Dra. Graziane Sales Teodoro, Doutorando Heron Silva Oliveira, Dr. José Emílio Maiorino, Prof. Dr. Júnior Cesar Alves Soares, Doutoranda Karla Katherine Barboza de Lima, Prof. Dr. Márcio José Menon, Dr. Quintino Augusto Gomes de Sousa, Mestranda Renata Piva, Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado, Prof. Dr. Rubens de Figueiredo Camargo, Doutoranda Stefania Jarosz, e, em especial Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Júnior (*in memoria*), somos gratos.

José Vanterler da Costa Sousa agradece à CAPES, processo número, 88882.305834/2018-01: pela Bolsa de Pós-Doutorado.

Enfim, gostaríamos de agradecer aos revisores e editores pela pré-aprovação e sugestões que, com certeza, contribuíram para a melhora do texto.

Conteúdo

Agradecimentos **ix**

Prefácio **xiii**

1 Cálculo de ordem inteira **1**
1.1 Cálculo integral 2
1.2 Integral de ordem inteira 3
1.3 Cálculo diferencial 7
1.4 Teorema fundamental do cálculo 11
1.4.1 Teorema do valor médio para integrais definidas . . . 11
1.5 Exercícios propostos 14

2 Cálculo de ordem não inteira **19**
2.1 Integral de ordem não inteira 20
2.2 Derivada de ordem não inteira 21
2.2.1 Formulação de Grünwald-Letnikov 22
2.2.2 Formulação de Riemann-Liouville 30
2.2.3 Formulação de Caputo 31
2.2.4 Riemann-Liouville × Caputo 33
2.2.5 Propriedade de semigrupo ou lei dos expoentes 33
2.2.6 Outras formulações de derivadas 36
2.3 Exercícios propostos 37

3 Aplicações **41**
3.1 Transformada de Laplace da função potência 41
3.2 Transformada de Laplace da clássica função de Mittag-Leffler 42
3.3 A função de Prabhakar 43
3.4 O problema da tautócrona 44
3.5 Função de Mittag-Leffler e a trigonometria 46

3.6 Transformada de Laplace da integral de Riemann-Liouville . 47
3.7 Transformada de Laplace da derivada de Caputo 47
3.8 Transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville . 49
3.9 Equação diferencial de ordem μ com o parâmetro $0 < \mu \leq 1$. 50
3.10 Equação diferencial de ordem μ com o parâmetro $1 < \mu \leq 2$. 51
3.11 Derivada de uma constante. Riemann-Liouville × Caputo . . 52
3.12 Problema de valor inicial fracionário 53
3.13 Problema de valor inicial fracionário. Caso particular 55
3.14 Equação integrodiferencial fracionária 56
3.15 Equação integral 57
3.16 Efeito de memória 58
3.17 Sistema de equações fracionárias 60
3.18 Modelo de Cole-Cole 61
3.19 Equação fracionária não homogênea 62
3.20 Equação fracionária com coeficientes não constantes 62
3.21 Equações integral e integrodiferencial fracionárias 64
3.22 Transferência de calor. Lei de Newton 65
3.23 Oscilador harmônico fracionário 67
3.24 Derivada de Riemann-Liouville e a regra de Leibniz 72

A Pré-requisitos **73**
A.1 Funções gama e beta 73
A.2 Símbolo de Pochhammer 77
A.3 Funções de Mittag-Leffler 78
A.4 Transformada de Laplace 81
A.4.1 Propriedades 84
A.4.2 Transformada de Laplace inversa 87

Bibliografia **89**

Índice **92**

Prefácio

O homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências.[a]

[a]Bento de Jesus Caraça, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Livraria Sá da Costa Editora, Lisboa, (1941).

O futuro do cálculo fracionário como uma disciplina está assegurado.[a]

[a]Tradução livre de: The future of fractional calculus as a discipline is assured, Miklós Mikolás, *On the recent trends in the development theory and applications of fractional calculus and its applications*, Lectures Notes in Mathématices, **457**, 357-375, Springer-Verlag, (1974).

É uma questão de tempo termos disciplinas específicas de cálculo de ordem não inteira ou, simplesmente, cálculo fracionário, em analogia à disciplina de cálculo, nas grades curriculares dos cursos de engenharia, matemática aplicada, matemática, física e química, dentre outros, pois o número de aplicações vem crescendo e se mostrando cada vez mais fiel ao particular fenômeno em questão. É conveniente mencionar que os resultados advindos do cálculo fracionário, com o uso de derivadas e/ou integrais de ordens não inteiras, devem recuperar, num particular limite, os resultados advindos do cálculo de ordem inteira. Essa propriedade, além de outras, conforme um critério, recentemente proposto, é característica para que um operador possa ser considerado de ordem fracionária.

Hoje, o cálculo fracionário encontra-se completamente consolidado, visto que temos vários problemas, dentre eles, aqueles que envolvem o chamado efeito de memória, que não têm uma específica explicação com o uso do ferramental e/ou das metodologias advindas do cálculo de ordem inteira. Ainda mais, por exemplo, o estudo da difusão anômala e o estudo de polímeros representam um campo fértil onde os métodos advindos do cálculo fracionário desempenham papel crucial para a elucidação de vários fenômenos. Poderíamos ampliar o leque de aplicações onde o cálculo fracionário é fundamental porém, aqui, nosso objetivo é introduzir o leitor visando um primeiro contato com o tema cálculo de ordem não inteira.

A obsessão de qualquer autor é conseguir, num texto não muito longo e nem muito técnico, fazer com que o leitor se interesse pelo assunto num crescente, conforme as páginas do livro vão ficando para trás. Em textos de matemática, acreditamos, isto só é possível se você conta uma história, apenas, pois o conteúdo é cumulativo e alguns pré-requisitos se fazem necessários, por exemplo, como se fosse a construção de um prédio no sentido de que, sem a fundação o prédio poderia vir a baixo. No contexto do cálculo, digamos, para apresentar os temas de derivada e integral, os conceitos de função e limite devem estar solidificados, caso contrário muito se perde.

A fim de que possa desfrutar desse interessante e profícuo tema o leitor deve ter conhecimentos rudimentares de cálculo no que tange os conceitos de função e limite, pois com esses dois conceitos as derivadas, associadas às taxas de crescimento/decrescimento, e as integrais, associadas ao conceito de soma, emergem quase que naturalmente. É importante ter em mente que esses conceitos, derivada e integral, quando estudados do ponto de vista do cálculo de ordem não inteira, não têm, ainda, uma associação direta, pois carecem de uma interpretação geométrica e/ou uma interpretação física, exceto em alguns particulares casos. Ainda mais, talvez o mais importante, o operador associado à derivada é um operador não local, diferentemente daquele do cálculo, pois é dado em termos de uma integral.

Vamos discorrer um pouco sobre o texto. Como estamos admitindo conhecimentos rudimentares de cálculo de ordem inteira, começamos com uma breve revisão dos conceitos de integral e derivada, um pouco diferente da grande maioria dos autores, pois começamos com a integração associada ao conceito de uma soma que nos levará à interpretação geométrica de uma área. É importante destacar que não estamos preocupados com a sequência "natural" da apresentação dos conceitos, pois está sendo considerada como uma breve revisão, isto é, o leitor já tem os pré-requisitos para a fluidez da leitura. Em resumo, o primeiro capítulo discorre sobre os conceitos de integral e derivada de ordens inteiras, acompanhados de exemplos elucidativos. Concluímos o capítulo com o teorema fundamental do cálculo que coloca em pé de igualdade os conceitos de integral e derivada. Mencionamos as principais propriedades visando os exercícios que são deixados a cargo do leitor.

No segundo capítulo, introduzimos o conceito de integral fracionária a fim de abordar as derivadas fracionárias. Nunca é demais reforçar que o termo adequado é derivada de ordem não inteira porém, por simplicidade e fidelidade ao questionamento de l'Hôpital para Leibniz versando sobre a ordem meio, isto é, uma fração, usamos também o termo derivada fracionária. Com o espantoso crescimento do tema, várias formulações de integral e derivada foram introduzidas, porém muitas delas sequer podem ser consideradas derivadas fracionárias, pois não passam de um múltiplo da derivada de ordem inteira. Aqui, neste texto, apresentamos apenas três formulações, as clássicas formulações de derivadas fracionárias, a saber: as formulações conforme propostas por Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville e Caputo, cada uma delas com a sua particularidade. Ao final do capítulo, através de um breve resumo sobre derivadas, mencionamos outras possíveis formulações, citando referências para consultas, exclusivamente para leitores que querem saber e/ou investigar uma ou outra formulação. Ao final desses dois capítulos, encontra-se uma lista de exercícios, deixada a cargo do leitor.

No terceiro capítulo discutimos algumas simples aplicações, sejam elas diretamente relacionadas com a teoria que não discutimos nos capítulos anteriores, ou ainda envolvendo equações diferencial, integral e integrodiferencial. A fim de não nos estendermos demais, quando mencionarmos o nome de uma equação diferencial, integral e integrodiferencial, vamos fazer um pequeno resumo do necessário para a discussão da aplicação e indicar uma referência.

Aquilo que reputamos tecnicidade, alocamos num único apêndice, onde apresentamos o essencial envolvendo as funções gama e beta, bem como a função de Prabhakar que envolve a função de Mittag-Leffler com três parâmetros e seus casos particulares, função esta que, neste trabalho, é a mais geral que aparece nas aplicações e, como metodologia apresentamos a transformada de Laplace e suas propriedades com destaque para o produto de convolução, pois desempenha papel crucial na apresentação das derivadas de Riemann-Liouville e Caputo.

Concluímos ratificando que este é um curso introdutório sobre cálculo fracionário no sentido de localizar e posicionar o futuro estudante e/ou pesquisador nos rudimentos do cálculo fracionário. Ressalte-se que existem outras possibilidades de abordagem, por exemplo, estudar as derivadas fracionárias com mais de uma variável; inserir mais de uma formulação em um particular problema; formulação matricial e métodos numéricos, dentre outras. Em quase todas essas possibilidades, em particular no estudo de equações diferenciais parciais lineares, as funções que se fazem presentes são as funções de Meijer e de Fox, que generalizam as clássicas funções hipergeométricas, porém esse tema não será contemplado neste texto introdutório.

Os autores

Capítulo 1

Cálculo de ordem inteira

O cálculo de ordem inteira estuda os conceitos de integral e derivada, fundindo-os no chamado teorema fundamental do cálculo. O conceito de integral está associado ao cálculo de comprimentos de curvas, áreas, volumes, dentre outras aplicações, enquanto o conceito de derivada está associado a uma taxa de variação, coeficientes angulares de retas, dentre outras aplicações. Ainda mais, o conceito de derivada desempenha papel fundamental no estudo das equações diferenciais ordinárias e parciais. Enfim, esses dois importantes conceitos, através do teorema fundamental do cálculo, se constituem um no inverso do outro.

O cálculo de ordem inteira, também conhecido como cálculo diferencial e integral, ou, simplesmente, cálculo, ocupa-se essencialmente da formulação e resolução de dois problemas geométricos: o problema das áreas e o problema das tangentes. Esses dois problemas deram origem aos dois principais ramos do cálculo: o cálculo integral, que trata do problema das áreas, remonta à Grécia [287 a.C – Arquimedes de Siracusa – 212 a.C] e o cálculo diferencial, que trata do problema das tangentes, teve início, ao que tudo indica, com Fermat [1601 – Pierre de Fermat – 1665].

No século XVII, Newton [1642 – Isaac Newton – 1727] e Leibniz [1646 – Gottfried Wilhelm Leibniz – 1726], independentemente, deram início à formulação do que conhecemos com os nomes de cálculo integral e cálculo diferencial, bem como foram os primeiros a compreender a verdadeira importância da relação entre esses dois ramos que se fundem no chamado teorema fundamental do cálculo. Esse teorema coloca em pé de igualdade os conceitos de derivada (integral) como sendo o inverso da integral (derivada).

O desenvolvimento do cálculo continuou eficiente e seus conceitos foram sendo ampliados até o século XIX, a partir de onde surge o ramo da matemática conhecido pelo nome de análise matemática, quando analistas do calibre de Gauss [1777 – Karl Friedrich Gauss – 1855], Cauchy [1789 – Augustin Louis Cauchy – 1857], Weierstrass [1815 – Karl Wilhelm Theodor Weierstrass – 1897] e Riemann [1826 – Georg Friedrich Bernard Riemann – 1866] deram-lhe, com clareza e elegância, através de suas obras, uma base matemática sólida, introduzindo formalmente os conceitos de limites, derivadas e integrais, isto é, incorporaram o rigor matemático.

Neste capítulo, diferente da grande maioria dos autores, apresentamos primeiramente o conceito de integral, associado ao cálculo de uma área, para depois introduzir o conceito de derivada seguindo, assim, a ordem natural de como tais conceitos apareceram.Visto que o objetivo central é o cálculo de ordem não inteira, após a introdução do conceito de integral, sempre que for necessário recorrer a algum conceito envolvendo a derivada, este será utilizado, isto é, apesar de termos duas seções cálculo integral e cálculo diferencial, estes podem aparecer, às vezes, em concomitância, pois admitimos que o leitor tenha cursado uma disciplina introdutória de cálculo.

1.1 Cálculo integral

Provavelmente o conceito de integral, associado ao cálculo de uma área, teve como aplicação, na antiguidade, o problema de dividir áreas (contornos) com geometria não conhecida. Com esse tipo de geometria queremos dizer que uma tal área não é delimitada por uma figura conhecida (triângulo, quadrado, retângulo, losango, trapézio e, eventualmente, uma circunferência ou uma elipse) pois, para todas essas conhecemos expressões para calcular as respectivas áreas. Ainda mais, devemos também excluir áreas compostas por duas ou mais dessas figuras (conhecidas) mencionadas.

Para essa geometria caracterizada anteriormente, uma maneira natural de calcular a área é tentar conduzir a área a ser calculada, expressando-a em termos de áreas de figuras que sejam conhecidas. Claro, nem sempre é possível esse procedimento. O que vamos fazer é, então, "fatiar" a área a ser calculada de modo que tenhamos, grosso modo, n retângulos (trapézios, eventualmente) de bases iguais a ϵ e alturas com diferentes valores de f, sendo f a função que descreve a curva que delimita a área a ser calculada para, ao final, tomar o limite $\epsilon \to 0$, definindo assim o que é conhecido com o nome de integral definida que será introduzida formalmente a seguir.

1.2 Integral de ordem inteira

Como já explicitado, o nosso objetivo central é o cálculo de ordem não inteira. Visto que os resultados de derivadas e integrais de ordens não inteiras, num particular limite, devem recuperar os resultados advindos do cálculo de ordem inteira, resultado que será mostrado no Capítulo 2, vamos apresentar a integração de ordem inteira n com $n \in \mathbb{N}$.

A fim de apresentar o conceito de integral de ordem inteira, também chamada de integral iterada, vamos mostrar que uma integral de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$, de uma função $f(x)$ com $x \in \mathbb{R}$, pode ser vista como o produto de convolução de Laplace (Apêndice) da função $f(x)$ com a função de Gelfand-Shilov de ordem n, denotada por $\phi_n(x)$ (Apêndice). Como será apresentado no Capítulo 2, a partir da generalização do conceito de fatorial, através da função gama, conforme Apêndice, vamos introduzir o conceito de integral de ordem não inteira, também conhecida pelo nome de integral fracionária.

Definição 1.1. Integral de ordem inteira

A integral de ordem inteira, dada em termos do operador $\mathcal{J}$, atuando na função $f(t)$, é

$$\mathcal{J} f(t) = \int_0^t f(t_1)\, \mathrm{d}t_1 \cdot$$

A partir do operador de ordem inteira, iterando, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^2 f(t) = \mathcal{J}[\mathcal{J} f(t)] &= \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2)\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1, \\
\mathcal{J}^3 f(t) = \mathcal{J}[\mathcal{J}^2 f(t)] &= \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} f(t_3)\, \mathrm{d}t_3\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1 \cdot
\end{aligned}$$

Definimos a integral de ordem inteira n através da expressão

$$\mathcal{J}^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\, \mathrm{d}t_n\, \mathrm{d}t_{n-1} \, \cdots \, \mathrm{d}t_3\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1 \cdot \tag{1.2.1}$$

Vamos expressar a integral de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$, por meio de um teorema envolvendo a função de Gelfand-Shilov e a transformada de Laplace do produto de convolução, conforme Apêndice.

Teorema 1.1. Integral de ordem n

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ e $f(t)$ uma função integrável. A integral de ordem n é dada por

$$\mathcal{J}^n f(t) = \phi_n(t) \star f(t) := \int_0^t \phi_n(t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

com $\star$ denotando o produto de convolução de Laplace.
Demonstração: Vamos provar o teorema por indução no parâmetro n. Para $n = 1$, temos

$$\mathcal{J} f(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{1-1}}{(1-1)!} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \phi_1(t) \star f(t)\cdot$$

Sabemos que: se $\mathcal{J}^n f(t) = \phi_n(t) \star f(t)$ então $\mathcal{J}^{n+1} f(t) = \phi_{n+1}(t) \star f(t)$, de onde segue, pela hipótese de indução

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{n+1} f(t) = \mathcal{J}[\mathcal{J}^n f(t)] = \mathcal{J}[\phi_n(t) \star f(t)] &= \int_0^t \phi_n(u) \star f(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^t \int_0^u \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}u\cdot\end{aligned}$$

Pelo teorema de Goursat [11] é possível mudar a ordem de integração, i.e.,

$$\mathcal{J}^{n+1} f(t) = \int_0^t \left[\int_\tau^t \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u\right] f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Calculando a integral entre os colchetes, podemos escrever

$$\mathcal{J}^{n+1} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^n}{n!} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \phi_{n+1}(t) \star f(t),$$

que é exatamente o resultado desejado ■

Antes de passarmos a um exemplo específico, envolvendo a expressão da integração de ordem n, vamos discutir a integração por partes associada a esse Teorema 1.1, através do exemplo a seguir.

Exemplo 1.1. (*Integração por partes.*) *Consideremos a expressão geral*

$$\int_a^x u\,\mathrm{d}v = u \cdot v|_a^x - \int_a^x v\,\mathrm{d}u \tag{1.2.2}$$

sendo u e v duas funções de variáreis reais e diferenciáveis e a uma constante tal que $a < x$. Começamos com uma simples tabela envolvendo as derivadas e as integrais, escritas de forma conveniente e identificando as funções u e v, bem como seus diferenciais

Derivada	Integral
$u = -t$	$\mathrm{d}v = f(t)\,\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$	$v = \displaystyle\int_a^t f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F(t)$

com $t > a$. Utilizando a Eq.(1.2.2) *podemos escrever*

$$\int_a^x (-t)f(t)\,\mathrm{d}t = (-t)F(t)|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t\cdot$$

Dessa expressão, visto que $F(a) = 0$, é conveniente, no lugar de $u = -t$ escrever $u = x - t$ (note que o diferencial não se altera) de onde segue

$$\int_a^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = (x-t)F(t)|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t\cdot$$

Agora, o produto $u \cdot v = (x-t)F(t)$, calculado nos extremos $t = a$ e $t = x$, é igual a zero, logo podemos escrever

$$\int_a^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \int_a^t f(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t\cdot$$

Essa integral fornece a integral da integral (iterada) escrita em termos de apenas uma integral. A fim de esclarecer procedemos, através da tabela a seguir, com mais duas integrações, a saber, (já levando em conta a conveniência de escrever $x - t$ no lugar de $-t$)

Derivadas	Integrais
$\dfrac{1}{3\cdot 2\cdot 1}(x-t)^3$	$f(t)$
$-\dfrac{1}{2\cdot 1}(x-t)^2$	$F(t) = \displaystyle\int_a^t f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$
$(x-t)$	$F(F(t)) = \displaystyle\int_a^t \int_a^{t_2} f(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2$
-1	$F(F(F(t))) = \displaystyle\int_a^t \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_3\cdot$

Note que, na primeira coluna ao derivarmos numa particular linha obtemos aquela imediatamente abaixo enquanto, na segunda coluna, ao integrarmos numa particular linha obtemos aquela imediatamente abaixo. Analogamente se pensarmos em integração na primeira coluna e derivação na segunda coluna, obtendo, em ambos os casos, aquela linha imediatamente acima.

Agora, a partir da expressão da integração por partes, Eq.(1.2.2) *podemos escrever, já eliminando o produto $u \cdot v$, pois é igual a zero, conforme já justificado, a integral de ordem dois*

$$\int_a^x \frac{1}{2!}(x-t)^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_3$$

bem como a integral de ordem três

$$\int_a^x \frac{1}{3!}(x-t)^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \int_a^{t_4} \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_3\,\mathrm{d}t_4$$

de onde, continuando com a integração por partes, obtemos a expressão

$$\int_a^x \frac{1}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\int_a^x \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \cdots \int_a^{t_{n-2}} \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\,\mathrm{d}t_n\,\mathrm{d}t_{n-1} \cdots \mathrm{d}t_3\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1$$

que, para $a = 0$ define a integração de ordem inteira, conforme Eq.(1.2.1) .

Exemplo 1.2. *Utilize a expressão para a integral de ordem inteira a fim de calcular a integral de ordem três da função $f(t) = t^2$.*

Introduzindo $n = 3$ e $f(t) = t^2$ na expressão

$$\mathcal{J}^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

obtemos

$$\mathcal{J}^3\, t^2 = \int_0^t \frac{(t-\tau)^2}{(2)!} \tau^2\,\mathrm{d}\tau\cdot$$

Para calcular a integral resultante, primeiramente introduzimos a mudança de variável $\tau = t\xi$, logo segue a integral

$$\mathcal{J}^3\, t^2 = \frac{t^5}{2} \int_0^1 (1-\xi)^2 \xi^2\,\mathrm{d}\xi$$

que, expressa em termos da função beta (Apêndice) fornece

$$\mathcal{J}^3\, t^2 = \frac{t^5}{2} B(3,3)\cdot$$

Utilizando a relação entre as funções beta e gama, podemos escrever

$$\mathcal{J}^3\, t^2 = \frac{t^5}{2} \frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{\Gamma(6)}$$

de onde segue, finalmente,

$$\mathcal{J}^3\, t^2 = \frac{t^5}{60}\cdot$$

Ao derivarmos três vezes a expressão anterior, obtemos exatamente a função integrada. Este é um aceno para mostrar que a operação integração é a inversa da operação derivação e vice-versa.

1.3 Cálculo diferencial

Antes de introduzir formalmente o conceito de derivada, apresentamos a notação, bem como vamos discutir um particular exemplo de movimento a fim de introduzir o conceito de taxa de variação.

Seja x uma função de t, denotada por $x(t)$, isto é, o valor que a variável (dependente) x toma no instante t. Denotamos por ϵ, com $\epsilon > 0$, o lapso de tempo entre dois instantes, $t-\epsilon$ e t, ou seja, $\Delta t = t-(t-\epsilon) = \epsilon$. Apenas para mencionar, podemos, também, definir $\Delta t = (t+\epsilon) - t = \epsilon$, isto é, o lapso de tempo entre os instantes $t+\epsilon$ e t. Os dois resultados fornecem o mesmo valor, sendo o primeiro considerado para trás e o segundo para a frente. Ainda mais, esse lapso de tempo sempre será positivo, e podemos pensar como sendo o posterior menos o anterior. Vamos estender esse particular lapso de tempo para um intervalo geral, a fim de introduzir o conceito de derivada como o limite de um particular quociente, bem como trabalhar apenas com a formulação para trás.

Vamos admitir que temos uma variável dependente, y, e que a variável independente seja x, isto é, $y(x)$ denota como y varia em função de x. A diferença $\Delta y = y(x) - y(x-\epsilon)$, com $\epsilon > 0$, representa como a variável y se modificou na mudança de $x-\epsilon$ para x, isto é, no intervalo $\Delta x = x-(x-\epsilon) = \epsilon$, enquanto o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x) - y(x-\epsilon)}{\epsilon}$$

é a taxa média de variação de y. Ao tomarmos o limite $\epsilon \to 0$ da taxa média de variação obtemos a taxa de variação da variável y em relação a x.

Definição 1.2. Derivada.

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $y(x)$ uma função real. A derivada de $y(x)$ em relação a x, denotada por $\mathsf{D}y(x)$, é definida pelo seguinte limite

$$\mathsf{D}y(x) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x}.$$

A expressão anterior pode ser interpretada como a taxa de variação da variável dependente, y, em relação à variável independente, x. Ainda mais, essa definição pode ser estendida para derivadas de ordens $n = 2, 3, \ldots$ como vamos ver a seguir.

Teorema 1.2. Derivada de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $x \in \mathbb{R}$, $y \in C^n[a,b]$ e $a < x \leq b$. A derivada de ordem n de $y(x)$, em relação a x, é dada por

$$\mathsf{D}^n y(x) \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} y(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) y(x - k\epsilon) \tag{1.3.3}$$

com $\epsilon > 0$ e $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ é o coeficiente binomial.

Demonstração: A fim de mostrar esse resultado, partimos da definição e calculamos as três primeiras expressões, isto é, para as derivadas de ordem um, ou simplesmente derivada, e as derivadas de ordens dois e três. Diante disso inferimos o resultado lembrando da definição do número binomial, explicitando o resultado em termos de um somatório. Então, a derivada de $y(x)$ em relação à variável independente x é dada por

$$\mathsf{D}y(x) \equiv \mathsf{D}^1 y(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{y(x) - y(x - \epsilon)}{\epsilon}.$$

A derivada de ordem dois pode ser escrita na forma

$$\mathsf{D}^2 y(x) = \mathsf{D}^1 f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x) - f(x - \epsilon)}{\epsilon}$$

onde $f(x) = \mathsf{D}y(x)$. Substituindo a derivada na expressão para a derivada de ordem dois, temos

$$\mathsf{D}^2 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathrm{D}y(x) - \mathrm{D}y(x-\epsilon)}{\epsilon}$$

ou ainda, na seguinte forma

$$\mathsf{D}^2 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \lim_{\epsilon\to 0} \frac{y(x) - y(x-\epsilon)}{\epsilon} - \lim_{\epsilon\to 0} \frac{y(x-\epsilon) - y(x-2\epsilon)}{\epsilon} \right\}$$

que, rearranjando e simplificando, pode ser escrita da seguinte maneira

$$\mathsf{D}^2 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon^2} \left\{ \mathbf{1}y(x) - \mathbf{2}y(x-\epsilon) + \mathbf{1}y(x-2\epsilon) \right\} \cdot$$

Em completa analogia à derivada de ordem dois, podemos escrever para a derivada de ordem três a seguinte expressão

$$\mathsf{D}^3 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon^3} \left\{ \mathbf{1}y(x) - \mathbf{3}y(x-\epsilon) + \mathbf{3}y(x-2\epsilon) - \mathbf{1}y(x-3\epsilon) \right\} \cdot$$

Utilizando a definição do número binomial, obtemos

$$\mathsf{D}^n y(x) \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} y(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} y(x - k\epsilon)$$

que é a expressão desejada ■

Costuma-se, também, expressar essa derivada de ordem n utilizando o que é conhecido como diferença de ordem n para trás com o comprimento do passo ϵ, ou seja, definindo essa diferença pela expressão

$$\Delta_\epsilon^n y(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} y(x - k\epsilon)$$

podemos escrever para a derivada de ordem n

$$\mathsf{D}^n y(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon^n} \Delta_\epsilon^n y(x) \cdot \tag{1.3.4}$$

Como também já mencionado, podemos obter uma expressão similar para a derivada de ordem n considerando a formulação para a frente, o que fica a cargo do leitor interessado, pois vamos trabalhar, neste texto, apenas com a formulação para trás. Enfim, mencionamos que nossas expressões consideram a derivada calculada em $x_0 = 0$, porém, para o caso geral, $x = a$, basta que consideremos uma translação $x \to x - a$, pois a derivada de uma constante é zero. Tendo essa ressalva em mente, trabalhamos, sem mencionar, com o centro das séries em $x_0 = 0$.

Passemos agora a discutir, através da expressão para a derivada de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$, dois exemplos, bem como uma aplicação a fim de obter um resultado conhecido desde o ensino fundamental.

Exemplo 1.3. *Calcule a derivada de ordem dois da função $y(x) = x^3$. Utilizando diretamente a expressão que fornece a derivada de ordem dois obtemos*

$$\mathsf{D}^2\, x^3 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^2} \left\{ \mathbf{1}\, x^3 - \mathbf{2}\,(x-\epsilon)^3 + \mathbf{1}\,(x-2\epsilon)^3 \right\}$$

Simplificando e rearranjando, temos

$$\mathsf{D}^2\, x^3 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^2} \left(6x\epsilon^2 - 6\epsilon^3 \right)$$

que, após o cálculo do limite, fornece

$$\mathsf{D}^2\, x^3 = 6x$$

que é o resultado que se obtém utilizando a derivada de uma potência.

Exemplo 1.4. *Calcule a derivada de ordem três da função $y(x) = x^2$. Novamente, a partir da expressão para a derivada de ordem três, podemos escrever*

$$\mathsf{D}^3\, x^2 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^3} \left\{ \mathbf{1}\, x^2 - \mathbf{3}\,(x-\epsilon)^2 + \mathbf{3}\,(x-2\epsilon)^2 - \mathbf{1}\,(x-3\epsilon)^2 \right\} \cdot$$

Rearranjando e simplificando obtemos

$$\mathsf{D}^3\, x^2 = 0$$

que é o resultado esperado, pois a ordem da derivada é maior que o expoente do monômio.

Aplicação 1.1. Comprimento da circunferência.

Consideremos dois círculos concêntricos de raios $r - \epsilon$ e r com $\epsilon > 0$. Denotemos por $A(r)$ a área do círculo de raio r. Vamos calcular, através da definição, a derivada de $A(r)$ em relação a r. Então, pela definição de derivada, podemos escrever

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} A(r) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{A(r) - A(r-\epsilon)}{\epsilon}.$$

Visto que a área do círculo é conhecida, $A(r) = \pi r^2$, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}A(r) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\pi r^2 - \pi(r-\epsilon)^2}{\epsilon}$$

que, simplificando, permite escrever

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}A(r) = \lim_{\epsilon\to 0}(2\pi r - \pi\epsilon)$$

bem como, após o cálculo do limite, fornece

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}A(r) = 2\pi r$$

que é o comprimento da circunferência de raio r. Então, a derivada da área do círculo de raio r, em relação ao raio, é igual ao comprimento da circunferência de raio r, isto é, vale $C = 2\pi r$, resultado este já conhecido desde os tempos do ensino fundamental.

1.4 Teorema fundamental do cálculo

Após os conceitos de integral e derivada terem sido introduzidos, vamos apresentar o teorema fundamental do cálculo que funde estes dois conceitos. Em linhas gerais, esse teorema permite calcular integrais usando uma primitiva do integrando sem que precisemos achar o limite das somas.

Começamos por introduzir o conceito de valor médio de uma função, bem como o teorema do valor médio para integrais definidas. Concluímos com o teorema fundamental do cálculo, subdividindo-o em duas partes.

Imediatamente após o respectivo conceito apresentamos uma simples aplicação. As provas dos teoremas podem ser encontradas na referência [36].

1.4.1 Teorema do valor médio para integrais definidas

O conceito de valor médio de uma função desempenha papel crucial na demonstração do teorema fundamental do cálculo, como vamos ver na sequência.

Definição 1.3. VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO.

Seja $f(x)$ uma função contínua ao longo do intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(x)$ é integrável neste intervalo, definimos o seu valor médio denotado por VM, em $[a, b]$, a partir da integral

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.4.5}$$

É importante notar que o teorema do valor médio para integrais definidas assegura que o VM é sempre admitido, pelo menos uma vez, pela função no respectivo intervalo. A seguir apresentamos um exemplo bastante simples, porém elucidativo, pois o resultado é conhecido.

Exemplo 1.5. *Determine o* VM *de* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *no intervalo* $[-1, 1]$. *A partir da* Eq.(1.4.5) *temos* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $a = -1$ *e* $b = 1$. *Substituindo tais valores nessa equação, resulta na integral*

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\cdot$$

Visto que o integrando é uma função par e já simplificando, devemos calcular

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\cdot$$

Introduzindo a mudança de variável $x = \operatorname{sen}\theta$, *os extremos passam a ser* $\theta = 0$ *e* $\theta = \pi/2$, *respectivamente, análogo ao já discutido quando do cálculo da área de um círculo de raio unitário, logo*

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$

ou ainda, utilizando a relação fundamental da trigonometria, na forma

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \int_{0}^{\pi/2} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta\cdot$$

Usando a relação trigonométrica envolvendo o arco dobro, e separando em duas integrais, apenas a primeira parcela contribui, então temos

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{2} + \underbrace{\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta}_{=0} = \frac{\pi}{4},$$

que é o resultado desejado, VM *de* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *em* $[-1, 1]$ *é* $\pi/4$.

Teorema 1.3. Valor médio

Seja $x \in \mathbb{R}$. Se a função $f(x)$ for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então em algum ponto c em $[a, b]$ temos

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Geometricamente, este teorema assegura que existe um número c em $[a,b]$ tal que o retângulo com altura igual ao valor médio $f(c)$ da função e a base do retângulo, $(b-a)$, tem exatamente a mesma área que a região sob a curva de $f(x)$ entre a e b (área delimitada pela curva $f(x)$ o eixo x e as retas $x=a$ e $x=b$)

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \text{Área}.$$

Exemplo 1.6. *Vamos apresentar e discutir uma aplicação com os dados utilizados no* **Exemplo 1.5**. *Identificando, temos $a=-1$, $b=1$ e $f(c)=\frac{\pi}{4}$. Visto que é um semicírculo de raio unitário, a área é igual a $\pi/2$ unidades de área. Por outro lado, utilizando o teorema temos*

$$(b-a)f(c) = (1+1)\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \ (\textit{unidades de área})$$

que é exatamente o valor da área do semicírculo de raio unitário, resultado este conhecido.

Teorema 1.4. Teorema fundamental do cálculo – Parte I.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

é também uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b), sendo sua derivada igual a $f(x)$, isto é,

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x).$$

Teorema 1.5. Teorema fundamental do cálculo – Parte II.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Se a função $f(x)$ é contínua em qualquer ponto do intervalo fechado $[a,b]$ e se a função $F(x)$ é qualquer primitiva de $f(x)$ em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Este teorema assegura que podemos calcular integrais definidas sem precisar calcular limites de somas. Para tal, basta calcular uma primitiva e substituir os valores dos extremos de integração, superior e inferior, e subtrair esses valores da primitiva.

Exemplo 1.7. *Considere a função dada no* Exemplo 1.5. *Do teorema fundamental do cálculo, parte I, podemos escrever*

$$F'(x) = \sqrt{1-x^2}$$

cuja integração (primitiva) fornece

$$F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C$$

onde C é uma constante arbitrária. Esse resultado pode ser verificado calculando a derivada de $F(x)$, em relação a x, e lembrando que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot$$

Assim conhecida uma primitiva, pelo teorema fundamental do cálculo, parte II, obtemos

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=1}$$

que, substituindo os extremos e simplificando, permite escrever

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2} \cdot$$

1.5 Exercícios propostos

1. Seja $x \in \mathbb{R}_+$. A partir da definição mostrar que a derivada da função $y = \ln x$ é igual a $1/x$.

2. Análogo ao anterior para mostrar que a derivada da função $y = e^x$ é ela mesma, isto é, $y' = y$.

3. Mostre que a derivada da função $y = \operatorname{sen} x$ é igual a $y' = \cos x$ bem como, em analogia, se $y = \cos x$ temos $y' = -\operatorname{sen} x$.

4. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in \mathbb{R}_+$ números com soma S. Quais são esses números tal que o produto da enésima potência do primeiro pela emésima potência do segundo resulta máximo?

   Resp. $x = \dfrac{n}{n+m}S$ e $y = \dfrac{m}{n+m}S$.

5. Seja $-1 < x < 1$. Mostre que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot$$

6. Considere uma cartolina quadrada de lado a. Cortando-se dos cantos da cartolina quadrados iguais e depois dobrando-se de maneira conveniente a parte restante, a fim de que tenhamos uma caixa. Determine o lado dos quadrados cortados a fim de que a caixa encerre volume máximo.

   Resp. $\dfrac{a}{6}$.

7. Seja $x \in \mathbb{R}$. Esboçar o gráfico da função $y(x) = x^3 - 4x$, destacando os extremos, se existirem.

8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$. Calcular a área delimitada pela elipse com equação dada por $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

   Resp. πab.

9. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$. Considere a equação da elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Determine as dimensões do maior retângulo inscritível na elipse.

   Resp. $a\sqrt{2}$ e $b\sqrt{2}$.

10. Seja $x \in \mathbb{R}$. Discutir a concavidade da curva $f(x) = 6x^4 - 9x^2 + 2$.

    Resp. Pontos de inflexão $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$. A curva é côncava para cima à esquerda e para baixo à direita de $x = -1/2$. A curva é côncava para baixo à esquerda e para cima à direita de $x = 1/2$.

11. Seja $a \in \mathbb{R}^*$. Introduza a mudança de variável $= a \tan \theta$ para mostrar o seguinte resultado

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{x} \right) + C$$

    onde C é uma constante arbitrária.

12. Sejam uma curva dada pela equação $y = f(x)$ e o comprimento dessa curva, tomada de $x = a$ até $x = b$, denotado por s. Mostra-se que vale a seguinte expressão [36]

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \cdot$$

Utilizando essa expressão, mostre que o comprimento da circunferência de raio r é igual a $2\pi r$ unidades de comprimento.

13. O volume do sólido, V, gerado pela revolução, em torno do eixo horizontal, x, da área delimitada pela curva, $y = f(s)$, o eixo horizontal, e as retas $x = a$ e $x = b$, é dado por [36]

$$V = 2\pi \int_a^b y^2 \, \mathrm{d}x \cdot$$

Utilizando essa expressão, mostre que o volume da esfera de raio r é igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$ unidades de volume.

14. Seja $x \in \mathbb{R}$. Obter a área delimitada pela curva $y(x) = x^2 + x^{-2}$ e as retas verticais $x = 1$ e $x = 2$.

15. Seja $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calcular a área delimitada pelas curvas $y_1(x) = \sqrt{2x^2 - 4}$ e $y_2(x) = x^2$.

16. Uma das bases de um trapézio isósceles é o diâmetro de um círculo de raio r e as extremidades da outra base estão sobre a circunferência do círculo. Sabendo-se que a área do trapézio é máxima, determine o comprimento da outra base.

    Resp. r.

17. Calcular o ângulo formado pela interseção das parábolas $y_1 = x^2 + 1$ e $y_2 = -x^2 + 2x + 1$.

    Resp. $\arctan 2$.

18. Determinar os pontos de máximo/mínimo, se houverem, para a função $f(x) = x^3 - 3x + 3$ no intervalo fechado $[-2, 2]$.

    Resp. Máximo $(-1, 5)$ e Mínimo $(1, 1)$.

19. Demonstre que, de todos os triângulos isósceles inscritos em um círculo de raio r, o de maior perímetro é o equilátero.

    Resp. Lado $r\sqrt{3}$.

20. Determine as equações das retas tangente e normal à curva com equação dada por $y = 6x^2 - 4x$, em $x = 1$.

    Resp. Tangente $y - 8x + 6 = 0$ e normal $8y - x - 15 = 0$.

21. Calcule a integral indefinida

$$\int x\, e^{x^2} \cos x^2 \, \mathrm{d}x \cdot$$

Resp. $e^{x^2}(\operatorname{sen} x^2 + \cos x^2)/3 + C$, com C uma constante arbitrária.

22. Utilize a substituição $\tan(x/2) = t$ para mostrar que

$$\int \csc x \, \mathrm{d}x \equiv \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x} = \ln|\tan(x/2)| + C$$

sendo C uma constante arbitrária.

23. Introduza a mudança de variável $\tan(x/2) = t$ para mostrar que

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{4 - 3\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{7}} \cdot$$

24. (MIT2005) Calcular a integral $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 8} \cdot$

Resp. $\dfrac{\pi}{8} \cdot$

25. Determine a área compreendida entre as duas curvas de equações dadas por $y_1 = x^2 - 2x$ e $y_2 = -x + 2$.

Resp. $\frac{9}{2} \cdot$

26. Introduza a mudança de variável $\tan(x/2) = t$ para mostrar que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x} = \ln\left(1 + \tan\frac{x}{2}\right) + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

27. Com a mudança similar ao Exercício 26, mostre que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{3 + 5\operatorname{sen}\theta} = \frac{\ln 3}{4} \cdot$$

28. Seja $a > 0$. Calcule a integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a - x}{a + x}} \, \mathrm{d}x \cdot$$

Resp. a.

29. (https://www.blackpenredpen.com) Sejam $0 < x < 1$ e $y = f(x)$. Admita que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Utilize integração por partes para calcular a integral
$$\int_0^1 f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$$
onde $f^{-1}(y)$ é a função inversa de $f(x)$.
Resp. $\dfrac{2}{3}\cdot$

30. Utilize o teorema fundamental do cálculo e a regra da cadeia para calcular a derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ sendo
$$y = \int_0^{2x} (\xi + \xi^2)\,\mathrm{d}\xi\,\cdot$$
Resp. $y' = 4x + 8x^2\cdot$

31. A equação do chamado fólio de Descartes, em coordenadas cartesianas, é dada por $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ com a uma constante. Seja t um parâmetro real. a) Mostre que podemos parametrizar a equação de modo que tenhamos
$$x = \frac{3at}{1+t^3} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}\,\cdot$$
b) Calcule $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, usando as formas cartesiana, através da derivação implícita, e através da derivada na forma paramétrica.
Resp. O mesmo resultado: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\cdot$

32. Sejam x e y as coordenadas cartesianas e $\mu \in \mathbb{R}_+^*$. Utilize coordenadas polares no plano, denotadas por r e θ, definidas pelas equações
$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$
a fim de mostrar o resultado
$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\,\cdot$$

Capítulo 2

Cálculo de ordem não inteira

Como o próprio título já afirma, vamos discutir integrais e derivadas de ordens não inteiras que se constituem numa generalização natural dos conceitos de integral e derivada advindos do cálculo de ordem inteira. Diferentemente do cálculo de ordem inteira, uma interpretação geométrica e ou física, no caso geral, ainda é um problema em aberto, em particular por estarmos trabalhando com o conceito de não localidade. Enfim, sem perda de generalidade, neste texto, vamos utilizar a nomenclatura cálculo fracionário como sinônimo de cálculo de ordem não inteira.

O cálculo de ordem não inteira, também conhecido como cálculo diferencial e integral de ordem não inteira, ou, simplesmente, cálculo fracionário, é tão antigo quanto o cálculo de ordem inteira, pois teve seu início no final do século XVII, com uma suposta troca de correspondência entre l'Hôpital e Leibniz, em 1695. Em seus primórdios, pouco é encontrado na literatura, em particular, trabalhos de forma independente e dispersos têm registro, o que veio mudar, a partir do primeiro congresso, em New Haven, em 1974, dedicado exclusivamente ao tema, 280 anos depois.

Aqui, apenas para localizar, vamos mencionar algumas cronologias citando a particular referência. Começamos pelos livros de Oldham-Spanier [19], datado de 1974 e Miller-Ross [16], datado de 1993, onde encontramos uma cronologia, em particular, citando vários artigos seminais. Mais recente, em 2010, encontramos dois importantes trabalhos, com dois pôsteres, contendo uma linha do tempo, um deles mencionando pesquisadores antigos [12] e outro com pesquisadores, muitos deles, ainda em atividade [13]. A partir dessa data, completamente consolidado, o cálculo fracionário apresenta um crescimento exponencial, em particular abrindo várias frentes de pesquisa. Ainda mais, várias cronologias têm surgido, por exemplo, dedicadas aos pioneiros do cálculo e às primeiras aplicações, dentre outras. Mencionamos só a mais recente, onde é elaborada uma cronologia dividida em etapas, contida no primeiro capítulo do livro de exercícios resolvidos e propostos [21].

Neste capítulo, com o intuito de discutir apenas o básico do cálculo fracionário, apresentamos os conceitos seguidos de um particular exemplo ou uma aplicação, pois entendemos que o exemplo ou a aplicação podem solidificar o particular conceito. Ainda mais, evitamos, sempre que possível, a tecnicidade em nome da simplicidade, mencionando uma referência para o leitor interessado em um texto mais técnico. Após a introdução do conceito de integral de ordem não inteira, abordamos apenas as formulações de derivada conforme Grünwald-Letnikov [1838 – Anton Karl Grünwald – 1920]-[1837 – Aleksey Vasilievich Letnikov – 1888], Riemann-Liouville [1809 – Joseph Liouville – 1882] e Caputo [1927 – Michele Caputo –] [28].

2.1 Integral de ordem não inteira

Utilizando o resultado obtido no Teorema 1.1, bem como o conceito de função gama, uma natural generalização do conceito de fatorial, conforme apresentado no Apêndice, vamos generalizar a integral de ordem inteira para uma integral de ordem arbitrária, $\nu \in \mathbb{R}$. Ainda que a ordem possa ser, inclusive, complexa, neste trabalho admitimos somente a ordem real.

Definição 2.1. Integral de ordem ν

Seja $y(x)$ uma função integrável. Definimos a integral de ordem arbitrária $\nu \in \mathbb{R}$, da função $y(x)$, denotada por $\mathcal{J}^\nu y(x)$, através da seguinte expressão

$$\mathcal{J}^\nu y(x) = \phi_\nu(x) \star y(x) = \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} y(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \tag{2.1.1}$$

onde $\star$ denota o produto de convolução. No caso em que o parâmetro associado à ordem, ν, é tal que $\nu = n+1$ com $n \in \mathbb{N}$, recuperamos exatamente o resultado para a integral de ordem inteira.

Exemplo 2.1. *Calcular a integral de ordem meio da função $y(x) = x$. Substituindo $\nu = 1/2$ e $y(x) = x$ na* Eq.(2.1.1) *obtemos*

$$\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}\, x = \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} \tau\, \mathrm{d}\tau\cdot$$

Utilizando o resultado $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ *(Apêndice) e introduzindo a mudança de variável,* $\tau = x\xi$*, obtemos*

$$\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}\, x = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-\xi)^{-1/2}\xi \,\mathrm{d}\xi$$

que, em termos da função beta (Apêndice), pode ser escrito como

$$\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}\, x = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{\pi}} B(1/2, 2)\cdot$$

Utilizando a relação entre as funções beta e gama e simplificando obtemos

$$\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}\, x = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} = \frac{8x\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi}}\cdot$$

Definição 2.2. Integral de Riemann-Liouville.

Sejam $y(x)$ uma função contínua e $\mu \in \mathbb{R}_+$. Definimos o operador integral de Riemann-Liouville de ordem μ, no intervalo $[a, b]$, denotado por $\mathcal{J}_a^\mu$, atuando na função $y(x)$, através da expressão

$$\mathcal{J}_a^\mu y(x) := \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x (x-\xi)^{\mu-1} y(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.1.2}$$

para $a \leq x \leq b$. No particular caso $\mu = 0$, definimos $\mathcal{J}_a^0 \equiv I$, o operador identidade.

2.2 Derivada de ordem não inteira

Nesta seção vamos generalizar o conceito de derivada de ordem inteira, abordando três distintas formulações, cada uma delas com as suas particularidades. Por extensão de linguagem é comum chamar essas derivadas de ordem não inteira com o nome de derivadas fracionárias, termo esse devido ao questionamento de l'Hôpital a Leibniz sobre o que seria a derivada de ordem meio [2]. Aqui, como já mencionado, vamos introduzir apenas as formulações de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville e Caputo, apesar de outras formulações existirem [35].

2.2.1 Formulação de Grünwald-Letnikov

Vamos começar com a formulação de Grünwald-Letnikov, pois é a mais familiar no sentido de uma generalização por conter o cálculo de um limite. Então, a fim de estender o conceito de derivada de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$, conforme Eq.(1.3.3), para uma ordem, em princípio arbitrária, porém, aqui, consideramos apenas as ordens reais, digamos $\mu \in \mathbb{R}$, devemos generalizar o conceito de coeficiente binomial introduzindo a função gama, uma generalização do fatorial. No caso em que $\mu = n$, com $n \in \mathbb{N}$, recuperamos exatamente a expressão para a derivada de ordem n, Eq.(1.3.3).

Seja $y = y(x)$ uma função contínua. A derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$, conforme Eq.(1.3.3), é dada por

$$\mathsf{D}^n y(x) \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} y(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \underbrace{\frac{1}{\epsilon^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) y(x - k\epsilon)}_{(*)} \tag{2.2.3}$$

onde o coeficiente binomial é expresso em termos do quociente, para $k \leq n$,

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

A fim de generalizar a expressão anterior, começamos considerando um número inteiro arbitrário, denotado por $p \leq n$ e estudamos, em separado, $p < 0$ e $p > 0$. Primeiro, introduzimos a notação

$$y_\epsilon^{(p)}(x) = \frac{1}{\epsilon^p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) y(x - k\epsilon)$$

que pode ser interpretada como uma generalização da expressão destacada por $(*)$ em Eq.(2.2.3).

Dessa expressão, para $p \leq n$, podemos escrever

$$\lim_{\epsilon \to 0} y_\epsilon^{(p)}(x) = y^{(p)}(x) = \mathsf{D}^p y(x)$$

uma vez que todos os coeficientes no numerador após $\left(\begin{array}{c} p \\ p \end{array} \right)$ são nulos, conforme a definição do coeficiente binomial.

Vamos, para valores de $p < 0$, introduzir a notação

$$\left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] = \frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+r-1)}{r!}$$

de onde segue a relação com o coeficiente binomial

$$\left(\begin{array}{c} -p \\ r \end{array} \right) = (-1)^r \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right]$$

que permite escrever a expressão, considerando $-p \to p$,

$$y_\epsilon^{(-p)}(x) = \epsilon^p \sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] y(x - r\epsilon)$$

sendo, agora, $p > 0$.

Da expressão anterior, sendo n fixo, então $y_\epsilon^{(-p)}(x) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Logo, devemos impor $n \to \infty$ quando $\epsilon \to 0$, pois existe uma relação entre eles, $n\epsilon = x - a$, logo

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0 \\ n\epsilon = x-a}} y_\epsilon^{(-p)} = {}_a\mathsf{D}_x^{-p} y(x)$$

sendo a e x os extremos do intervalo. No particular caso em que $p = 1$, temos

$$y_\epsilon^{(-1)}(x) = \epsilon \sum_{r=0}^{n} y(x - r\epsilon)\cdot$$

Visto que $x - n\epsilon = a$ e admitindo $y(x)$ uma função contínua, podemos escrever

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0 \\ n\epsilon = x-a}} y_\epsilon^{(-1)}(x) = {}_a\mathsf{D}_x^{-1} y(x) = \int_0^{x-a} y(x - \xi)\, \mathrm{d}\xi = \int_a^x y(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

isto é, a integral que para um $n \in \mathbb{N}$ nos leva à seguinte expressão

$${}_a\mathsf{D}_x^{-p} y(x) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0 \\ n\epsilon = x-a}} \epsilon^p \sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] y(x - r\epsilon) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x - \xi)^{p-1} y(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

que pode ser provada por indução [29], bem como ser mostrado que equivale à integral p-iterada.

Em resumo, a expressão

$${}_a\mathsf{D}_x^{p} y(x) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0 \\ n\epsilon = x-a}} \frac{1}{\epsilon^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \left(\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right) y(x - r\epsilon) \qquad (2.2.4)$$

é, então, a derivada de ordem m se $p = m$ e a integral m-iterada se $p = -m$.

Devemos agora estudar o caso geral, ou seja, uma ordem arbitrária que, aqui, será restrita apenas ao caso em que p é real, separando em dois casos $p < 0$, relacionado à integração e $p > 0$, associado à derivação, justificando assim, o termo diferintegração relativo à formulação de Grünwald-Letnikov.

Começamos com $p < 0$ que, em analogia ao caso anterior, substituímos $p \to -p$, logo a Eq.(2.2.4) toma a forma

$$ {}_a\mathsf{D}_x^{-p} y(x) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ n\epsilon = x-a}} \epsilon^p \sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] y(x - r\epsilon) $$

sendo, ainda, n e ϵ, relacionados por $n\epsilon = x - a$, podemos escrever [29]

$$ {}_a\mathsf{D}_x^{-p} y(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-\xi)^{p-1} y(\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{2.2.5} $$

que, admitindo as $m + 1$ derivadas de $y(x)$ funções contínuas no intervalo $[a, b]$, fornece

$$ {}_a\mathsf{D}_x^{-p} y(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{y^{(k)}(a)(x-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^x (x-\xi)^{p+m} y^{(m+1)}(\xi)\, \mathrm{d}\xi $$

obtida via integração por partes.

Em analogia ao caso $p < 0$, vamos considerar agora $p > 0$ de onde segue

$$ {}_a\mathsf{D}_x^{p} y(x) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ n\epsilon = x-a}} \frac{1}{\epsilon^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} y(x - r\epsilon) $$

que, pode ser escrita na forma

$$ {}_a\mathsf{D}_x^{p} y(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{y^{(k)}(a)(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^x (x-\xi)^{m-p} y^{(m+1)}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{2.2.6} $$

válida desde que as derivadas $y^{(k)}(x)$, com $k = 1, 2, \ldots, m+1$, sejam contínuas no intervalo $[a, x]$ bem como o inteiro $m \in \mathbb{N}$ satisfaça a dupla desigualdade $m < p < m + 1$.

Antes de prosseguir, devido a importância, vamos discutir integração e derivação de ordens arbitrárias da função potência, através do exemplo.

Exemplo 2.2. Integral e derivada da função potência. *Consideremos uma função potência $y(x) = (x - a)^\mu$, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}_+$. Para a integração, $p < 0$, a partir da Eq.(2.2.5), podemos escrever*

$$ {}_a\mathsf{D}_x^{p} (x-a)^\mu = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^x (x-\xi)^{-p-1} (\xi - a)^\mu \, \mathrm{d}\xi $$

com $\mu > -1$ *para a convergência da integral. Utilizando a mudança de variável* $\xi = a + (x-a)t$ *e a definição da função beta, obtemos*

$$ {}_a\mathsf{D}_x^p (x-a)^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-p+1)}(x-a)^{\mu-p} $$

com $p < 0$ *e* $\mu > -1$.

Por outro lado, para a derivada, consideramos $0 \le m \le p < m+1$ *e a condição* $\mu > m$ *para a convergência da integral na Eq.(2.2.6), de onde segue*

$$ {}_a\mathsf{D}_x^p (x-a)^\mu = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^x (x-\xi)^{m-p} \left\{ \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}\xi^{m+1}} (\xi-a)^\mu \right\} \mathrm{d}\xi $$

visto que $y(a) = 0$. *Em analogia ao caso da integração e usando a expressão da derivada de ordem inteira da função potência, podemos escrever*

$$ {}_a\mathsf{D}_x^p (x-a)^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-p+1)}(x-a)^{\mu-p} \tag{2.2.7} $$

com $p > 0$ *e* $\mu > m$.

Enfim, a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov da função potência é dada pela expressão

$$ {}_a\mathsf{D}_x^p (x-a)^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-p+1)}(x-a)^{\mu-p} $$

com $p < 0$ *e* $\mu > -1$ *interpretada como integração de ordem* μ, *bem como* $0 \le m \le p < m+1$ *e* $\mu > m$, *interpretada como derivação de ordem* μ. *Do ponto de vista teórico, a classe de funções para as quais a definição da derivada (diferintegral) de Grünwald-Letnikov é que a função seja* $m+1$ *vezes continuamente diferenciável.*

Exemplo 2.3. *A partir da expressão que fornece a derivada de ordem inteira da função* $y(x) = x^m$, *com* m *um inteiro positivo, e da generalização do coeficiente binomial, obtenha a derivada de ordem meio da função* $y(x) = x$. *Substituindo* $a = 0$, $\mu = 1$ *e* $p = 1/2$ *na* Eq.(2.2.7) *obtemos*

$$ {}_0\mathsf{D}_x^{\frac{1}{2}}\, x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-1/2+1)} x^{1-1/2} $$

ou ainda, simplificando, na seguinte forma

$$ {}_0\mathsf{D}_x^{\frac{1}{2}}\, x = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} $$

visto que $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, *conforme* Apêndice.

Esse resultado, como já mencionado, diz respeito ao tom profético proferido por Leibniz quando questionado por l'Hôpital sobre o que viria a ser o cálculo de uma derivada de ordem meio (não inteira), em que afirmou que muitos frutos seriam derivados desse resultado [2].

Vamos, ainda relativamente à derivada de Grünwald-Letnikov, obter o mesmo resultado, a partir do chamado operador deslocamento, considerando agora, para simplificar, com o extremo $a = 0$. A fim de atingir nosso objetivo, introduzimos $\epsilon_N = \frac{x}{N}$ com $N = 1, 2, \ldots$ e ainda mais, lembramos, como no caso de ordem inteira, que estamos considerando $a = 0$, caso contrário, deveríamos considerar $\epsilon_N = \frac{x-a}{N}$, sendo $x = a$ o centro da série e $\mu \in \mathbb{R}$ a ordem da derivada.

Em analogia à Eq.(1.3.4) podemos escrever

$$\mathsf{D}^\mu y(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\epsilon_N^\mu} \Delta^\mu_{\epsilon_N} y(x)$$

ou ainda na seguinte forma, conforme a Eq.(1.3.3)

$$\mathsf{D}^\mu y(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\epsilon_N^\mu} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \begin{pmatrix} \mu \\ k \end{pmatrix} y(x - k\epsilon_N), \qquad (2.2.8)$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ é a ordem da derivada. Introduzimos, então, o chamado operador deslocamento, denotado por σ_ϵ e definido pela relação

$$\sigma_\epsilon y(x) = y(x - \epsilon)$$

que, iterado, permite escrever, para $n \in \mathbb{N}$, a expressão

$$\sigma_\epsilon^n y(x) = y(x - n\epsilon)\cdot$$

Podemos, então, reescrever a Eq.(1.3.3) na seguinte forma

$$\mathsf{D}^n y(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \sigma_\epsilon^n y(x)\cdot$$

É oportuno notar a similaridade dessa expressão com a expressão do binômio de Newton

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k$$

logo, diante desse fato, podemos escrever para o operador derivada expresso em termos do operador deslocamento

$$\mathsf{D}^n y(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \left(\frac{1-\sigma_\epsilon}{\epsilon} \right)^n y(x)\cdot$$

Como já mencionamos, a expressão do binômio de Newton, pode ser generalizada para $n \neq \mathbb{N}$, através do conceito de função gama que generaliza o conceito de fatorial, isto é, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} \mu \\ k \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{k!\Gamma(\mu-k+1)}$$

com μ não necessariamente um inteiro. A partir dessa identidade, podemos generalizar a expressão que fornece a derivada de ordem inteira, conforme Eq.(1.3.3), de modo a termos a expressão que fornece a derivada de ordem não inteira, $\mu > 0$, isto é,

$$\mathsf{D}^{\mu} y(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^{\mu}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\mu+1)}{k!\Gamma(\mu-k+1)} y(x-k\epsilon)\,,$$

ou ainda em termos do operador deslocamento

$$\mathsf{D}^{\mu} y(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1-\sigma_{\epsilon}}{\epsilon} \right)^{\mu} y(x)\cdot \tag{2.2.9}$$

Enfim, em analogia à Eq.(1.3.3), a generalização do conceito de fatorial e com uma mudança no índice de soma, N, quando tomamos o limite $\epsilon \to 0$, visto estarem relacionados pela expressão $\epsilon_N = \frac{x-a}{N}$ que, em nosso caso, estamos considerando $a = 0$, podemos escrever, em geral,

$${}_a\mathsf{D}_x^{\mu} y(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^{\mu}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-a}{\epsilon}\right]} (-1)^k \frac{\Gamma(\mu+1)}{k!\Gamma(\mu+1-k)} y(x-k\epsilon) \tag{2.2.10}$$

conhecida como derivada de ordem não inteira de Grünwald-Letnikov ou derivada fracionária de Grünwald-Letnikov ou, simplesmente, derivada de Grünwald-Letnikov. Ainda mais, como vamos ver a seguir, essa derivada contempla tanto a formulação de derivada de ordem inteira, quanto a formulação de integral e, portanto, também é conhecida com o nome de diferintegral de Grünwald-Letnikov. Destacamos que, a notação $\left[\frac{x}{\epsilon}\right]$ tem o significado de considerar o maior inteiro.

Exemplo 2.4. *Utilize o operador deslocamento para discutir os casos $\mu = 1$, $\mu = 2$ e $\mu = -1$. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. Nos dois primeiros casos, devemos recuperar as expressões para as derivadas de ordem um e dois, respectivamente. Enfim, no terceiro caso, vamos mostrar que o operador de integração é recuperado, justificando, assim, o termo diferintegral.*

- $\mu = 1$. *Neste caso, basta tomar* $\mu = 1$ *na* Eq.(2.2.9), *logo*

$$\mathsf{D}^1 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1-\sigma_\epsilon}{\epsilon}\right) y(x)\cdot$$

Substituindo $\sigma_\epsilon = y(x-\epsilon)/y(x)$ *na expressão anterior e rearranjando, temos*

$$\mathsf{D}^1 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{y(x)-y(x-\epsilon)}{\epsilon y(x)} y(x)$$

que, simplificando, fornece a expressão para a derivada primeira, isto é,

$$\mathsf{D}^1 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{y(x)-y(x-\epsilon)}{\epsilon}\cdot$$

- $\mu = 2$. *Aqui devemos tomar* $\mu = 2$ *na* Eq.(2.2.9), *logo*

$$\mathsf{D}^2 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1-\sigma_\epsilon}{\epsilon}\right)^2 y(x)\cdot$$

Substituindo $\sigma_\epsilon = y(x-\epsilon)/y(x)$ *na expressão anterior e rearranjando, podemos escrever*

$$\mathsf{D}^2 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{y(x)-y(x-\epsilon)}{\epsilon y(x)}\right]^2 y(x)$$

que, após simplificação, permite escrever

$$\mathsf{D}^2 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^2}\frac{y^2(x)-2y(x)y(x-\epsilon)+y^2(x-\epsilon)}{y(x)}\cdot$$

Vamos, agora, reescrever a expressão anterior, eliminando $y(x-\epsilon)$, *isto é, escrevendo em seu lugar* $\sigma_\epsilon y(x)$ *de onde segue*

$$\mathsf{D}^2 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{\frac{1-\sigma_\epsilon}{\epsilon} y(x) - \frac{1-\sigma_\epsilon}{\epsilon}\sigma_\epsilon y(x)\right\}$$

ou ainda, fatorando, na seguinte forma

$$\mathsf{D}^2 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{1-\sigma_\epsilon}{\epsilon}\frac{1-\sigma_\epsilon}{\epsilon} y(x)\right\}.$$

Utilizando a expressão para a derivada de ordem um, podemos escrever

$$\mathsf{D}^2 y(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{1-\sigma_\epsilon}{\epsilon}\mathsf{D}^1 y(x)\right\} = \mathsf{D}^1\mathsf{D}^1 y(x)$$

de onde segue o resultado desejado. Um procedimento análogo aos dois casos $\mu = 1$ *e* $\mu = 2$ *permite justificar a expressão para a derivada de ordem* $\mu = n$ *com* $n \in \mathbb{N}$, *conforme* Eq.(2.2.9).

- $\mu = -1$. *Neste caso, vamos obter a integração. Temos então,*

$$\mathsf{D}^{-1} f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1 - \sigma_\epsilon}{\epsilon} \right)^{-1} f(x)\cdot$$

Utilizando a expansão em série [26]

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad |z| < 1$$

podemos escrever, considerando $\epsilon = \frac{x}{N-1}$,

$$\mathsf{D}^{-1} f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\epsilon \left(1 + \sigma_\epsilon + \sigma_\epsilon^2 + \cdots \right) \right] f(x)\cdot$$

Utilizando a definição do operador σ_ϵ *obtemos, a partir da expressão anterior,*

$$\mathsf{D}^{-1} f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \{ \epsilon \left[f(x) + f(x-\epsilon) + f(x - 2\epsilon) + \cdots + f(0) \right] \}$$

ou ainda, na seguinte forma

$$\mathsf{D}^{-1} f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon f(x - k\epsilon) = \int_0^x f(\eta)\, \mathrm{d}\eta$$

Note que a expressão anterior nada mais é que a soma dos N *retângulos de base* ϵ *e altura* $f(x - k\epsilon)$, *que, no limite da base* $\epsilon \to 0$ *fornece exatamente o operador integração, interpretada como área abaixo da curva, ou seja, podemos escrever*

$$\mathsf{D}^{-1} f(x) = \int_0^x f(\eta)\, \mathrm{d}\eta\cdot$$

É importante notar o caráter não local da derivada de ordem não inteira, pois a série se estende até o infinito. No caso em que $\mu = 1$ (análogo ao caso $\mu = 2$) temos que apenas os dois primeiros números binomiais contribuem, pois os demais são nulos uma vez que o coeficiente binomial $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = 0$ para $k = 2, 3, \ldots$ enquanto para $\mu = -1$, temos para o coeficiente binomial

$$\begin{pmatrix} -1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-1+k+1)}{k!} = (-1)^k\cdot$$

2.2.2 Formulação de Riemann-Liouville

No início deste capítulo, deixamos claro que a formulação de Grünwald-Letnikov era a que mais se assemelhava com a formulação clássica, pois foi introduzida a partir de um limite, como visto na seção anterior. As duas próximas formulações são apresentadas em termos de uma integral de ordem inteira no caso da formulação de Riemann-Liouville e uma integral de ordem não inteira na formulação de Caputo.

Definição 2.3. Derivada de Riemann-Liouville.

Sejam $y(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, x]$ e $\mu \in \mathbb{R}$. O operador ${}^{\mathsf{RL}}_{a}\mathsf{D}^{\mu}_{x} y(x)$, definido por

$$ {}^{\mathsf{RL}}_{a}\mathsf{D}^{\mu}_{x} y(x) = \mathsf{D}^{m} \mathcal{J}^{m-\mu}_{x} y(x) \tag{2.2.11} $$

com $m \leq \mu < m+1$ é chamado operador diferencial fracionário de Riemann-Liouville de ordem μ e $\mathcal{J}^{\nu}_{a}$ definido pela Eq.(2.1.2).

Em palavras, temos, então, a derivada de Riemann-Liouville de ordem não inteira é igual à derivada de ordem inteira de uma integral de ordem não inteira, sendo $\mathcal{J}$ dado pela Eq.(2.1.2).

No caso em que admitimos a função $y(x)$, $m+1$ vezes continuamente diferenciável, a expressão para a derivada de ordem não inteira no sentido de Riemann-Liouville, coincide com a derivada de ordem não inteira no sentido de Grünwald-Letnikov [29].

Exemplo 2.5. *Consideremos a função potência $y(x) = (x-a)^{\nu}$ com $\nu \in \mathbb{R}_{+}$ e $x > a$. Calcular a derivada de Riemann-Liouville da função potência. Começamos, primeiramente, calculando a integral de Riemann-Liouville de ordem $m - \mu$, a partir da* Eq.(2.1.2), *isto é,*

$$ \mathcal{J}^{m-\mu}_{x} (x-a)^{\nu} = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_{a}^{x} (x-\xi)^{m-\mu-1} (x-a)^{\nu} \, \mathrm{d}\xi \cdot $$

A fim de calcular essa integral introduzimos a seguinte mudança de variável $\xi = a + (x-a)t$, logo

$$ \mathcal{J}^{m-\mu}_{x} (x-a)^{\nu} = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} (x-a)^{m-\mu+\nu} \int_{0}^{1} (1-t)^{m-\mu-1} t^{\nu} \, \mathrm{d}t $$

que, expressa em termos da função beta, resulta

$$ \mathcal{J}^{m-\mu}_{x} (x-a)^{\nu} = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} (x-a)^{m-\mu+\nu} B(m-\mu, \nu+1) \cdot $$

Utilizando a relação entre as funções beta e gamma e simplificando, obtemos

$$\mathcal{J}_x^{m-\mu}(x-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(m-\mu+\nu+1)}(x-a)^{m-\mu+\nu}.$$

Vamos calcular a derivada de ordem $m \in \mathbb{N}$ da expressão anterior, logo

$$\begin{aligned} {}_a^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_x^\mu (x-a)^\nu &= \mathsf{D}^m \left\{ \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(m-\mu+\nu+1)}(x-a)^{m-\mu+\nu} \right\} \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(m-\mu+\nu+1)} \frac{\Gamma(m-\mu+\nu+1)}{\Gamma(-\mu+\nu+1)} x^{-\mu+\nu} \end{aligned}$$

que, simplificando, permite escrever

$$ {}_a^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_x^\mu (x-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-\mu+\nu+1)}(x-a)^{-\mu+\nu} \tag{2.2.12}$$

sendo $\mu > 0$ e $m \leq \mu < m+1$.

Como havíamos mencionado, esse resultado é exatamente o mesmo da Eq.(2.2.7), isto é, as derivadas, segundo as formulações de Grünwald-Letnikov e Riemann-Liouville, da função potência, coincidem.

2.2.3 Formulação de Caputo

Definição 2.4. Derivada de Caputo.

Sejam $\mu \in \mathbb{R}_+$ e $m \in \mathbb{N}$. Chama-se operador diferencial fracionário de Caputo de ordem μ, denotado por ${}_a^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^\mu$, tal que

$$ {}_a^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^\mu y(x) = {}_a^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_x^\mu \left[y(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mathsf{D}^k y(a)}{k!}(x-a)^k \right] \tag{2.2.13}$$

desde que o segundo membro exista, e que pode ser escrito, também, na seguinte forma

$$ {}_a^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^\mu y(x) = \mathcal{J}_x^{m-\mu}\mathsf{D}^m y(x) \tag{2.2.14}$$

com $m \leq \mu < m+1$, a chamada derivada fracionária de Caputo.

Em palavras, temos que: a derivada de Caputo de ordem não inteira é igual à integral de ordem não inteira de uma derivada de ordem inteira, sendo $\mathcal{J}_a^\nu$ dado pela Eq.(2.1.2).

Note que, quando a ordem da derivada μ é igual a $m \in \mathbb{N}$, a expressão para a derivada de ordem não inteira de Caputo coincide com a clássica derivada de ordem m, pois $\mathcal{J}_x^0 \equiv I$, é o operador identidade.

Ainda que não explicitemos os cálculos, a derivada fracionária de Caputo da função potência $y(x) = (x-a)^\nu$, com $x > a$ e $\nu \in \mathbb{R}_+$ resulta exatamente na mesma expressão obtida com a derivada de Riemann-Liouville, logo

$$
{}_a^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^{\mu}(x-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-\mu+\nu+1)}(x-a)^{-\mu+\nu} \tag{2.2.15}
$$

pois, como vamos ver a seguir, as duas formulações coincidem se $y(a) = 0$.

Antes de procurarmos uma relação entre as duas formulações, devemos fazer uns comentários em relação a estas definições. As definições de Riemann-Liouville e de Caputo são as chamadas derivadas à esquerda, pois as séries convergem absoluta e uniformemente se y é limitada em $(-\infty, x]$. Podemos, em analogia às definições à esquerda, introduzir as formulações à direita, sendo aqui, a função limitada em $[x, \infty)$, justificando, assim, a importância da escolha da derivada, bem como da função e dos extremos das integrais, como vamos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 2.6. *Seja $\beta > 0$ e a função exponencial $y(x) = e^{\beta x}$. Utilizando a* Eq.(2.2.6) *e calculando as derivadas de ordem inteira, temos*

$$
{}_a\mathsf{D}_x^p e^{\beta x} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\beta^k e^{\beta a}(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^x (x-\xi)^{m-p} \beta^{m+1} e^{\beta\xi}\, \mathrm{d}\xi
$$

onde $p > 0$ é a ordem da derivada. Introduzindo a mudança de variável $\xi = x - t/\beta$ e rearranjando, podemos escrever

$$
{}_a\mathsf{D}_x^p e^{\beta x} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\beta^k e^{\beta a}(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{\beta^p e^{\beta x}}{\Gamma(-p+m+1)} \int_0^{\beta(x-a)} t^{m-p} e^{-t}\, \mathrm{d}t\cdot
$$

Essa é a expressão para a derivada fracionária da função exponencial. Vamos, agora, como já mencionado, escolher um conveniente extremo, isto é, vamos considerar $a = -\infty$. Visto que $\beta > 0$ a primeira parcela da expressão anterior vai a zero, logo devemos calcular a integral

$$
{}_{-\infty}\mathsf{D}_x^p e^{\beta x} = \frac{\beta^p e^{\beta x}}{\Gamma(-p+m+1)} \int_0^{\beta(x-a)} t^{m-p} e^{-t}\, \mathrm{d}t\cdot
$$

A partir da mudança de variável $t = \beta(x-a)\,u$ e utilizando a definição da função gama, obtemos

$$
{}_{-\infty}\mathsf{D}_x^p e^{\beta x} = \beta^p e^{\beta x}
$$

que é o resultado desejado. Note a semelhança com a derivada de ordem inteira da função potência.

2.2.4 Riemann-Liouville × Caputo

Vamos apresentar, como uma aplicação, a relação entre as formulações de Riemann-Liouville e Caputo. Como já mencionamos, quando $y(a) = 0$ as duas formulações coincidem, o que será caracterizado pela expressão envolvendo as duas formulações.

Aplicação 2.1. Relação entre as formulações das derivadas de Riemann-Liouville e Caputo.

Sejam $\mu \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}$. Denotando os operadores de Riemann-Liouville e Caputo, respectivamente, por ${}_a^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_x^{\mu}$ e ${}_a^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^{\mu}$, ambos de ordem μ, mostre que vale a relação

$$ {}_a^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^{\mu} y(x) = {}_a^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_x^{\mu} y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathsf{D}^k y(a)}{\Gamma(k-\mu+1)} (x-a)^{k-\mu}. $$

A partir da definição da derivada de Caputo, devido à linearidade da derivada, podemos escrever

$$ {}_a^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^{\mu} y(x) = {}_a^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_x^{\mu} y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathsf{D}^k y(a)}{k!} \, {}_a^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_x^{\mu} [(x-a)^k]. $$

Calculando a derivada de Riemann-Liouville da função potência, conforme Eq.(2.2.12), substituindo na anterior e simplificando, obtemos

$$ {}_a^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^{\mu} y(x) = {}_a^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_x^{\mu} y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathsf{D}^k y(a)}{\Gamma(k-\mu+1)} (x-a)^{k-\mu} $$

que é exatamente o resultado desejado. Dessa expressão fica claro que, quando $y(a) = 0$ as duas formulações coincidem, pois a segunda parcela no segundo membro é nula.

Antes de tecermos algumas considerações sobre outros tipos de integrais e/ou derivadas fracionárias, vamos apresentar, devido a sua importância, o que é conhecido como propriedade de semigrupo ou lei dos expoentes.

2.2.5 Propriedade de semigrupo ou lei dos expoentes

A propriedade de semigrupo, também conhecida com o nome de lei dos expoentes, desempenha papel importante, por exemplo, para saber se um operador atuando à esquerda (à direita) num outro operador reproduz o mesmo resultado que atuando à direita (à esquerda) ou mesmo saber se um operador diferencial (integral) atuando num operador integral (diferencial) reproduz a própria função em que atua esse produto, isto é, se um é o inverso do outro. Antes de apresentarmos esse resultado, lei dos expoentes, vamos discutir a inversão na ordem de integração num produto de duas integrais, isto é, qual delas devemos integrar primeiro?

Começamos com o particular resultado envolvendo a troca da ordem das integrais cuja prova encontra-se em [38]. Sejam $f(x, y)$ uma função contínua nas variáveis x e y e os parâmetros λ, μ e ν tais que $0 < \lambda \leq 1$, $0 < \mu \leq 1$ e $0 < \nu \leq 1$, então

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \left\{ \int_0^{1-x} x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right\} =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \left\{ \int_0^{1-y} x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1} f(x,y)\, \mathrm{d}x \right\} .$$

A partir dessa expressão, vamos obter a chamada fórmula de Dirichlet que estende o resultado anterior. Para tal, introduzimos as variáveis reais ξ e η definidas pelas relações

$$\begin{aligned} \xi &= a + (b-a)x \\ \eta &= b + (a-b)y \end{aligned}$$

com $a \neq b$, na igualdade anterior e rearranjamos a fim de obter

$$\int_a^b \mathrm{d}\xi \left\{ \int_\xi^b (\xi - a)^{\lambda-1} (b-\eta)^{\mu-1} (\eta - \xi)^{\nu-1} F(\xi,\eta)\, \mathrm{d}\eta \right\} =$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}\eta \left\{ \int_a^\eta (\xi - a)^{\lambda-1} (b-\eta)^{\mu-1} (\eta - \xi)^{\nu-1} F(\xi,\eta)\, \mathrm{d}\xi \right\} \tag{2.2.16}$$

admitindo que a função $F(\xi, \eta)$ seja uma função contínua nas variáveis ξ e η.

A propriedade de semigrupo associada à integral fracionária, à esquerda e à direita, no caso em que as ordens não são inteiras, afirma que

$${}_a\mathcal{J}_\pm^\alpha \, {}_a\mathcal{J}_\pm^\beta \, f(x) = {}_a\mathcal{J}_\pm^{\alpha+\beta} f(x)$$

para constantes reais $\alpha, \beta \geq 0$. Nesta expressão ${}_a\mathcal{J}_+^\alpha \, f(x)$ é definida pela expressão

$${}_a\mathcal{J}_+^\alpha \, f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

com $x > a$, a integral fracionária à esquerda, enquanto ${}_a\mathcal{J}_-^\alpha\, f(x)$, definida pela expressão

$$ {}_a\mathcal{J}_-^\alpha\, f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\xi - x)^{\alpha-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi $$

com $x < b$, a integral fracionária à direita.

Como já mencionamos, no caso em que $a = 0$ a integral é dita integral fracionária no sentido de Riemann enquanto, para $a = -\infty$ é dita integral fracionária no sentido de Liouville. Se não especificarmos o extremo a a integral é chamada de integral fracionária no sentido de Riemann-Liouville, ou simplesmente integral de Riemann-Liouville.

A fim de explicitarmos os cálculos, vamos mostrar a propriedade (lei dos expoentes) apenas para a integral fracionária à esquerda, isto é,

$$ {}_a\mathcal{J}_+^\alpha\, {}_a\mathcal{J}_+^\beta\, f(x) = {}_a\mathcal{J}_+^{\alpha+\beta} f(x) $$

para constantes reais $\alpha, \beta \geq 0$.

Vamos começar com o primeiro membro, escrevendo-o em termos das respectivas expressões para as integrais fracionárias, logo

$$ {}_a\mathcal{J}_+^\alpha\, {}_a\mathcal{J}_+^\beta\, f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-\eta)^{\beta-1} f(\eta)\,\mathrm{d}\eta\cdot \tag{2.2.17} $$

Utilizando a fórmula de Dirichlet Eq.(2.2.16) no particular caso em que $\lambda = 1$ e $F(\xi,\eta)$ é função apenas da variável η, dada por $F(\xi,\eta) = f(\eta)g(\xi)$ com $g(\xi) = 1$, podemos escrever

$$ \int_a^x \mathrm{d}\xi (x-\xi)^{\alpha-1} \int_a^\xi (\xi-\eta)^{\beta-1} f(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \int_a^x f(\eta)\,\mathrm{d}\eta \int_\eta^x (x-\xi)^{\alpha-1}(\xi-\eta)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\xi\cdot $$

Voltando com a expressão anterior na Eq.(2.2.17), obtemos

$$ \begin{aligned} {}_a\mathcal{J}_+^\alpha\, {}_a\mathcal{J}_+^\beta\, f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\eta)\,\mathrm{d}\eta \int_\eta^x \mathrm{d}\xi\,(x-\xi)^{\alpha-1}(\xi-\eta)^{\beta-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\eta)\,\mathrm{d}\eta\ \mathfrak{K}(x,\eta) \end{aligned} $$

onde $\mathfrak{K}(x,\eta)$, interpretado como o núcleo de uma integral de convolução, é dado por

$$ \mathfrak{K}(x,\eta) = \int_\eta^x \mathrm{d}\xi\,(x-\xi)^{\alpha-1}(\xi-\eta)^{\beta-1}. $$

A fim de calcularmos a integral que aparece no núcleo, primeiramente introduzimos a variável, t, definida por

$$t = \frac{\xi - \eta}{x - \eta}$$

de onde podemos escrever

$$\mathfrak{K}(x,\eta) = (x-\eta)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 \mathrm{d}t\,(1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1},$$

que pode ser identificada com a função beta (Apêndice), logo obtemos a expressão para o núcleo

$$\mathfrak{K}(x,\eta) = (x-\eta)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

onde utilizamos a relação entre as funções gama e beta. Enfim, a expressão para o produto de duas integrais fracionárias é dado por

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{J}_+^\alpha\, {}_a\mathcal{J}_+^\beta\, f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\eta)\,\mathrm{d}\eta \left\{ (x-\eta)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(\eta)\,\mathrm{d}\eta (x-\eta)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

Da expressão precedente e da definição de integral fracionária temos

$${}_a\mathcal{J}_+^\alpha\, {}_a\mathcal{J}_+^\beta\, f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-\eta)^{\alpha+\beta-1} f(\eta)\,\mathrm{d}\eta \equiv {}_a\mathcal{J}_+^{\alpha+\beta} f(x)$$

que é o resultado desejado.

2.2.6 Outras formulações de derivadas

Após a introdução da formulação de Caputo [3] podemos, desde então, propor uma classificação para novas derivadas, isto é, aquelas que apresentam a derivada fora da integral, tipo Riemann-Liouville, e aquelas que apresentam a derivada dentro do sinal de integral, tipo Caputo. A partir do início dos anos 1990, outras formulações foram propostas e o número delas não para de crescer [23]. Em 2015 outro tipo de formulação foi apresentada [4] e, a partir desta, uma vasta classe de formulações teve início. Em um recente trabalho [35] foi elaborado um estudo sobre os operadores diferenciais onde foi proposta uma divisão em classes, a saber: F_1: derivadas fracionárias clássicas, isto é, apenas as formulações de Grünwald-Letnikov, de Riemann-Liouville e de Caputo; F_2: derivadas modificadas, aquelas que apresentam uma simples modificação das formulações propostas na classe F_1, contendo um número bastante expressivo de formulações; F_3: operadores locais, ainda que não possam ser considerados fracionários no sentido do critério apresentado em 2015 [27], foram classificados, pois existe uma vasta série de trabalhos que foca em tais operadores e vários resultados têm sido publicados, e F_4: operadores com núcleo não singular, estes também não sendo considerados fracionários conforme o critério já mencionado, porém, também apresentam várias formulações e vários trabalhos continuam sendo publicados. Enfim, é claro que essa classificação não é final, pois podemos pensar em subdividir uma ou mais das formulações classificadas nessas quatro classes.

Ressaltamos que nosso foco é nas derivadas fracionárias clássicas, advindas dos operadores diferenciais de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville e Caputo. Para outras formulações, além dos trabalhos mencionados [23, 35], recomendamos [21] onde é traçada uma linha do tempo desde os primórdios até os dias de hoje; conta com um número grande de exercícios resolvidos e propostos, bem como com uma ampla lista de referências bibliográficas.

2.3 Exercícios propostos

1. Utilizar a formulação de Grünwald-Letnikov para calcular a derivada de ordem 3/2 da função $y(x) = (x-a)^{\frac{5}{2}}$ com $x > a$.

2. Seja $x > 0$. Calcule a integral de ordem meio da função $y(x) = \sqrt{\pi x}$.

3. Em analogia ao anterior para a função $y(x) = e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\cdot$

4. Calcular a integral de ordem $\mu \in \mathbb{R}_+$ para a função $y(x) = (x-a)^\nu$ com $x > a$ e $\nu \in \mathbb{R}_+\cdot$ Discuta os casos $\mu > \nu$, $\mu < \nu$ e $\mu = \nu\cdot$

5. Considere a função $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$ com $x > 0$ e os operadores (integrais) fracionários de ordens $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, conforme Eq.(2.1.2). Justifique a validade da igualdade

$$ {}_0\mathcal{J}_x^\alpha \, {}_0\mathcal{J}_x^\beta y(x) = {}_0\mathcal{J}_x^\beta \, {}_0\mathcal{J}_x^\alpha y(x) $$

a chamada regra de soma dos expoentes para as integrais.

6. Calcular a derivada de ordem meio, através da formulação de Riemann-Liouville, da função $y(x) = \sqrt{\pi x}$ com $x > 0\cdot$

7. Sejam $x > a$, $\nu \in \mathbb{R}_+$. Calcular a derivada de Caputo de ordem μ, tal que $m \leq \mu < m+1$ com $m \in \mathbb{N}$ da função $y(x) = (x-a)^\nu \cdot$

8. Calcular a derivada de ordem $\mu \in \mathbb{R}_+$ da função $y(x) = (x-a)^\nu$ com $x > a$ e $\nu \in \mathbb{R}_+$ através da formulação de Riemann-Liouville.

9. Análogo ao anterior com a formulação de Caputo.

10. Seja $x > 0$. Considere a função $y(x) = \frac{1}{x}$. Justifique se existe a derivada de ordem meio nas formulações de Riemann-Liouville e Caputo.

11. Análogo ao anterior para a função $y(x) = e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot$

12. Considere a função $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$ com $x > 0$ e os operadores (diferenciais) fracionários de ordens $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, conforme Eq.(2.2.11). Justifique a validade da igualdade

$$ {}_0^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_x^\alpha \ \left[{}_0^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_x^\beta y(x)\right] = {}_0^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_x^\beta \ \left[{}_0^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_x^\alpha y(x)\right] $$

a chamada regra de soma dos expoentes associada às derivadas de Riemann-Liouville.

13. Considere a função $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$ com $x > 0$ e os operadores (diferenciais) fracionários de ordens $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, conforme Eq.(2.2.14). Justifique a validade da igualdade

$$ {}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^\alpha \ \left[{}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^\beta y(x)\right] = {}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^\beta \ \left[{}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^\alpha y(x)\right] $$

a chamada regra de soma dos expoentes para as derivadas de Caputo.

14. Sejam $E_\alpha(\cdot)$ e $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ as funções de Mittag-Leffler com um e dois parâmetros, respectivamente. Mostre que

$$ E_{\alpha,2}(x) = \int_0^1 E_\alpha(x\,t^\alpha)\,\mathrm{d}t \cdot $$

15. Sejam $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ e ${}_aI^\mu(\cdot)$ a integral de Riemann-Liouville fracionária. Utilize a definição da função beta e o produto de convolução para mostrar que vale a relação

$$ {}_aI^\alpha\,{}_aI^\beta f(x) = {}_aI^{\alpha+\beta} f(x) $$

a chamada propriedade de semigrupo [2].

16. Sejam $t > 0$ e $\mu > 0$. Mostre a identidade
$$\int_0^t \int_0^\mu x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\mu = \int_0^t \int_t^\mu x(\xi)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\xi\,\cdot$$

17. Utilizando o resultado do exercício anterior, mostre que
$$\int_0^t \int_0^\mu x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\mu = \int_0^t x(\xi)\,\mathrm{d}\xi \int_t^\xi \mathrm{d}\mu\,\cdot$$

18. Sejam m e k constantes positivas. Mostre que a equação diferencial ordinária
$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + k\,x(t) = 0$$
pode ser escrita na forma
$$x(t) = x(0) + t\,x'(0) + \omega^2 \int_0^t \int_0^\mu x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\mu$$
sendo $\omega^2 = k/m$ e $x(0)$ e $x'(0)$ constantes.

19. Mostre que a solução da equação diferencial do exercício anterior pode ser colocada na forma
$$x(t) = x(0) + t\,x'(0) + \omega^2 \int_0^t (t-\xi)x(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
que é uma equação integral.

20. Sejam m e k constantes positivas e $1 < \alpha \leq 2$. Mostre que a equação diferencial fracionária
$$m\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}x(t) + k\,x(t) = 0$$
pode ser escrita como uma equação integral
$$x(t) = x(0) + t\,x'(0) + \frac{\omega^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}x(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\cdot$$

21. Utilizando a transformada de Laplace e o produto de convolução, mostre que a solução da equação diferencial do Exercício 20 é dada por
$$x(t) = x(0)E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha) + x'(0)E_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha)$$
onde $E_\alpha(\cdot)$ e $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ as funções de Mittag-Leffler com um e dois parâmetros, respectivamente [2].

22. Suponha que $f \in C^{n+1}[a,b]$. Mostre que, para todo $n-1<\alpha<n$,

$$^{\mathsf{C}}\mathsf{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\mathsf{D}(a) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{D}f(t)\,\mathrm{d}t\cdot$$

23. Sejam $f \in C^n_{\gamma,\psi}[a,b]$ e $n-1<\alpha<n$. Mostre que

$$I^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}f^{[n-k]}I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a+}f(a).$$

24. Sejam $f,g \in C^n_{\gamma,\psi}[a,b]$ e $\alpha>0$. Mostre que

$$^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = {}^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}_{a+}g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n}c_k\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{\alpha-k}.$$

25. Sejam $f \in C^n_{\gamma,\psi}[a,b]$ e $\alpha>0$. Mostre que

$$^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f(x) = f(x)\cdot$$

26. Seja $n-1<\alpha<n$ com $n\in\mathbb{N}$. Se $f\in C^{m+n}[a,b]$, $m,n\in\mathbb{N}$, então para todo $k\in\mathbb{N}$, temos

$$\left(I^{\alpha}_{a+}\right)^k\left({}^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}_{a+}\right)^m f(x) = \frac{\left({}^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}_{a+}\right)^m f(c)\,(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\cdot$$

27. Seja $f(x)=k$, onde k é uma constante real. Mostre que

$$^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}_{a+}f(x) \neq 0\cdot$$

28. Seja $f(x)=k$, onde k é uma constante real. Mostre que

$$^{\mathsf{C}}\mathsf{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = 0\cdot$$

29. Seja $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha k+1)}\cdot$ Calcule $I^{\alpha}_{a+}f(x)$.

30. Utilizando a mesma função do Exercício 29, calcule as derivadas

$$^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}_{a+}f(x) \qquad \text{e} \qquad {}^{\mathsf{C}}\mathsf{D}^{\alpha}_{a+}f(x)\;\cdot$$

Existe alguma relação entre os resultados obtidos?

Capítulo 3

Aplicações

A importância do cálculo fracionário reside na grande variedade de aplicações. Este texto está direcionado para iniciantes, porém vamos apresentar aplicações, ainda que simples, que não requerem nada além da transformada de Laplace, sua inversa, a função de Mittag-Leffler com três parâmetros, e seus casos particulares.

Antes de apresentarmos aplicações propriamente ditas, vamos mostrar resultados envolvendo a metodologia da transformada integral e as funções especiais, em particular, as funções de Mittag-Leffler, pois serão de grande valia no texto que segue. Enfim, todas as aplicações deste capítulo, ainda que não explicitamente aplicações, serão rotuladas como APLICAÇÃO.

3.1 Transformada de Laplace da função potência

Seja $\mu \in \mathbb{R}$. Calcular a transformada de Laplace da função $f(x) = x^\mu$. Devemos calcular a integral

$$\mathscr{L}[x^\mu] = \int_0^\infty e^{-sx} x^\mu \, \mathrm{d}x$$

com $\mathrm{Re}(s) > 0$. Introduzindo a mudança de variável $sx = \xi$ obtemos

$$\mathscr{L}[x^\mu] = \int_0^\infty e^{-\xi} \left(\frac{\xi}{s}\right)^\mu \frac{\mathrm{d}\xi}{s}$$

que, simplificando, permite escrever

$$\mathscr{L}[x^\mu] = \frac{1}{s^{\mu+1}} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{(\mu+1)-1} \, \mathrm{d}\xi \cdot$$

A integral remanescente nada mais é que a função gama (Apêndice), logo

$$\mathscr{L}[x^\mu] = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}}$$

que, no caso particular em que $\mu = n \in \mathbb{N}$, é dada em termos do fatorial, pois $\Gamma(n+1) = n!$. Dessa expressão podemos escrever para a transformada de Laplace inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\mu+1}}\right] = \frac{x^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\cdot$$

3.2 Transformada de Laplace da clássica função de Mittag-Leffler

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Calcular a transformada de Laplace da clássica função de Mittag-Leffler [1846 – Magnus Gösta Mittag-Leffler – 1927]. A função de Mittag-Leffler é dada em termos da seguinte série [22]

$$E_\alpha(a\,x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a\,x^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$$

de onde segue que devemos calcular a seguinte integral imprópria

$$\mathscr{L}\left[E_\alpha(a\,x^\alpha)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^\infty e^{-sx} x^{\alpha k}\,\mathrm{d}x$$

com $\mathrm{Re}(s) > 0$, onde já permutamos a ordem da integral com o somatório. A integral remanescente nada mais é que a função gama, conforme mostrado na Aplicação 3.1, logo, já simplificando

$$\mathscr{L}\left[E_\alpha(a\,x^\alpha)\right] = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k\cdot$$

Enfim, o somatório resultante para $|a/s^\alpha| < 1$ nada mais é que a série geométrica, logo

$$\mathscr{L}\left[E_\alpha(a\,x^\alpha)\right] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a}$$

de onde segue, pelo teorema da transformada de Laplace inversa, a expressão

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a}\right] = E_\alpha(a\,x^\alpha)\cdot$$

3.3 A função de Prabhakar

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e os parâmetros $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. A função de Prabhakar é dada por

$$\mathscr{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(x^{\alpha}) \equiv z^{\beta-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x^{\alpha}) = x^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{x^{\alpha k}}{k!},$$

sendo $(\rho)_k$ o símbolo de Pochhammer (Apêndice) e $E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x)$ a função de Mittag-Leffler com três parâmetros. Então, a transformada de Laplace da função de Prabhakar é dada por

$$\mathscr{L}\left[\mathscr{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(x^{\alpha})\right] \equiv \mathscr{L}\left[x^{\beta-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(x^{\alpha})\right] = \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{x^{\alpha k}}{k!}\, \mathrm{d}x\cdot$$

Permutando o símbolo de somatório com o de integral e rearranjando, temos

$$\mathscr{L}\left[\mathscr{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(x^{\alpha})\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{\alpha k + \beta - 1}\, \mathrm{d}x\cdot$$

Mais uma vez, a integral resultante nada mais é que a transformada de Laplace da função potência, conforme Aplicação 3.1, e resulta numa função gama, logo

$$\mathscr{L}\left[\mathscr{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(x^{\alpha})\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{s^{\alpha k + \beta}}.$$

Simplificando e utilizando a série do binômio generalizada,

$$(1+z)^{-\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\rho + k)}{\Gamma(\rho) k!} z^k$$

podemos escrever para a transformada de Laplace da função de Prabhakar

$$\mathscr{L}\left[\mathscr{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(x^{\alpha})\right] = \frac{s^{\alpha\rho - \beta}}{(s^{\alpha} - 1)^{\rho}}$$

que, em analogia à clássica função de Mittag-Leffler, permite escrever para a respectiva inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha\rho - \beta}}{(s^{\alpha} - 1)^{\rho}}\right] = \mathscr{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(x^{\alpha})\cdot$$

Tomando $\rho = 1$ obtemos a transformada de Laplace e a respectiva transformada inversa associada à função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, bem como para $\rho = 1 = \beta$ recuperamos o resultado associado à clássica função de Mittag-Leffler, conforme Aplicação 3.2, pois

$$\mathscr{E}^1_{\alpha,1}(x^\alpha) = E_\alpha(x^\alpha)\cdot$$

3.4 O problema da tautócrona

O problema da tautócrona, também chamada curva isocrônica, parece ter sido uma das primeiras, senão a primeira, aplicação do cálculo fracionário. Tal problema, cuja solução foi apresentada por Abel [1802 – Niels Henrick Abel – 1829], consiste em determinar a curva na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar, sem fricção, em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo seja independente de seu ponto de partida. Apenas para mencionar, a clássica solução proposta por Abel utiliza o princípio da conservação de energia: a quantidade total de energia em um sistema isolado permanece constante, ou alternativamente, a soma da energia potencial gravitacional com a energia cinética é constante. Usando o princípio da conservação de energia obtemos uma equação integral que, comparada com a integral fracionária, será resolvida por meio da integral fracionária, ainda que pudesse ser resolvida com a metodologia da transformada de Laplace.

Como a partícula se move sem atrito, sua energia cinética é exatamente igual à diferença entre a energia potencial em seu ponto inicial e a energia potencial no ponto em que se encontra. Considere m a massa do objeto, $v(t)$ sua velocidade no instante t, y_0 a altura em que foi abandonado e $y(t)$ a altura no instante t. Sabe-se que as energias cinética e potencial são dadas, respectivamente, por

$$\frac{1}{2} m\, v^2 \qquad \text{e} \qquad m\, g\, y\cdot$$

Como a partícula está restrita a mover-se sobre a curva, sua velocidade é $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, onde s é a distância medida ao longo da curva. A partir do princípio da conservação de energia pode-se escrever

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = mg(y_0 - y)$$

de onde segue, após uso da regra da cadeia e simplificação,

$$\mathrm{d}t = \pm \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}\cdot$$

Note que na expressão anterior temos que decidir sobre um dos sinais. Então, visto que a função $s(y)$ descreve a distância remanescente na curva em termos da altura remanescente y e como a distância e a altura diminuem à medida que o tempo passa, consideramos apenas o sinal negativo, logo

$$\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2g}}(y - y_0)^{-1/2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y. \tag{3.4.1}$$

Integrando a Eq.(3.4.1) em ambos os lados de y_0 a zero tem-se

$$\tau = t(y_0) = \int_{y_0}^{0}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{y_0}^{0}(y - y_0)^{-1/2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y,$$

ou ainda, na seguinte forma

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{0}^{y_0}(y - y_0)^{-1/2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y \tag{3.4.2}$$

onde τ é o tempo de descida. Esta equação é uma equação integrodiferencial, pois a variável a ser determinada, s, encontra-se no integrando e envolve uma derivação. Aqui, a fim de resolver a equação, como já mencionamos, vamos discutir a solução por meio do cálculo fracionário.

A solução, conforme proposta por Abel, baseia-se na observação de que a integral que emerge da Eq.(3.4.2), exceto pelo fator $1/\Gamma(1/2) = 1/\sqrt{\pi}$ é exatamente a definição de integração fracionária, Eq.(2.1.2), no caso de ordem 1/2. Assim, aplicando o operador derivada de Riemann-Liouville de ordem 1/2 em ambos os lados da equação tem-se

$$\frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}y^{1/2}}\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2g}}\frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}y^{1/2}}\left[\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_{0}^{y_0}(y - y_0)^{-1/2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y\right].$$

Note que o operador derivada fracionária de Riemann-Liouville é o operador inverso à esquerda da integral fracionária. Ainda mais, sabendo que a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem meio é igual a $(\sqrt{\pi\, y})^{-1}$, de onde podemos escrever

$$\frac{\tau}{\sqrt{\pi\, y}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2g}}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\right),$$

ou ainda, na seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} = \frac{\tau\sqrt{2g}}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Observe que a solução via cálculo fracionário aparenta ser mais simples e direta que a solução clássica, isto é, por meio da metodologia da transformada de Laplace, junto ao teorema de convolução. Essa é uma equação diferencial ordinária com variáveis separáveis

$$\mathrm{d}s = \frac{\tau\sqrt{2g}}{\pi} y^{-1/2} \mathrm{d}y$$

de onde segue, após integração,

$$s(y) = \frac{2\tau\sqrt{2g}}{\pi} y^{1/2}.$$

Apenas para mencionar, o problema da chamada tautócrona relativista foi discutida em [10].

3.5 Função de Mittag-Leffler e a trigonometria

Expressar a clássica função de Mittag-Leffler, $E_2(-x^2)$ e a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, $E_{2,2}(-x^2)$ em termos de funções trigonométricas. Da definição da clássica função de Mittag-Leffler podemos escrever

$$E_2(-x^2) = \sum_{k=0} \frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x \cdot$$

Por outro lado, da definição da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, temos

$$E_{2,2}(-x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2k+2)}$$

que, multiplicando e dividindo por x permite escrever

$$E_{2,2}(-x^2) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

onde, nos dois casos, utilizamos as expansões em série de Maclaurin [1698 – Colin Maclaurin – 1746], ora para cosseno e ora para seno.

Mencionamos, também, que a partir da definição da clássica função de Mittag-Leffler, podemos escrever

$$E_1(-x) = e^{-x}$$

enquanto, a partir da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, temos

$$E_{1,2}(-x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} \cdot$$

3.6 Transformada de Laplace da integral de Riemann-Liouville

Sejam $y(x)$ definida para todo $x > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Mostrar que a transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem μ da função $y(x)$ é

$$\mathscr{L}[\mathcal{J}^{\mu} y(x)] = \frac{\mathscr{L}[y(x)]}{s^{\mu}}.$$

A integral fracionária é dada por meio de um produto de convolução, conforme Eq.(2.1.2). Tomando a transformada de Laplace temos

$$\mathscr{L}[\mathcal{J}^{\mu} y(x)] = \mathscr{L}[\phi_{\mu} * y(x)] = \mathscr{L}[\phi_{\mu}(x)]\mathscr{L}[y(x)]$$

onde $*$ denota o produto de convolução e $\phi_{\mu}(t)$ é a função de Gelfand-Shilov [1913 – Israïl Moiseevich Gelfand – 2009]-[1917 – Georgiy Evegen'evich Shilov – 1975], conforme Eq.(A.4).

Visto que a transformada de Laplace da função de Gelfand-Shilov é conhecida, temos

$$\mathscr{L}[\mathcal{J}^{\mu} y(x)] = \frac{\mathscr{L}[y(x)]}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-sx} \, \mathrm{d}x$$

onde s é o parâmetro da transformada de Laplace.

A fim de calcular a integral resultante, introduzimos a mudança de variável $\xi = sx$ e usamos a definição da função gama, logo

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-sx} \, \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\mu)}{s^{\mu}}$$

de onde, substituindo na anterior e já simplificando, obtemos o resultado desejado

$$\mathscr{L}[\mathcal{J}^{\mu} y(x)] = \frac{\mathscr{L}[y(x)]}{\Gamma(\mu)} \frac{\Gamma(\mu)}{s^{\mu}} = \frac{\mathscr{L}[y(x)]}{s^{\mu}}.$$

3.7 Transformada de Laplace da derivada de Caputo

Sejam $\mathrm{Re}(\mu) > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $n - 1 < \mathrm{Re}(\mu) \leq n$. Vamos mostrar que a transformada de Laplace da derivada de Caputo de ordem μ da função $y(x)$ é dada pela expressão

$$\mathscr{L}[{}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}^{\mu} y(x)] = s^{\mu} \mathscr{L}[y(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\mu-1-k} y^{(k)}(0^{+})$$

onde temos s o parâmetro da transformada e a notação $y^{(k)}(0^+) = \lim_{x\to 0} {}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}^k y(x)$ para a derivada de ordem k de $y(x)$, calculada para $x \to 0^+$.

Tomando a transformada de Laplace da expressão que fornece a derivada de Caputo em termos da integral fracionária conforme Eq.(2.2.14), obtemos

$$\mathscr{L}[{}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}^\mu y(x)] = \mathscr{L}[\mathcal{J}^{n-\mu}\mathsf{D}^n y(x)]\cdot$$

Introduzindo a notação $g(x) = \mathsf{D}^n y(x)$ e substituindo na expressão anterior, temos

$$\mathscr{L}[{}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}^\mu y(x)] = \mathscr{L}[\mathcal{J}^{n-\mu} g(x)]$$

que, a partir do resultado da Aplicação 3.6, fornece

$$\mathscr{L}[{}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}^\mu y(x)] = \frac{\mathscr{L}[g(x)]}{s^{n-\mu}}\cdot$$

Para calcular a transformada de Laplace da função $g(x)$, utilizamos a expressão da transformada de Laplace da derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$, logo

$$\mathscr{L}[g(x)] = \mathscr{L}[\mathsf{D}^n y(x)] = s^n \mathscr{L}[y(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y^{(k)}(0^+)\cdot$$

A partir dos dois últimos resultados obtemos a transformada de Laplace da derivada de Caputo

$$\mathscr{L}[{}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}^\mu y(x)] = \frac{1}{s^{n-\mu}}\left(s^n \mathscr{L}[y(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y^{(k)}(0^+)\right)$$

que, simplificando, fornece

$$\mathscr{L}[{}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}^\mu y(x)] = s^\mu \mathscr{L}[y(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\mu-k-1} y^{(k)}(0^+)\cdot$$

Substituindo $n = 1$ na expressão anterior, podemos escrever

$$\mathscr{L}[{}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}^\mu y(x)] = s^\mu \mathscr{L}[y(x)] - s^{\mu-1} y(0^+) \tag{3.7.3}$$

enquanto, para $n = 2$, vale a expressão

$$\mathscr{L}[{}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}^\mu y(x)] = s^\mu \mathscr{L}[y(x)] - s^{\mu-1} y(0^+) - s^{\mu-2} y'(0^+) \tag{3.7.4}$$

onde a linha denota a derivada em relação à variável x calculada em $x = 0^+$.

3.8 Transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville

Sejam ${}^{\mathsf{RL}}_{0}\mathsf{D}^{\mu}_{x}y(x)$ a derivada fracionária de Riemann-Liouville e $n-1<\mu\leq n$ com $n\in\mathbb{N}$. Mostrar que a transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville é dada por

$$\mathscr{L}\left[{}^{\mathsf{RL}}_{0}\mathsf{D}^{\mu}_{x}y(x)\right]=s^{\mu}\mathscr{L}[y(x)]-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}g^{(k)}(0^{+})$$

sendo s o parâmetro da transformada e introduzimos a notação

$$g^{(k)}(0^{+})=\lim_{x\to 0^{+}}\mathsf{D}^{k}g(x)\quad\text{com}\quad g(x)=\mathcal{J}^{n-\mu}y(x)\cdot$$

Obtenha as expressões nos casos em que $n=1$ e $n=2$.

Tomando a transformada de Laplace da Eq.(2.2.11) podemos escrever

$$\mathscr{L}\left[{}^{\mathsf{RL}}_{0}\mathsf{D}^{\mu}_{x}y(x)\right]=\mathscr{L}\left[\mathsf{D}^{n}\mathcal{J}^{n-\mu}y(x)\right]=\mathscr{L}[\mathsf{D}^{n}g(x)]$$

onde $g(x)=\mathcal{J}^{n-\mu}y(x)$. Utilizando a expressão para a derivada de ordem n da função $g(x)$

$$\mathscr{L}[\mathsf{D}^{n}g(x)]=s^{n}\mathscr{L}[g(x)]-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}g^{(k)}(0^{+})$$

onde $g^{(k)}(0^{+})=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\mathcal{J}^{n-\mu}y(0^{+})$ e o resultado da Aplicação 3.6

$$\mathscr{L}[g(x)]=\mathscr{L}[\mathcal{J}^{n-\mu}y(x)]=\frac{\mathscr{L}[y(x)]}{s^{n-\mu}}$$

podemos escrever para a transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville,

$$\mathscr{L}\left[{}^{\mathsf{RL}}_{0}\mathsf{D}^{\mu}_{x}y(x)\right]=s^{\mu}\mathscr{L}[y(x)]-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}g^{(k)}(0^{+})$$

onde $g^{(k)}(0^{+})=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\mathcal{J}^{n-\mu}y(0^{+})$

No caso particular em que $n=1$ e $0<\mu\leq 1$ obtemos, diretamente da expressão anterior,

$$\mathscr{L}\left[{}^{\mathsf{RL}}_{0}\mathsf{D}^{\mu}_{x}y(x)\right]=s^{\mu}\mathscr{L}[y(x)]-g(0^{+})\tag{3.8.5}$$

onde

$$g(0) = \lim_{x\to 0^+} \mathcal{J}^{1-\mu} y(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[{}^{\mathsf{RL}}_{0}\mathsf{D}^{\mu-1}_{x} y(x) \right]$$

enquanto no caso $n = 2$ temos $1 < \mu \leq 2$, logo

$$\mathscr{L}\left[{}^{\mathsf{RL}}_{0}\mathsf{D}^{\mu}_{x} y(x) \right] = s^{\mu}\mathscr{L}[y(x)] - sg(0^+) - g'(0^+) \tag{3.8.6}$$

sendo $g(0)$ como na expressão anterior e

$$g'(0) = \lim_{x\to 0^+} \mathcal{J}^{2-\mu} y(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[{}^{\mathsf{RL}}_{0}\mathsf{D}^{\mu-2}_{x} y(x) \right]$$

onde a linha denota derivada em relação à variável x calculada em $x \to 0^+$.

Façamos um breve comentário sobre as expressões para a transformada de Laplace das derivadas de Caputo e Riemann-Liouville. Primeiramente, no caso em que as condições (função e suas derivadas) no ponto 0^+ são zero, as duas transformadas de Laplace coincidem. Por outro lado, quando isso não ocorre, a transformada de Laplace da derivada de Caputo contém derivadas de ordens inteiras enquanto a transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville contém derivadas de ordens não inteiras, ambas calculadas no ponto 0^+. Por esse motivo, em muitas das aplicações, opta-se, sempre que possível, pela formulação de Caputo, pois as derivadas de ordens inteiras apresentam interpretações bem conhecidas, em contraste com as derivadas de ordens não inteiras.

Ainda mais, tenhamos em mente que, neste trabalho introdutório, não estamos preocupados com as equações diferenciais, integrais e integrodiferenciais, propriamente ditas, isto é, simplesmente escrevemos a particular equação que descreve o problema a fim de, exclusivamente, considerar a sua derivada fracionária, seja ela no sentido de Riemann-Liouville, Eq.(2.2.11), ou Caputo, Eq.(2.2.14), bem como a transformada de Laplace, ambas com expressões conhecidas Eq.(3.7.4) e Eq.(3.8.6).

3.9 Equação diferencial de ordem μ com o parâmetro $0 < \mu \leq 1$

Sejam $y(x)$ uma função contínua, $y(0) = y_0$ uma constante e μ um parâmetro tal que $0 < \mu \leq 1$. Resolver a equação diferencial fracionária de ordem μ

$$\frac{\mathrm{d}^{\mu}}{\mathrm{d}x^{\mu}} y(x) = -k\, y(x)$$

sendo k uma constante positiva e a derivada sendo considerada no sentido de Caputo. Mencionamos que tal equação, para $\mu = 1$ está relacionada com o decaimento radioativo, logo podemos interpretar a equação diferencial, neste caso, como sendo a equação diferencial fracionária descrevendo o decaimento radioativo fracionário. Ainda com $\mu = 1$ e com $k < 0$ esta equação está associada ao crescimento populacional, logo também, podemos inferir, neste caso, sobre uma equação diferencial fracionária que descreve o crescimento populacional fracionário. Então, sendo assim, vamos trabalhar com a equação diferencial contendo os dois casos, isto é,

$$\frac{\mathrm{d}^\mu}{\mathrm{d}x^\mu} y(x) = \mp k\, y(x)$$

satisfazendo a condição $y(0) = y_0$. Tomando a transformada de Laplace de ambos os membros, temos

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^\mu}{\mathrm{d}x^\mu} y(x)\right] = \mp k \mathscr{L}[y(x)]$$

que, utilizando o resultado da Eq.(3.7.3), permite escrever a equação algébrica

$$s^\mu F(s) - s^{\mu-1} y(0) = \mp k F(s)$$

onde $F(s)$ é a transformada de Laplace de $y(x)$ com parâmetro s, cuja solução é dada por

$$F(s) = y_0 \frac{s^{\mu-1}}{s^\mu \pm k}\cdot$$

Devemos agora proceder com a inversão da transformada de Laplace. A partir do resultado obtido na Aplicação 3.2, podemos escrever

$$y(x) = y_0 E_\mu(\mp k x^\mu)$$

sendo $E_\mu(\cdot)$ a clássica função de Mittag-Leffler. Apenas para mencionar, o caso $\mu = 1$ é recuperado, isto é, a solução para a equação diferencial ordinária associada ao decaimento radioativo e, em completa analogia, também a solução do problema associado ao crescimento populacional.

3.10 Equação diferencial de ordem μ com o parâmetro $1 < \mu \leq 2$

Sejam $y(x)$ uma função contínua, $y(0) = A$ e $y'(0) = B$ duas constantes positivas e μ um parâmetro tal que $1 < \mu \leq 2$. Resolver a equação diferencial fracionária de ordem μ

$$\frac{\mathrm{d}^\mu}{\mathrm{d}x^\mu} y(x) = -k\, y(x)$$

sendo k uma constante positiva e a derivada sendo considerada no sentido de Caputo. Tomando a transformada de Laplace de ambos os membros da equação diferencial fracionária temos

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^\mu}{\mathrm{d}x^\mu}y(x)\right] = -k\mathscr{L}[y(x)]$$

que, utilizando o resultado da Eq.(3.7.4), permite escrever a equação algébrica, já substituindo as condições na função e na derivada de ordem inteira (derivada primeira)

$$s^\mu F(s) - A\, s^{\mu-1} - B\, s^{\mu-2} = -kF(s)$$

onde $F(s)$ é a transformada de Laplace de $y(x)$ com parâmetro s. A solução dessa equação é dada por

$$F(s) = A\frac{s^{\mu-1}}{s^\mu + k} + B\frac{s^{\mu-2}}{s^\mu + k}\cdot$$

A fim de proceder com a inversão da transformada, usamos o resultado obtido na Aplicação 3.2, de onde segue para a solução do problema (equação diferencial e condições)

$$y(x) = A\, E_\mu(-kx^\mu) + B\, E_{\mu,2}(-kx^\mu)$$

com $E_\mu(\cdot)$ a clássica função de Mittag-Leffler e $E_{\mu,2}(\cdot)$ a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros.

Aqui, também vamos fazer um simples comentário relativo a uma possível aplicação num problema real. No caso em que $\mu = 2$ recuperamos o resultado do oscilador harmônico livre e, por extensão de linguagem, dizemos que a solução obtida é a solução da equação diferencial fracionária descrevendo o oscilador harmônico fracionário. No caso em que temos um termo de derivada de ordem um, resulta na equação associada com o oscilador amortecido e podemos obter uma relação entre o coeficiente de amortecimento e o parâmetro que indica a ordem da equação diferencial fracionária [21]. Enfim, no particular caso em que $\mu = 1$, ordem inteira, podemos explicitar a solução em termos das funções trigonométricas, conforme Aplicação 3.5.

3.11 Derivada de uma constante. Riemann-Liouville × Caputo

Calcular a derivada fracionária nos sentidos de Riemann-Liouville e Caputo, ambas de ordem μ, de uma constante, digamos $y(x) = 1$. Visto que as duas formulações envolvem a integral fracionária de Riemann-Liouville, começamos por calculá-la a partir da Eq.(2.1.2), logo

$$\mathcal{J}^{\mu}[1] = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-\tau)^{\mu-1} \cdot 1 \cdot \mathrm{d}\tau = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)}\cdot$$

Agora, para a derivada fracionária de Riemann-Liouville utilizando a Eq.(2.2.11), temos

$${}^{\mathsf{RL}}_{\;0}\mathsf{D}^{\mu}_{x}[1] = \mathsf{D}^{m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^x (x-\tau)^{m-\mu-1} \cdot 1 \cdot \mathrm{d}\tau \right\}$$

sendo $m \leq \mu < m+1$ com $m \in \mathbb{N}$. A integral resultante é exatamente a integral fracionária, logo

$${}^{\mathsf{RL}}_{\;0}\mathsf{D}^{\mu}_{x}[1] = \mathsf{D}^{m} \left[\frac{x^{m-\mu}}{\Gamma(m-\mu+1)} \right]$$

que, calculando a derivada de ordem inteira m, permite escrever

$${}^{\mathsf{RL}}_{\;0}\mathsf{D}^{\mu}_{x}[1] = \frac{1}{\Gamma(m-\mu+1)} \frac{\Gamma(m-\mu+1)}{\Gamma(-m+m-\mu+1)} x^{-m+m-\mu}$$

que, simplificando, fornece o resultado

$${}^{\mathsf{RL}}_{\;0}\mathsf{D}^{\mu}_{x}[1] = \frac{x^{-\mu}}{\Gamma(1-\mu)}$$

de onde segue que a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma constante não é zero, como já mencionado.

Por outro lado, para a derivada fracionária de Caputo, a partir da Eq.(2.2.14), podemos escrever

$${}^{\mathsf{C}}_{0}\mathsf{D}^{\mu}_{x}[1] = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^x (x-\tau)^{\mu-1} \cdot \mathsf{D}^{m}[1] \cdot \mathrm{d}\tau\cdot$$

Visto que a derivada de ordem inteira de uma constante é zero, segue que a derivada fracionária de Caputo de uma constante também é zero, isto é,

$${}^{\mathsf{C}}_{0}\mathsf{D}^{\mu}_{x}[1] = 0\cdot$$

3.12 Problema de valor inicial fracionário

Obter a solução para o problema de valor inicial fracionário composto pela equação diferencial fracionária não homogênea

$${}^{\mathsf{C}}_{0}\mathsf{D}^{\mu}_{x} y(x) - \lambda y(x) = f(x),$$

para $x > 0$, $0 < \mu < 1$, λ uma constante e as funções $y(x)$ e $f(x)$ admitidas contínuas, bem como satisfazendo a condição inicial

$$ {}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^{\mu-1} y(x)\Big|_{x=0} = a $$

sendo a uma constante. Utilizando a metodologia da transformada de Laplace, isto é, tomando a transformada de Laplace de ambos os membros da equação diferencial fracionária e utilizando a Eq.(3.8.5) podemos escrever a equação algébrica

$$ s^\mu G(s) - \lambda G(s) = F(s) + a $$

sendo $G(s)$ e $F(s)$ as transformadas de Laplace de $y(x)$ e $f(x)$, respectivamente, ambas com parâmetro s. A solução da equação algébrica é dada por

$$ G(s) = \frac{F(s)}{s^\mu - \lambda} + \frac{a}{s^\mu - \lambda}\cdot $$

Para recuperar a solução do problema de valor inicial, devemos proceder com a inversão da transformada de Laplace. Da linearidade da transformada inversa obtemos

$$ y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^\mu - \lambda}\right] + a\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\mu - \lambda}\right]\cdot $$

Para a primeira parcela utilizamos o produto de convolução de Laplace enquanto para a segunda parcela utilizamos o resultado da Aplicação 3.3, logo, podemos escrever

$$ y(x) = a\, x^{\mu-1} E_{\mu,\mu}(\lambda x^\mu) + \int_0^x (x-\xi)^{\mu-1} E_{\mu,\mu}[\lambda(x-\xi)^\mu]\, f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \qquad (3.12.7) $$

onde $E_{\mu,\mu}(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros. É importante notar que a primeira parcela da solução não depende do termo de não homogeneidade, pois é independente de $f(x)$. Esse termo independente do segundo membro às vezes é chamado de função de Green e desempenha papel fundamental na resolução de problemas não homogêneos. Neste caso, conhecida a função de Green o problema não homogêneo fica resolvido a menos de uma integração. Esse problema pode ser estendido para o caso geral onde temos uma equação diferencial fracionária com n termos [29].

3.13 Problema de valor inicial fracionário. Caso particular

Utilizando os dados da APLICAÇÃO 3.12, resolva o problema de valor inicial fracionário considerando $f(x) = x$. Recupere a solução do caso inteiro, isto é, $\mu = 1$. Primeiramente, substituímos $f(x) = x$ na Eq.(3.12.7), logo

$$y(x) = a\,x^{\mu-1}E_{\mu,\mu}(\lambda x^{\mu}) + \int_0^x (x-\xi)^{\mu-1}E_{\mu,\mu}[\lambda(x-\xi)^{\mu}]\,\xi\,\mathrm{d}\xi\cdot$$

A fim de calcular a integral remanescente, introduzimos a representação em série para a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros e permutamos a ordem do somatório com a integral, de onde segue a expressão

$$y(x) = a\,x^{\mu-1}E_{\mu,\mu}(\lambda x^{\mu}) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu k+\mu)}\int_0^x (x-\xi)^{\mu-1}(x-\xi)^{\mu k}\,\xi\,\mathrm{d}\xi\cdot$$

Introduzindo a mudança de variável $\xi = xt$ e simplificando, obtemos

$$y(x) = a\,x^{\mu-1}E_{\mu,\mu}(\lambda x^{\mu}) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu k+\mu)}x^{\mu+\mu k+1}\int_0^1 (1-t)^{\mu+\mu k-1}\,t\,\mathrm{d}t$$

que, fazendo uso da definição da função beta (Apêndice), permite escrever

$$y(x) = a\,x^{\mu-1}E_{\mu,\mu}(\lambda x^{\mu}) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu k+\mu)}x^{\mu+\mu k+1}B(\mu+\mu k,2)$$

ou ainda, utilizando a relação entre as funções beta e gama, na seguinte forma

$$y(x) = a\,x^{\mu-1}E_{\mu,\mu}(\lambda x^{\mu}) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu k+\mu)}x^{\mu+\mu k+1}\frac{\Gamma(\mu+\mu k)\Gamma(2)}{\Gamma(\mu+\mu k+2)}$$

que, simplificando, fornece

$$y(x) = a\,x^{\mu-1}E_{\mu,\mu}(\lambda x^{\mu}) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu k+\mu+2)}x^{\mu+\mu k+1}.$$

Com a expansão da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, temos

$$y(x) = a\,x^{\mu-1}E_{\mu,\mu}(\lambda x^{\mu}) + x^{\mu+1}E_{\mu,\mu+2}(\lambda x^{\mu})$$

que é o resultado desejado.

Para o caso inteiro, substituímos $\mu = 1$ na expressão anterior, logo

$$y(x) = a\, e^{\lambda x} + x^2 E_{1,3}(\lambda x).$$

A fim de simplificar vamos, primeiramente, expressar a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros em termos da exponencial, ou seja, temos

$$E_{1,3}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+2)!}.$$

Multiplicando e dividindo por x^2 podemos escrever

$$E_{1,3}(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!}$$

que, com a mudança de índice $k \to k-2$ fornece

$$E_{1,3}(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Enfim, somando e subtraindo $(1+x)$ e utilizando a expansão em série da exponencial, obtemos

$$x^2 E_{1,3}(x) = e^x - x - 1,$$

de onde segue para a solução do problema de valor inicial com $\mu = 1$

$$y(x) = \left(a + \frac{1}{\lambda^2}\right) e^{\lambda x} - \left(\frac{\lambda x + 1}{\lambda^2}\right).$$

3.14 Equação integrodiferencial fracionária

Sejam $0 < \mu \leq 1$ e $y(x)$ uma função contínua. Utilize a metodologia da transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial composto pela equação integrodiferencial

$${}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^{\mu} y(x) = 1 - \int_0^x y(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

satisfazendo a condição inicial $y(0) = 0$. Discuta o caso particular $\mu = 1$. Note que a variável dependente encontra-se tanto no integrando quanto na derivada de onde emerge o nome equação integrodiferencial. Tomando a transformada de Laplace de ambos os membros da equação integrodiferencial e usando a linearidade da transformada, temos

$$\mathscr{L}\left[{}_0^{\mathsf{C}}\mathsf{D}_x^{\mu} y(x)\right] = \mathscr{L}[1] - \mathscr{L}\left[\int_0^x y(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]$$

que, utilizando a Eq.(3.7.3) e o teorema de convolução, pode ser escrita na seguinte forma

$$s^{\mu}F(s) - s^{\mu-1}y(0) = \frac{1}{s} - \frac{F(s)}{s}$$

onde s é o parâmetro da transformada e $F(s) = \mathscr{L}[y(x)]$. Utilizando a condição inicial e resolvendo a equação algébrica, obtemos

$$F(s) = \frac{1}{s^{\mu+1}+1}\cdot$$

Devemos agora proceder com a inversão da transformada de Laplace. A partir da Aplicação 3.3 podemos escrever

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\mu+1}+1}\right] = x^{\mu}E_{\mu+1,\mu+1}(-x^{\mu+1})$$

onde $E_{\nu,\nu}(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros. Para o caso particular, substituímos $\mu = 1$ na expressão anterior de modo a obter

$$y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = x\,E_{2,2}(-x^2)$$

ou ainda, utilizando o resultado da Aplicação 3.5, na forma

$$y(x) = x\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \operatorname{sen} x$$

que é a solução do problema de valor inicial com derivada de ordem inteira.

3.15 Equação integral

Sejam $0 < \mu < 1$, k uma constante positiva e $y(x)$ uma função contínua. Resolva a equação integral

$$\int_0^x (x-\xi)^{\mu} y(\xi)\,\mathrm{d}\xi = k\cdot$$

Note que a variável dependente encontra-se no integrando, daí o nome equação integral. Tomando a transformada de Laplace de ambos os membros da equação e utilizando a definição do produto de convolução de Laplace, temos

$$\mathscr{L}[x^\mu]F(s) = \frac{k}{s}$$

onde s é o parâmetro da transformada e $F(s) = \mathscr{L}[y(x)]$. Utilizando a Aplicação 3.1 obtemos

$$\frac{\Gamma(1+\mu)}{s^{1+\mu}}F(s) = \frac{k}{s}$$

de onde segue, resolvendo para $F(s)$,

$$F(s) = k\frac{s^\mu}{\Gamma(1+\mu)}\cdot$$

Procedendo com a inversão da transformada de Laplace, podemos escrever

$$y(x) = \frac{k}{\Gamma(\mu+1)}\frac{x^{-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)}$$

ou, utilizando a fórmula de reflexão entre as funções gama (Apêndice), na forma, já simplificando

$$y(x) = -\frac{k}{\pi}\frac{\operatorname{sen}\pi\mu}{x^{\mu+1}}$$

que é a solução da equação integral.

3.16 Efeito de memória

Diferentemente da derivada de ordem inteira, a derivada fracionária é um operador não local, o que acarreta no chamado efeito de memória que, como vamos abordar a seguir, carrega consigo o ocorrido no passado. Em outras palavras, há uma dependência de tempos anteriores ao tempo considerado inicial. Aqui, pela simplicidade, vamos discutir o efeito de memória para um particular problema de valor inicial, composto pela equação diferencial ordinária fracionária

$$\mathsf{D}^\mu y(x) = f(x)$$

com $0 < \mu \leq 1$, satisfazendo a condição inicial $y(0) = 0$. O caso geral pode ser encontrado em [7].

Utilizando a metodologia da transformada de Laplace obtemos para a solução do problema de valor inicial (note que é exatamente o operador integral fracionário, como era de se esperar, pois é o inverso da derivada fracionária)

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-\xi)^{\mu-1} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

onde foi usado o produto de convolução de Laplace. Vamos considerar dois valores distintos x_1 e x_2 tais que, sem perda de generalidade, $x_1 < x_2$. Separando em dois intervalos obtemos

$$y(x_2) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{x_2} (x_2-\xi)^{\mu-1} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

e

$$y(x_1) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{x_1} (x_1-\xi)^{\mu-1} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

cuja diferença $y(x_2) - y(x_1)$ permite escrever

$$y(x_2) - y(x_1) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{x_2} (x_2-\xi)^{\mu-1} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi - \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{x_1} (x_1-\xi)^{\mu-1} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

que, rearranjando, pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} y(x_2) - y(x_1) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{x_1} [(x_2-\xi)^{\mu-1} - (x_1-\xi)^{\mu-1}] f(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \\ & \qquad \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{x_1}^{x_2} (x_2-\xi)^{\mu-1} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{3.16.8}$$

visto que $x_1 < x_2$. Façamos uma análise da Eq.(3.16.8). A primeira integral envolve valores anteriores a x_1, enquanto a segunda integral apenas valores entre x_1 e x_2. Segue que, para todos os valores de $\mu \neq 1$, as duas parcelas contribuem, enquanto no caso $\mu = 1$, caso da derivada de ordem inteira, apenas a segunda parcela contribui. Nesse caso, não há dependência do valor da primeira integral de onde conclui-se que equações de ordem inteira modelam sistemas sem memória. Por outro lado, no caso em que $0 < \mu < 1$ a primeira parcela também contribui, isto é, há dependência das duas parcelas, logo equações de ordem não inteira modelam sistemas com memória. Em outras palavras, tem-se um efeito de memória relativo à integral no intervalo de zero a x_1, antes de (no passado) x_1.

3.17 Sistema de equações fracionárias

Sejam $0 < \mu \leq 1$ e $0 < \nu \leq 1$ e $y(x)$ e $z(x)$ funções contínuas. Resolva o sistema de equações diferenciais fracionárias com coeficientes constantes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{D}^{\mu} y(x) & = & -a\, z(x) \\ \mathsf{D}^{\nu} z(x) & = & a\, y(x) \end{array} \right.$$

sendo a uma constante positiva, satisfazendo as condições $y(0) = 1 = z(0)$. Discuta o particular caso $\mu = 1 = \nu$. Vamos, aqui também, fazer uso da metodologia da transformada de Laplace, isto é, tomando a transformada de Laplace nas duas equações e usando a Eq.(3.7.3), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s^{\mu} F(s) - s^{\mu-1} y(0) & = & -G(s) \\ s^{\nu} G(s) - s^{\nu-1} z(0) & = & F(s) \end{array} \right.$$

sendo s o parâmetro das transformadas, $F(s) = \mathscr{L}[y(x)]$ e $G(s) = \mathscr{L}[z(x)]$.

Utilizando as condições iniciais, isolando $G(s)$ na primeira equação, substituindo na segunda equação e rearranjando, obtemos a equação algébrica

$$-s^{\mu+\nu} F(s) + s^{\mu+\nu-1} - s^{\nu-1} = F(s)$$

com solução dada por

$$F(s) = \frac{s^{\mu+\nu-1}}{s^{\mu+\nu} + 1} - \frac{s^{\nu-1}}{s^{\mu+\nu} + 1}.$$

Substituindo $F(s)$ na primeira das equações e simplificando, obtemos, em analogia a $F(s)$

$$G(s) = \frac{s^{\mu+\nu-1}}{s^{\mu+\nu} + 1} + \frac{s^{\mu-1}}{s^{\mu+\nu} + 1}.$$

Devemos agora, proceder com a transformada de Laplace inversa. Utilizando a linearidade da transformada de Laplace e o resultado da Aplicação 3.3 temos

$$y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\mu+\nu-1}}{s^{\mu+\nu} + 1}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\nu-1}}{s^{\mu+\nu} + 1}\right]$$

ou ainda, na seguinte forma

$$y(x) = E_{\mu+\nu}(-x^{\mu+\nu}) - x^{\mu} E_{\mu+\nu,\mu+1}(-x^{\mu+\nu})$$

onde $E_{\mu}(\cdot)$ é a clássica função de Mittag-Leffler e $E_{\mu,\nu}(\cdot)$ a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros. Em completa analogia ao procedimento para obter $y(x)$, podemos escrever

$$z(x) = E_{\mu+\nu}(-x^{\mu+\nu}) + x^{\nu} E_{\mu+\nu,\nu+1}(-x^{\mu+\nu}).$$

No particular caso $\mu = 1 = \nu$, substituímos esses valores nas expressões para $y(x)$ e $z(x)$, logo

$$y(x) = E_2(-x^2) - x\,E_{2,2}(-x^2) \qquad \text{e} \qquad z(x) = E_2(-x^2) + x\,E_{2,2}(-x^2)\cdot$$

Podemos simplificar as duas soluções, expressando-as em termos de funções trigonométricas. Para tal, utilizando o resultado da Aplicação 3.5 temos

$$y(x) = \cos ax - \operatorname{sen} ax \qquad \text{e} \qquad z(x) = \cos ax + \operatorname{sen} ax$$

que representa a solução do sistema de equações com a derivada de ordem um, isto é, ordem inteira.

3.18 Modelo de Cole-Cole

As propriedades de materiais dielétricos podem ser representadas pelas chamadas funções de susceptibilidade, obtidas de modo empírico a partir do clássico modelo de Debye [6]. Esse modelo clássico foi aperfeiçoado por vários outros, dentre eles o modelo de Cole-Cole [5]. Por meio do formalismo de Mori-Zwanzig [18, 39] é possível deduzir as respectivas equações cinéticas cuja solução é uma função de susceptibilidade [32]. Discuta a equação diferencial fracionária associada ao modelo de Cole-Cole que generaliza o clássico modelo de Debye. Recupere o caso clássico por meio de um conveniente caso limite. A equação diferencial fracionária é dada por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) + \frac{1}{\sigma^\mu}\,{}^{\mathsf{RL}}_{\;\;0}\mathsf{D}_t^{1-\mu}\varphi(t) = 0 \tag{3.18.9}$$

com ${}^{\mathsf{RL}}_{\;\;0}\mathsf{D}_t^{1-\mu}$ o operador derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville dado pela Eq.(2.2.11) e $0 < \mu \leq 1$. $\varphi(t)$ é a chamada função de relaxação e σ é uma constante positiva associada ao tempo de relaxação, característica do dipolo [14, 24].

Vamos utilizar a metodologia da transformada de Laplace. Tomando a transformada de Laplace de ambos os membros da Eq.(3.18.9), usando o teorema de convolução associado à transformada de Laplace bem como o resultado da Aplicação 3.8, podemos escrever para a solução

$$\varphi(t) = E_\mu\left[-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\mu\right]$$

sendo $E_\alpha(\cdot)$ a clássica função de Mittag-Leffler. No particular caso limite, $\mu = 1$, recuperamos a função conforme proposta por Debye, com decaimento exponencial, isto é,

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-t/\sigma}\cdot$$

3.19 Equação fracionária não homogênea

Resolva o problema de valor inicial fracionário (equação de Bagley-Torvik) composta pela equação diferencial fracionária não homogênea [15]

$$\mathsf{D}^2 y(x) + \mathsf{D}^{\frac{3}{2}} y(x) + y(x) = 1 + x$$

satisfazendo as condições iniciais $y(0) = 1 = y'(0)$. Utilizando a metodologia da transformada de Laplace e as condições iniciais, obtemos a seguinte equação algébrica

$$s^2 F(s) - s - 1 + s^{\frac{3}{2}} F(s) - s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}} + F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

com solução dada por

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

sendo s o parâmetro da transformada de Laplace e $F(s) = \mathscr{L}[y(x)]$. Procedendo com a transformada de Laplace inversa, temos

$$y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right]$$

de onde segue, utilizando a linearidade da transformada de Laplace, a solução

$$y(x) = 1 + x\cdot$$

3.20 Equação fracionária com coeficientes não constantes

Sejam $0 < \mu \leq 1$, $0 < \nu \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ e $x \neq 0$. Resolva a equação diferencial fracionária com coeficientes não constantes

$$\mathsf{D}^{\mu}\left[x^{\alpha}\mathsf{D}^{\nu} y(x)\right] = A$$

onde A é uma constante e a derivada é considerada no sentido Caputo. Discuta os casos particulares (i) $\alpha = 0$ e (ii) $\mu = \nu = \alpha = 1$. Utilizando a identidade (operadores inversos) $\mathsf{D}^{-\mu}\mathsf{D}^{\mu} = \mathbb{I}$, onde $\mathbb{I}$ é o operador identidade, isto é, operando de ambos os lados da equação diferencial fracionária, temos

$$x^{\alpha}\mathsf{D}^{\nu} y(x) = \mathsf{D}^{-\mu}[A]\cdot$$

Utilizando a expressão para o operador integral fracionário no segundo membro, podemos escrever

$$x^{\alpha}\mathsf{D}^{\nu}y(x) = \frac{A}{\Gamma(\mu)}\int_0^x (x-\xi)^{\mu-1}\,\mathrm{d}\xi$$

sendo a integral remanescente elementar, logo

$$x^{\alpha}\mathsf{D}^{\nu}y(x) = \frac{A}{\Gamma(\mu)}x^{\mu}\cdot$$

A expressão anterior pode, ainda, ser colocada na forma

$$\mathsf{D}^{\nu}y(x) = \frac{A}{\Gamma(\mu)}x^{\mu-\alpha}$$

que, com um procedimento análogo ao anterior, permite escrever

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-\xi)^{\nu-1}\frac{A}{\Gamma(\mu+1)}\xi^{\mu-\alpha}\mathrm{d}\xi\cdot$$

Introduzindo a mudança de variável $\xi = xt$ na expressão anterior e rearranjando, temos

$$y(x) = \frac{A\,x^{\nu+\mu-\alpha}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu+1)}\int_0^1 (1-t)^{\nu-1}t^{\mu-\alpha+1-1}\,\mathrm{d}t\cdot$$

A integral remanescente é uma função beta, logo, já simplificando e utilizando a relação entre as funções beta e gama (Apêndice), permite escrever

$$y(x) = A\frac{\Gamma(\mu-\alpha+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\nu-\alpha+1)}x^{\mu+\nu-\alpha}$$

que é a solução da equação diferencial fracionária com coeficientes não constantes. Para os casos particulares temos: (i) substituindo $\alpha = 0$ na expressão para a solução, obtemos, já simplificando

$$y(x) = \frac{A}{\Gamma(\mu+\nu+1)}x^{\mu+\nu}$$

que é solução da equação diferencial fracionária com coeficientes constantes

$$\mathsf{D}^{\mu}\mathsf{D}^{\nu}y(x) = A\cdot$$

(ii) Neste caso, substituímos $\mu = \nu = \alpha = 1$ na solução da equação diferencial fracionária com os coeficientes não constantes de modo a obter

$$y(x) = A\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(2)\Gamma(2)}x$$

ou ainda, $y(x) = Ax$, que é solução da equação

$$\mathsf{D}\left[x\mathsf{D}y(x)\right] = A$$

como pode ser verificado por substituição direta.

3.21 Equações integral e integrodiferencial fracionárias

Sabendo que a derivada fracionária de Riemann-Liouville é o operador inverso à esquerda da integral fracionária, resolver as equações: a) integral

$$x = \int_x^0 \frac{y(\xi)}{(x-\xi)^{3/2}}\,\mathrm{d}\xi$$

e b) integrodiferencial

$$x = \int_x^0 \frac{y'(\xi)}{(x-\xi)^{3/2}}\,\mathrm{d}\xi$$

onde a linha denota derivada de primeira ordem.

a) Invertendo a ordem de integração e identificando com a Eq.(2.1.2)

$$-x = \Gamma(-1/2)\,{}^{\mathsf{RL}}_{\ 0}\mathcal{J}_x^{-1/2}y(x)\,,$$

aplicando a derivada fracionária à esquerda e usando a identidade

$${}^{\mathsf{RL}}_{\ 0}\mathsf{D}_x^{-1/2}\ {}^{\mathsf{RL}}_{\ 0}\mathcal{J}_x^{-1/2} = \mathbb{I}\,,$$

onde $\mathbb{I}$ é o operador identidade, podemos escrever

$${}^{\mathsf{RL}}_{\ 0}\mathsf{D}_x^{-1/2}\,x = -\Gamma(-1/2)y(x)\cdot$$

Calculando a derivada de Riemann-Liouville a partir da Eq.(2.2.11) temos

$$y(x) = \frac{2x}{3\pi}\sqrt{x}$$

que é a solução da equação integral fracionária.

b) Uma vez que conhecemos o resultado do item anterior, introduzimos a mudança de variável $y'(\xi) = F(\xi)$ o que acarreta na mesma equação integral, cuja solução pode ser escrita, em analogia ao item anterior, na forma

$$F(x) = y'(x) = \frac{2x}{3\pi}\sqrt{x}\cdot$$

Note que temos, agora, uma equação diferencial ordinária de ordem inteira (primeira ordem). Basta, então, efetuar a integração, logo

$$y(x) = \frac{4x^2}{15\pi}\sqrt{x} + C$$

onde C é uma constante de integração. Impondo a condição $y(0) = 0$ temos

$$y(x) = \frac{4x^2}{15\pi}\sqrt{x}$$

que é a solução da equação integrodiferencial fracionária.

Enfim, apenas para mencionar, uma outra maneira de resolver tais equações, integral e integrodiferencial, fracionárias é a partir da metodologia da transformada de Laplace onde o produto de convolução desempenha papel fundamental, bem como a definição das funções gama e beta, além da relação entre elas, conforme Apêndice.

3.22 Transferência de calor. Lei de Newton

A lei de Newton relativa à transferência de calor afirma que: À medida que $T(t)$ se aproxima de T, a velocidade com que $T(t)$ tende a T, diminui gradativamente. Admitindo que essa velocidade $\mathrm{d}T(t)/\mathrm{d}t$ seja proporcional à $T(t) - T$, que representa a diferença entre as temperaturas, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t) = -k[T(t) - T]$$

sendo $k > 0$ uma constante de proporcionalidade.

A partir dessa equação diferencial, vamos considerar o análogo fracionário. A equação diferencial de ordem α, com $0 < \alpha \leq 1$ e admitindo que a condição inicial seja tal que $T(0) = T_0$, para $t = 0$ temos uma temperatura constante T_0, ou seja, devemos resolver a seguinte equação diferencial fracionária

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}T(t) = -k[T(t) - T]$$

com $0 < \alpha \leq 1$ e k uma constante positiva, satisfazendo a condição $T(0) = T_0$.

Seja a transformada de Laplace de $T(t)$ dada por $\mathscr{L}[T(t)] = F(s)$, tal que

$$\mathscr{L}[T(t)] := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} T(t)\,\mathrm{d}t$$

com $\mathrm{Re}(s) > 0$ e tomando a transformada de Laplace de ambos os membros da equação diferencial precedente, temos a equação algébrica na variável $F(s)$

$$s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} T(0) = -k\left[F(s) - \frac{T}{s}\right]\cdot$$

Com a condição inicial $T(0) = T_0$ e resolvendo a equação algébrica, temos

$$F(s) = T_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha+k}} + kT\frac{s^{-1}}{s^\alpha + k}\cdot \tag{3.22.10}$$

A fim de recuperar a solução da equação diferencial de partida, procedemos com o cálculo da transformada de Laplace inversa. Tomando a transformada de Laplace inversa de ambos os membros da Eq.(3.22.10) e usando a linearidade, podemos escrever

$$T(t) = T_0 \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}\right] + kT\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{-1}}{s^\alpha + k}\right].$$

Para calcularmos essas duas transformadas de Laplace inversas, usamos o resultado obtido na Aplicação 3.3,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda}\right] = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha),$$

de onde segue,

$$T(t) = T_0 E_\alpha(-kt^\alpha) + kTt^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-kt^\alpha) \tag{3.22.11}$$

com $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ e $E_\alpha(\cdot)$ funções de Mittag-Leffler, clássica e com dois parâmetros, respectivamente. Note que, a constante T_0 emerge naturalmente na solução.

Vamos discutir o caso $\alpha \to 1$. Tomando esse limite na Eq.(3.22.11), temos

$$T(t) = T_0 E_1(-kt) + kTtE_{1,2}(-kt)$$

ou ainda, usando a relação envolvendo as funções de Mittag-Leffler, isto é,

$$E_\alpha(z) = zE_{\alpha,\alpha+1}(z) + 1$$

e lembrando que $E_1(z) = \exp(z)$ obtemos

$$T(t) = (T_0 - T)\,\mathrm{e}^{-kt} + T$$

que é exatamente a solução do problema clássico, isto é, a expressão que descreve a transferência de calor quando utilizamos o cálculo de ordem inteira.

3.23 Oscilador harmônico fracionário

Aqui, a fim de concluir as aplicações, discutimos o clássico problema do oscilador harmônico na versão fracionária. Este é um caso claro no qual a modelagem por uma equação diferencial de ordem não inteira oferece uma descrição mais acurada da realidade em contraste com a respectiva equação diferencial de ordem inteira, obtida como caso limite do parâmetro associado à ordem da equação. A equação diferencial que descreve o oscilador harmônico sem amortecimento, também conhecido com o nome de sistema massa-mola, em sua versão fracionária, tem a solução dada pelo oscilador harmônico amortecido que, como é sabido, descreve com mais acurácia a realidade, haja visto que em todos os sistemas reais temos atritos [7].

Como é conhecido da Mecânica, a segunda lei de Newton do movimento, aplicada a sistemas que se repetem no tempo, fornece a equação diferencial

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + \mu\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + k\,x(t) = g(t)$$

que descreve o deslocamento (elongação), $x(t)$, de um corpo de massa m, no tempo t, a partir da posição de equilíbrio, sujeito a uma força do tipo Hooke, $-kx(t)$, a uma força de amortecimento $-\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ e a uma força externa $g(t)$, onde μ e k são constantes positivas. No particular caso em que não há atritos nem forças externas atuando sobre o sistema, temos o seguinte problema, composto por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e com coeficientes constantes

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + k\,x(t) = 0 \tag{3.23.12}$$

e as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$. A solução desse problema (equação diferencial + condições) é dada por

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) \tag{3.23.13}$$

onde introduzimos a frequência ω_0, tal que $\omega_0^2 = k/m$.

Uma outra maneira de formular esse problema é por meio de uma equação integral, isto é, a função, solução do problema que desejamos obter, encontra-se sob o sinal de integral. A fim de reescrever a Eq.(3.23.12) como uma equação integral, consideramos

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega_0^2 x(t) \quad \Rightarrow \quad \int_0^t x''(u)\mathrm{d}u = -\omega_0^2\int_0^t x(u)\mathrm{d}u,$$

logo

$$x'(t) = x'(0) - \omega_0^2 \int_0^t x(u)\mathrm{d}u\cdot$$

Integrando a anterior e usando o teorema de Goursat

$$\int_0^t \int_0^v x(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^t \int_t^v x(u)\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \int_0^t x(u)\mathrm{d}u \int_t^u dv = \int_0^t (u-t)x(u)\mathrm{d}u.$$

obtemos, já simplificando, a seguinte equação integral

$$x(t) = x(0) + tx'(0) + \omega_0^2 \int_0^t (t-u)x(u)\mathrm{d}u\cdot \qquad (3.23.14)$$

Note que a função desconhecida a ser determinada, $x(t)$, encontra-se no integrando. Ainda mais, as duas equações Eq.(3.23.12) e Eq.(3.23.14) são equivalentes. Enfim, a equação integral já carrega consigo as condições iniciais, diferentemente da equação diferencial.

Como já mencionado, vamos comparar a modelagem de ordem inteira com a respectiva modelagem fracionária, em particular, considera-se a generalização fracionária da equação diferencial ordinária, associada ao problema do oscilador harmônico simples [9], obtida a partir da substituição da derivada de ordem dois da Eq.(3.23.12), pela derivada fracionária de ordem α, conforme formulada por Caputo, ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}x(t) + \omega^\alpha\, x(t) = 0.$$

com $1 < \alpha \leq 2$, onde introduzimos a notação $\omega^\alpha = \omega_0^2 = k/m$. Em completa analogia à equação diferencial, procedemos com a equação integral, isto é, introduzimos uma integral de ordem α na Eq.(3.23.14) de modo a obter uma equação integral fracionária

$$x(t) = x(0) + tx'(0) - \frac{\omega^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} x(u)\mathrm{d}u,\cdot \qquad (3.23.15)$$

A fim de resolver a Eq.(3.23.15), optamos pela metodologia das transformadas integrais. Então, tomando a transformada de Laplace de ambos os membros temos,

$$F(s) \quad = \quad \frac{1}{s}x(0) + \frac{1}{s^2}x'(0) - \omega^\alpha \int_0^\infty \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \star x(t)\right] \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

na qual $\mathscr{L}[x(t)](s) \equiv F(s) = \displaystyle\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ é a transformada de Laplace de $x(t)$, com parâmetro s e no segundo membro utilizamos a definição do produto de convolução, denotado por $\star$. Visto que a transformada de Laplace do produto de convolução é igual ao produto das transformadas de Laplace e que a transformada de Laplace de $t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ é $s^{-\alpha}$ pode-se escrever, já resolvendo para $F(s)$,

$$F(s) = x(0)\frac{s^{-1}}{1+\omega^\alpha\, s^{-\alpha}} \,+\, x'(0)\frac{s^{-2}}{1+\omega^\alpha\, s^{-\alpha}}\cdot \tag{3.23.16}$$

A fim de recuperar a solução, $x(t)$, aplicamos a transformada de Laplace inversa em ambos os lados da Eq.(3.23.16), logo,

$$x(t) = x(0)\,E_\alpha(-\omega^\alpha\, t^\alpha) \,+\, x'(0)\,E_{\alpha,2}(-\omega^\alpha\, t^\alpha),$$

onde $E_\alpha(z)$ e $E_{\alpha,\beta}(z)$ são funções de Mittag-Leffler (Apêndice) com um e dois parâmetros, respectivamente. Utilizando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$, pode-se escrever

$$x(t) = x_0\,E_\alpha(-\omega^\alpha\, t^\alpha), \tag{3.23.17}$$

que é a solução do problema do oscilador harmônico fracionário.

Por outro lado, considerando $\alpha = 2$ na equação anterior tem-se

$$x(t) = x_0\,E_2(-(\omega\, t)^2) = x_0\,\cos(\omega\, t),$$

ou seja, recupera-se a solução do oscilador harmônico de ordem inteira.

Voltemos ao caso do oscilador harmônico clássico. Consideremos o sistema massa-mola, composto por uma mola de constante elástica, k, uma massa, m, e um amortecedor com o coeficiente de amortecimento μ. O deslocameno, $x(\tau)$ da massa a partir da posição de equilíbrio é descrito pela equação diferencial ordinária

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}x(\tau) + 2\sigma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x(\tau) + x(\tau) = 0 \tag{3.23.18}$$

onde, para simplificar a notação, introduzimos $2\sigma = \mu/m\omega$, uma medida adimensionalizada do amortecimento, e as condições iniciais são dadas por $x(0) = 1$, no deslocamento, e $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x(\tau)\right|_{\tau=0} = 0$, na velocidade. Introduzimos a chamada frequência natural do sistema não amortecido, ω, definida por $\omega^2 = k/m$, normalizamos o deslocamento em $x = a$ e delimitamos o tempo adimensionalizado, τ, definido por $\tau = \omega t$.

A solução da Eq. (3.23.18) satisfazendo as condições iniciais é dada por

$$x(\tau) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + 2\sigma \right) \mathrm{e}^{-\sigma\tau} \frac{\operatorname{sen} \omega\tau}{\omega} \,, \tag{3.23.19}$$

onde $\omega = \sqrt{1-\sigma^2}$.

Em completa analogia ao oscilador harmônico fracionário, vamos agora, introduzir dois parâmetros α e β, associando-os à ordem da equação diferencial fracionária,

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}\tau^\alpha} x(\tau) + 2\sigma \frac{\mathrm{d}^\beta}{\mathrm{d}\tau^\beta} x(\tau) + x(\tau) = 0 \tag{3.23.20}$$

tais que os parâmetros satisfaçam as desigualdades $1 < \alpha \leq 2$ e $0 < \beta \leq 1$ e sendo a derivada fracionária considerada no sentido de Caputo.

A fim de resolver esse sistema, isto é, a equação diferencial fracionária, satisfazendo as condições iniciais, consideramos a metodologia da transformada de Laplace, de onde podemos escrever

$$s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} x(0) - s^{\alpha-2} \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} x(\tau) \right|_{\tau=0} + 2\sigma \left[s^\beta F(s) - s^{\beta-1} x(0) \right] + F(s) = 0$$

onde $\mathscr{L}[x(t)](s) \equiv F(s) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\tau} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau$ com $\mathrm{Re}(s) > 0$ é a transformada de Laplace de $x(\tau)$. Utilizando as condições iniciais e rearranjando, obtemos uma equação algébrica com solução dada por

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1} + 2\sigma s^{\beta-1}}{s^\alpha + 2\sigma s^\beta + 1} \cdot \tag{3.23.21}$$

A fim de proceder com a inversão da transformada de Laplace, introduzimos a notação $\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = x(\tau)$, de onde segue, utilizando a Eq.(3.23.21),

$$x(\tau) = \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 2\sigma s^\beta + 1} \right] + 2\sigma \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{s^{\beta-1}}{s^\alpha + 2\sigma s^\beta + 1} \right].$$

Para calcular essas duas transformadas de Laplace inversas, começamos por escrever o segundo membro, apenas a primeira delas, na forma

$$\mathscr{L}^{-1} \left[\frac{s^{\rho-1}}{s^\alpha + 2\sigma s^\beta + 1} \right] = \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{s^{\rho-1}}{s^\alpha + 1} \frac{1}{1 + \frac{2\sigma s^\beta}{s^\alpha + 1}} \right]$$

de onde, impondo a restrição $|2\sigma s^\beta/(s^\alpha+1)| < 1$ e usando o resultado da série geométrica, temos

$$\mathscr{L}^{-1} \left[\frac{s^{\rho-1}}{s^\alpha + 2\sigma s^\beta + 1} \right] = \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{s^{\rho-1}}{s^\alpha + 1} \sum_{k=0}^\infty \left(-\frac{2\sigma s^\beta}{s^{\alpha+1}} \right)^k \right].$$

Permutando a ordem do somatório com a transformada de Laplace inversa e rearranjando, podemos escrever

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\rho-1}}{s^{\alpha}+2\sigma s^{\beta}+1}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}(-2\sigma)^{k}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\rho+\beta k-1}}{(s^{\alpha}+1)^{k+1}}\right]\cdot$$

Utilizando o resultado da Aplicação (3.3), obtemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\rho-1}}{s^{\alpha}+2\sigma s^{\beta}+1}\right]=\tau^{\alpha-\rho}\sum_{r=0}^{\infty}(-2\sigma)^{r}\tau^{(\alpha-\beta)r}E^{r+1}_{\alpha,\alpha+1-\rho+(\alpha-\beta)r}(-\tau^{\alpha})\cdot$$

Logo, podemos escrever para as duas transformadas de Laplace inversas

$$\begin{aligned}x(\tau)&=\sum_{r=0}^{\infty}(-2\sigma)^{r}\tau^{(\alpha-\beta)r}E^{r+1}_{\alpha,1+(\alpha-\beta)r}(-\tau^{\alpha})\\&+2\sigma\tau^{\alpha-\beta}\sum_{r=0}^{\infty}(-2\sigma)^{r}\tau^{(\alpha-\beta)r}E^{r+1}_{\alpha,1+(\alpha-\beta)r+\alpha-\beta}(-\tau^{\alpha})\end{aligned}\qquad(3.23.22)$$

que é a solução do problema massa-mola fracionário.

Vamos concluir esta aplicação, recuperando o caso limite. Consideramos $\alpha=2$ e $\beta=1$. Introduzindo esses valores na Eq.(3.23.22) e usando a relação envolvendo a função de Mittag-Leffler com três parâmetros [8]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\gamma-1}E^{r+1}_{2,\gamma}(-z^{2})\right]=z^{\gamma-2}E^{r+1}_{2,\gamma-1}(-z^{2})$$

podemos escrever para a solução do oscilador harmônico de ordem inteira

$$x(\tau)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}+2\sigma\right)\sum_{r=0}^{\infty}(-2\sigma)^{r}\tau^{r+1}E^{r+1}_{2,r+2}(-\tau^{2})\cdot\qquad(3.23.23)$$

Mostra-se que esse resultado coincide com o resultado obtido na Eq.(3.23.19).

Vamos, também, recuperar o caso livre, isto é, onde não temos amortecimento. A partir da Eq. (3.23.23) e considerando $\sigma=0$ obtemos

$$x(\tau)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\tau\,E_{2,2,}(-\tau^{2})\right]$$

onde $E_{\mu,\nu}(\cdot)$ é uma função de Mittag-Leffler com dois parâmetros. Visto que a relação $zE_{2,2}(-z^{2})=\operatorname{sen}z$ é conhecida obtemos, finalmente,

$$x(\tau)=\cos\tau$$

que é exatamente a solução encontrada quando resolvemos a equação diferencial associada ao problema do oscilador harmônico, em particular, aqui, com $x_0=1$ e $\omega=1$, isto é, a Eq.(3.23.13).

3.24 Derivada de Riemann-Liouville e a regra de Leibniz

Vamos mostrar que a derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville satisfaz a chamada regra de Leibniz generalizada, no sentido de que podemos estender a clássica regra de Leibniz, também conhecida como regra do produto, para o caso fracionário.

Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções analíticas e $\alpha \in \mathbb{R}$. A regra de Leibniz generalizada para a derivada fracionária de Riemann-Liouville é dada por

$$^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_t^{\mu}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} f^{(k)}(t) {}^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_t^{\mu-k} g(t)$$

onde $^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_t^{\mu-k}$ denota o operador derivada fracionária de Riemann-Liuoville e $f^{(k)}$ a k-ésima derivada em relação à variável t.

Utilizando a clássica regra de Leibniz para ordem inteira, podemos escrever a seguinte expressão

$$^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_t^{\mu}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) \sum_{n=k}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{k} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} g^{(n-k)}(t)\cdot$$

Introduzindo a mudança de índice $n \to n+k$ e rearranjando, temos

$$^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_t^{\mu}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} \frac{t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} g^{(n)}(t)\cdot$$

A partir da relação envolvendo coeficientes binomiais,

$$\binom{\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} = \binom{\alpha}{k} \binom{\alpha-k}{n}$$

obtemos para a derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville do produto de duas funções analíticas a expressão

$$^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_t^{\mu}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-k}{n} \frac{t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} g^{(n)}(t)\cdot$$

Enfim, utilizando a expressão para a derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville de ordem $\mu \in \mathbb{R}$ de uma função analítica f, dada por

$$^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}_t^{\mu} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{f^{(n)}(t) t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}$$

segue a expressão para a regra de Leibniz generalizada.

Apêndice A

Pré-requisitos

Tanto as funções especiais quanto a metodologia das transformadas integrais, em particular a transformada de Laplace, desempenham papel crucial na abordagem de exercícios, problemas e aplicações advindos de vários campos da ciência.

Neste apêndice, começamos por introduzir a chamada função de Gelfand-Shilov, bastante utilizada quando trabalhamos com o produto de convolução de Laplace. Apresentamos o símbolo de Pochhammer, pois é de grande valia, por exemplo, na simplificação de quocientes de funções gama, bem como introduzimos os conceitos de função gama, uma natural generalização do conceito de fatorial, e de função beta, apresentada em termos de uma representação integral. Introduzimos a clássica função de Mittag-Leffler, cunhada como sendo a rainha das funções especiais do cálculo fracionário, como um caso particular da função de Mittag-Leffler com três parâmetros, pois é a função mais geral que vai aparecer neste trabalho. Enfim, vamos apresentar apenas o essencial relativo à transformada de Laplace, pois será a metodologia a ser abordada na discussão de problemas advindos do cálculo fracionário. Exemplos ilustrativos são discutidos imediatamente após um particular conceito ter sido apresentado.

A.1 Funções gama e beta

As funções gama e beta, também conhecidas como funções de Euler de segunda e primeira espécies, respectivamente, desempenham papel importante seja na simplificação de resultados, pois a função gama é uma generalização do conceito de fatorial, seja em problemas envolvendo integrais, visto serem ambas definidas, neste trabalho, a partir de uma integral imprópria.

Outras maneiras de se apresentar a função gama são: através de um produto infinito, conforme proposto Weierstrass e a partir de um processo de limite, conforme proposto por Gauss [20]. Começamos, primeiramente, definindo o conceito de fatorial, a partir de uma integral imprópria.

Definição A.1. FATORIAL.

Seja $n = 0, 1, 2, \ldots$ Definimos o fatorial, denotado por $n!$, através da integral imprópria, conforme proposta por Euler,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^n \, \mathrm{d}t = n! \cdot$$

Definição A.2. FUNÇÃO GAMA.

A partir da definição de fatorial, substituímos n por um número, em princípio complexo, $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t$$

com $\mathrm{Re}(z) > 0$, represente a função gama, denotada por $\Gamma(z)$. Para os propósitos deste texto, considera-se $x \in \mathbb{R}$, diferente de um inteiro negativo ou zero, de modo que

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t \cdot$$

Conforme já mencionamos, existem outras maneiras de se introduzir o conceito de função gama. A definição devida a Gauss, em termos de um limite, é dada por

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

com $n \neq 0, -1, -2, \ldots$ enquanto a definição conforme Weierstrass, em termos de um produtório, é dada por

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \, e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}$$

onde γ denota a constante de Euler-Mascheroni,

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0,57721566 \ldots$$

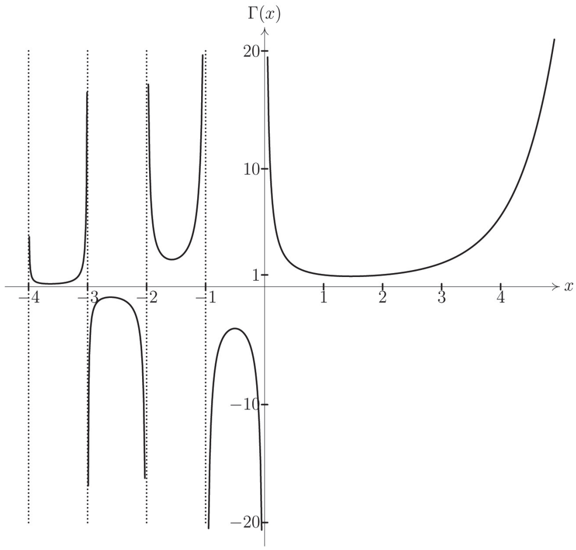

Figura A.1: Função gama $\Gamma(x)$ com $x \in \mathbb{R}$.

Antes de passarmos às propriedades, mencionamos que a definição de Gauss mostra claramente que a função gama tem polos simples nos pontos $z = 0, -1, -2, \ldots$ Um gráfico da função gama está ilustrado na Figura A.1.

Teorema A.1. *As definições da função gama, conforme propostas por Euler, Gauss e Weierstrass, são equivalentes.*

Demonstração: Veja [37]. ■

Propriedade A.1. Fórmula de recorrência.

Da definição da função gama, efetuando integração por partes, podemos mostrar que vale a seguinte relação

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$$

interpretada como uma generalização da identidade $n! = n(n - 1)!$.

Através da técnica do prolongamento analítico [25], podemos estender o domínio da função gama para $x < 0$, mediante a relação

$$\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} + \int_1^{\infty} \mathrm{e}^t t^{x-1} \mathrm{d}t$$

onde demonstra-se que a série que aparece na expressão precedente tem por soma uma função que é analítica em todo o plano, excluindo-se os pontos $x = -n$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$ os quais são chamados polos da função gama. Esta expressão é conhecida pelo nome de expansão de Mittag-Leffler.

Definição A.3. Função beta.

Define-se a função beta, denotada por $B(z, \xi)$, sendo $\mathrm{Re}(z) > 0$ com $z = x + iy$ e $\mathrm{Re}(\xi) > 0$ com $\xi = \eta + i\mu$ para $x, y, \eta, \mu \in \mathbb{R}$, a partir da integral imprópria

$$B(z, \xi) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1} \mathrm{d}t \cdot$$

Para nosso propósito, neste texto introdutório, em analogia à função gama, consideramos apenas z e ξ parâmetros reais.

Propriedade A.2. Simetria.

A substituição $1 - t$ por t não muda o valor da integral de onde conclui-se

$$B(z, \xi) = B(\xi, z) \cdot$$

Proposição A.1. Relação entre as funções gama e beta.

Consideremos o produto de duas funções gama e utilizando coordenadas polares no plano, vale a relação entre as funções beta e gama [20],

$$B(\xi, z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\xi)}{\Gamma(\xi + z)} \cdot$$

Proposição A.2. Fórmula de duplicação.

Utilizando a definição da função beta, com os argumentos iguais, temos a chamada fórmula de duplicação da função gama [20]

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2})$$

que pode ser generalizada para $\Gamma(nz)$ com $n \in \mathbb{N}$ [31].

Proposição A.3. Função gama e funções trigonométricas.

A relação envolvendo a função gama com a função seno é a conhecida fórmula de reflexão, que pode ser mostrada através da função beta e uma integração no plano complexo [25]

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}$$

com $0 < x < 1$ da qual seguem as relações

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x} \qquad \text{e} \qquad \Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi/x}{\operatorname{sen} \pi \mathrm{x}}\cdot$$

Exemplo A.1. *Calcule* $\Gamma(1/2)$, $\Gamma(3/2)$ *e* $\Gamma(-1/2)$. *Primeiro, ressaltamos que podemos calcular essas particulares funções gama por meio da definição, por exemplo, no caso* $\Gamma(1/2)$*, devemos utilizar as coordenadas polares e efetuar as duas integrações nas variáveis polares. Por outro lado, conhecida a fórmula de reflexão o trabalho é muito mais simples. Então, no primeiro caso* $\Gamma(1/2)$*, basta substituir* $x = 1/2$ *na fórmula de reflexão, isto é,*

$$\Gamma(1/2)\Gamma(1-1/2) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}\cdot$$

Visto que $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ *temos* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. *Como* $3/2 = 1 + 1/2$ *basta substituir na fórmula de recorrência* $x = 1/2$*, de onde podemos escrever*

$$\Gamma(1+1/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2)\cdot$$

A partir desse resultado, concluímos que $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$. *Diante desses dois resultados, substituindo* $x = -1/2$ *na fórmula de reflexão, obtemos*

$$\Gamma(-1/2)\Gamma[1-(-1/2)] = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

de onde segue, após simplificação, $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$.

A.2 Símbolo de Pochhammer

Nesta seção, definimos a função de Gelfand-Shilov e o símbolo de Pochhammer, pois desempenham papel crucial em quase todo o texto.

Definição A.4. Função de Gelfand-Shilov.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\nu \in \mathbb{R}$. Define-se a função de Gelfand-Shilov como

$$\phi_n(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad \text{e} \quad \phi_\nu(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Ressalte-se que, para obter a definição da função à direita, para um $\nu \in \mathbb{R}$, utilizamos a relação envolvendo os conceitos de fatorial e função gama, que serão definidos no que segue.

Definição A.5. Símbolo de Pochhammer.

Uma maneira de simplificar um quociente de funções gama é através do chamado símbolo de Pochhammer, denotado por $(\alpha)_n$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definido por

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1) \equiv \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

respeitadas as condições de existência das funções gama.

A.3 Funções de Mittag-Leffler

São várias as formas de se introduzir a clássica função de Mittag-Leffler, em particular, como introduzida no trabalho pioneiro [17]. Aqui, vamos introduzi-la como um caso particular da função de Mittag-Leffler com três parâmetros, algumas vezes chamada de função de Prabhakar [30]. Existem outras generalizações das funções de Mittag-Leffler, porém, neste trabalho, só estamos interessados na função de Mittag-Leffler envolvendo três parâmetros e seus casos particulares [8, 34].

Definição A.6. Função de Prabhakar.

Sejam $z \in \mathbb{C}$ e os parâmetros $\alpha,\ \beta,\ \rho\ \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Definimos a função de Prabhakar, denotada por $\mathscr{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(z)$, através da expressão

$$\mathscr{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) \equiv z^{\beta-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) = z^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{z^k}{k!}, \tag{A.3.1}$$

sendo $(\rho)_k$ o símbolo de Pochhammer e $E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z)$ a função de Mittag-Leffler com três parâmetros.

A chamada função de Mittag-Leffler de dois parâmetros desempenha um papel importante no desenvolvimento do cálculo fracionário e foi originalmente introduzida por Agarwal, às vezes chamada função de Wiman [1].

Definição A.7. Função de Mittag-Leffler com dois parâmetros.

Sejam $z \in \mathbb{C}$ e os parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Definimos a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, denotada por $E_{\alpha,\beta}(z)$, pela expressão

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}. \tag{A.3.2}$$

Note que a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros é um caso particular da função de Mittag-Leffler com três parâmetros, isto é, $\rho = 1$ na Eq.(A.3.1).

Definição A.8. Função de Mittag-Leffler.

A clássica função de Mittag-Leffler ou simplesmente, função de Mittag-Leffler [22], denotada por $E_\alpha(z)$, é uma função complexa[1] que depende de um parâmetro complexo α com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e, conforme introduzida por Mittag-Leffler, é dada a partir da seguinte série de potências

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{A.3.3}$$

que pode ser interpretada com uma generalização fracionária para a função exponencial visto que, para $\alpha = 1$, recupera-se a função exponencial, isto é,

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^z.$$

Aqui também, a função de Mittag-Leffler é obtida como caso particular da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros bastando para isso considerar $\beta = 1$ na Eq.(A.3.2), bem como, a partir da função de Prabhakar, Eq.(A.3.1), agora, considerando os parâmetros $\rho = 1 = \beta$.

Ressaltamos que existem outras generalizações da função de Mittag-Leffler, tanto com o aumento do número de parâmetros quanto do número de variáveis independentes mas, para nosso intuito, a discussão se restringe à função de Mittag-Leffler com três parâmetros [34].

Enfim, passemos a discutir dois exemplos envolvendo a função de Mittag-Leffler. Primeiro, apresentamos a relação entre a função de Mittag-Leffler

[1] Utiliza-se a notação $E_\alpha(x)$ no lugar de $E_\alpha(z)$ nos casos em que a variável for real.

e a função hipergeométrica confluente [20] para, depois, obter uma relação envolvendo a derivada de ordem n da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros e a função de Mittag-Leffler com três parâmetros, o que simplifica bastante os cálculos envolvendo tal função.

Definição A.9. FUNÇÃO HIPERGEOMÉTRICA CONFLUENTE.

A função hipergeométrica confluente, denotada por ${}_1F_1(a;c;x)$, é dada pela série de potências,

$$ {}_1F_1(a;c;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}, $$

com $\mathrm{Re}(a) > 0$ e $\mathrm{Re}(c) > 0$, sendo $(\cdot)_k$ o símbolo de Pochhammer.

Exemplo A.2. MITTAG-LEFFLER × HIPERGEOMÉTRICA CONFLUENTE.

Vamos obter uma relação entre uma específica função hipergeométrica confluente e uma particular função de Mittag-Leffler, isto é, expressar essa função hipergeométrica em termos da função de Mittag-Leffler. Tomando $\alpha = 1$ na definição da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, temos

$$ E_{1,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n\, x^n}{(\beta)_n\, n!} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} {}_1F_1(1;\beta;x), $$

com $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, onde na terceira igualdade utilizamos a definição do símbolo de Pochhammer.

Exemplo A.3. RELAÇÃO ENTRE FUNÇÕES DE MITTAG-LEFFLER. *Vamos, a partir da definição da função de Mittag-Leffler com três parâmetros,* Eq.(A.3.1), *mostrar sua relação com a derivada de ordem n da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros. Para tal, considere $n = 0, 1, 2, \ldots$ a fim de analisar a derivada de ordem n da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, denotada por $E_{\alpha,\beta}(z)$. Considere, também, a seguinte notação $E^{(n)}_{\alpha,\beta}(z) = \dfrac{\partial^n}{\partial z^n} E_{\alpha,\beta}(z)$.*

Escrevemos, a partir da definição da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, a relação envolvendo a n-ésima derivada

$$ E^{(n)}_{\alpha,\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{\Gamma(\alpha k + \alpha n + \nu)} \frac{z^k}{k!}. $$

A fim de introduzir o símbolo de Pochhammer, toma-se $n = \ell - 1$ *e reescreve-se a equação anterior da seguinte forma,*

$$\begin{aligned} E^{(\ell-1)}_{\alpha,\nu}(z) &= (\ell-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+\ell-1)!}{(\ell-1)!} \frac{z^k/k!}{\Gamma(\alpha k + \alpha(\ell-1)+\nu)} \\ &= (\ell-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ell)_k}{\Gamma(\alpha k + \alpha(\ell-1)+\nu)} \frac{z^k}{k!}. \end{aligned}$$

Com a mudança de variável $\ell \to \ell + 1$ *temos a expressão anterior na forma*

$$E^{(\ell)}_{\alpha,\nu}(z) = \ell! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ell+1)_k}{\Gamma(\alpha k + \alpha\ell) + \nu)} \frac{z^k}{k!}.$$

Por fim, considerando a variável $\nu = \beta - \alpha\ell$*, podemos escrever*

$$E^{(\ell)}_{\alpha,\beta-\alpha\ell}(z) = \ell! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ell+1)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}.$$

Utilizando a definição da função de Mittag-Leffler com três parâmetros, dada pela Eq.(A.3.1)*, obtemos*

$$E^{(\ell)}_{\alpha,\beta-\alpha\ell}(z) = \ell! E^{\ell+1}_{\alpha,\beta}(z),$$

ou ainda, na conveniente forma

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta}(z) = k!\; E^{k+1}_{\alpha,\beta+\alpha k}(z), \tag{A.3.4}$$

para $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Ressaltamos a importância da Eq.(A.3.4) no sentido de termos uma justificativa para trabalhar com a função de Mittag-Leffler com três parâmetros em vez da k-ésima derivada da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros.

A.4 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma ferramenta bastante útil para a obtenção de uma solução particular de equações diferenciais, em especial, fracionárias. Ressaltamos que, como pode ser induzido um crescimento exponencial, como vamos ver a seguir, imediatamente após a definição, vamos dar uma atenção especial à chamada região de convergência.

Definição A.10. Transformada de Laplace bilateral. *Consideremos a variável independente $t \in \mathbb{R}$ e uma função de variável real, $f(t)$, representando um sinal. A transformada de Laplace bilateral de $f(t)$, denotada por $\mathscr{L}[f](s) = \mathsf{F}(s)$, é definida pela integral*

$$\mathscr{L}[f](s) = \mathsf{F}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

sendo s o parâmetro da transformada tal que $s = \sigma + i\tau$ com $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$.

Antes de passarmos à apresentação das propriedades envolvendo a transformada de Laplace, como já mencionado, destacamos o estudo da região de convergência, devido a relevância. Vamos discutir e justificar essa relevância através de um clássico exemplo.

Exemplo A.4. Região de convergência. *Consideremos $t \in \mathbb{R}$ e a função $f_1(t) = e^{-at}\, u(t)$ com $a > 0$ e $u(t)$ a função degrau unitário, definida por*

$$u(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t \geq 0, \\ 0, & se \quad t < 0\cdot \end{cases}$$

A transformada de Laplace bilateral de $f_1(t)$ é dada por

$$\mathscr{L}[f_1](s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^{-at} u(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+s)t}\, dt = \frac{1}{s+a}$$

com $\mathrm{Re}(s) > -a$. Logo, a região de convergência, neste caso, é o semiplano complexo $\mathrm{Re}(s) = \sigma > -a$.

Consideremos, agora, a seguinte função $f_2(t) = -e^{-at}u(-t)$ com $a > 0$ e $u(t)$ a função degrau unitário. A transformada de Laplace bilateral de $f_2(t)$ é dada por

$$\mathscr{L}[f_2](s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^{-at}[-u(t)]\, dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(a+s)t}\, dt = \frac{1}{s+a}$$

com $\mathrm{Re}(s) < -a$. Logo, a região de convergência, neste caso, é o semiplano complexo $\mathrm{Re}(s) = \sigma < -a$.

Com este exemplo, fica claro o fato de termos $\mathscr{L}[f_1](s) \equiv \mathscr{L}[f_2](s)$, as duas transformadas de Laplace bilaterais serem iguais, apesar de as duas funções $f_1(t) \neq f_2(t)$ serem distintas, ou seja, o que diferencia os dois casos é a escolha da região de convergência.

Uma vez justificada a importância da região de convergência, passemos ao estudo da transformada de Laplace unilateral ou simplesmente, transformada de Laplace, considerando, a partir de agora, um sinal de tempo contínuo, ainda denotado por $f(t)$, sendo agora t a variável temporal. Devido a necessidade, vamos apresentar os conceitos de função de ordem exponencial, de função limitada e de função admissível, pois esta está diretamente associada à definição da transformada de Laplace.

Definição A.11. FUNÇÃO DE ORDEM EXPONENCIAL. *Considere uma função $f(t)$, definida para todo $t \geq 0$. Define-se uma função de ordem exponencial se existirem constantes reais $M > 0$, $t_0 > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, tais que*

$$|f(t)| \leq M\, e^{at}, \quad \textit{para} \;\; \textit{todo} \quad t > t_0$$

ou, equivalentemente, se

$$e^{-at}|f(t)| \leq M \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} |f(t)\, e^{-at}| = 0\cdot$$

Definição A.12. FUNÇÃO LIMITADA. *Uma função $f(t)$ é dita limitada se existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$, para todo t no domínio de f.*

Assim, concluímos: seja $a > 0$; se f é uma função limitada, então $e^{-at}|f(t)| \leq M$, para todo $t \geq 0$, pois $|e^{-at}| \leq 1$. Logo, toda função limitada é uma função de ordem exponencial.

Definição A.13. FUNÇÃO ADMISSÍVEL. *Uma função de ordem exponencial no infinito e contínua por partes em todo o intervalo fechado $[0, A]$, com $A > 0$, é dita admissível.*

Definição A.14. TRANSFORMADA DE LAPLACE. *Sejam $t \in \mathbb{R}_+$ e $f(t)$ uma função admissível. Definimos a transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $\mathscr{L}[f](s) = \mathsf{F}(s)$, pela integral*

$$\mathscr{L}[f](s) = \mathsf{F}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$$

sendo $s = \sigma + i\tau$, com $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, o chamado parâmetro da transformada.

Teorema A.2. EXISTÊNCIA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE. *Se uma função $f(t)$, definida para todo $t \geq 0$, é contínua por partes em todo intervalo fechado $0 \leq t \leq c$, com $c > 0$, e de ordem exponencial, então existe $a \in \mathbb{R}$ de modo que $\mathscr{L}[f](s)$ existe para todo $\mathrm{Re}(s) = \sigma > a$ [33].*

Exemplo A.5. *Sejam $t > 0$ e $f(t)$ uma função de variável real. Calcule a transformada de Laplace da função $f(t) = t$. Utilizando a definição da transformada de Laplace (verifique que essa função é admissível) devemos calcular a integral*

$$\mathsf{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} t \, \mathrm{d}t$$

sendo s o parâmetro da transformada de Laplace. Essa integral pode ser calculada por meio da integração por partes, como pode ser verificado, porém, aqui, vamos simular uma derivada no parâmetro, isto é, podemos escrever para a expressão anterior

$$\mathsf{F}(s) = -\frac{\partial}{\partial s}\left[\int_0^\infty e^{-st} \, \mathrm{d}t\right]$$

que resulta em uma integral imediata, de onde segue

$$\mathsf{F}(s) = -\frac{\partial}{\partial s}\left[\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty\right].$$

Substituindo os extremos e rearranjando, temos

$$\mathsf{F}(s) = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s}\right)$$

cuja derivada fornece o resultado desejado

$$\mathsf{F}(s) = \frac{1}{s^2}.$$

A.4.1 Propriedades

Vamos apresentar apenas as propriedades da transformada de Laplace, visando a resolução de equações diferenciais ordinárias, integrais e integrodiferenciais, fracionárias. Todas elas podem ser mostradas a partir da definição. Para outras propriedades sugerimos [33].

Propriedade A.3. LINEARIDADE. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. A transformada de Laplace é linear,*

$$\mathscr{L}(af_1 \pm bf_2) = a\mathscr{L}(f_1) \pm b\mathscr{L}(f_2)$$

desde que f_1 e f_2 admitam as respectivas transformadas de Laplace.

Propriedade A.4. DESLOCAMENTO NA VARIÁVEL INDEPENDENTE. *Seja $a \in \mathbb{R}$. Se $\mathscr{L}[f](s) = \mathsf{F}(s)$ então*

$$\mathscr{L}[e^{-at} f(t)] = \mathsf{F}(s+a)\cdot$$

Propriedade A.5. DESLOCAMENTO NA FUNÇÃO. *Sejam $a > 0$ e $H(t-a)$ a função de Heaviside unitária. Se $\mathscr{L}[f](s)$ então*

$$\mathscr{L}[f(t-a)H(t-a)] = e^{-as}\mathsf{F}(s)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathscr{L}[f(t)H(t-a)] = e^{-as}\mathscr{L}[f(t)]\cdot$$

Propriedade A.6. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE UMA DERIVADA. *Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujas derivadas até ordem $(n-1)$ são contínuas no intervalo fechado $[0, c] \subset \mathbb{R}$, com $c > 0$ e a derivada de ordem n é contínua por partes no intervalo $[0, c] \subset \mathbb{R}$, de modo que existam constantes $M > 0$ e $t_0 > 0$ tais que são válidas as desigualdades*

$$|f(t)| \leq M\, e^{bt}, \quad \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)\right| \leq M\, e^{bt}, \ \ldots, \left|\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} f(t)\right| \leq M\, e^{bt}$$

para todo $t > t_0$. Então, para $\mathrm{Re}(s) > b$, temos

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f\right](s) = s^n \mathscr{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1-k}}{\mathrm{d}t^{n-1-k}} f\bigg|_{t=0}\right)\right].$$

Exemplo A.6. *A partir da propriedade da transformada de Laplace de uma derivada, explicite as expressões para a transformada de Laplace das derivadas de ordem um e de ordem dois. Utilizando a* **Propriedade A.6**, *podemos escrever para a transformada de Laplace da derivada primeira, bastando para isso, considerar $n = 1$, logo*

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\right](s) = s\mathscr{L}[f](s) - f(0) = s\mathsf{F}(s) - f(0)$$

enquanto, para a transformada de Laplace da derivada segunda, tomamos $n = 2$, de onde segue

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f\right](s) = s^2 \mathscr{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{1} s^k \left[\left(\frac{\mathrm{d}^{1-k}}{\mathrm{d}t^{1-k}} f\bigg|_{t=0}\right)\right]$$

ou ainda, simplificando, na seguinte forma

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f\right](s) = s^2\mathscr{L}[f](s) - sf(0) - f'(0) = s^2\mathsf{F}(s) - sf(0) - f'(0)$$

onde a linha denota a derivada em relação a t e calculada em $t = 0$.

Propriedade A.7. Transformada de Laplace da convolução. *Sejam as transformadas de Laplace de $f(t)$ e $g(t)$, denotadas por $\mathscr{L}[f](s) = \mathsf{F}(s)$ e $\mathscr{L}[g](s) = \mathsf{G}(s)$, respectivamente, desde que existam. A transformada de Laplace do produto de convolução, denotado por $\mathscr{L}[f(t) \star g(t)](s)$, é igual ao produto das transformadas de Laplace das funções $f(t)$ e $g(t)$*

$$\mathscr{L}[f(t) \star g(t)](s) = \mathscr{L}[f](s)\mathscr{L}[g](s) = \mathsf{F}(s)\mathsf{G}(s),$$

onde o produto de convolução de Laplace é dado por

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\cdot$$

Exemplo A.7. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ um parâmetro tal que $0 < \alpha < 1$ e $T(t)$ uma função conhecida. Determine a função $f(t)$ satisfazendo a chamada equação integrodiferencial (integral contendo uma derivada no integrando) de Abel*

$$T(t) = \int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\alpha}\,\mathrm{d}\tau\cdot$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros dessa equação integrodiferencial e utilizando o produto de convolução, temos

$$T(s) = \mathscr{L}[f'(t)]\mathscr{L}[t^{-\alpha}]$$

onde s é o parâmetro da transformada de Laplace e $T(s)$ é a transformada de Laplace da função conhecida, $T(t)$. Visto que são conhecidas as transformadas de Laplace da função potência e da derivada primeira, e rearranjando, podemos escrever

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{T(s)}{\Gamma(1-\alpha)}s^{-\alpha}$$

onde $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$ e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama. A fim de obter a solução, isto é, determinar $f(t)$ devemos proceder com o processo inverso, o que será apresentado após a introdução da transformada de Laplace inversa.

Propriedade A.8. Derivada da transformada de Laplace. *Sejam* $\mathscr{L}[f](s) = \mathsf{F}(s)$ *a transformada de Laplace da função* $f(t)$*, admitida existir e* $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Então, temos*

$$\mathscr{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} \mathsf{F}(s)\cdot$$

A.4.2 Transformada de Laplace inversa

A região de convergência desempenha um importante papel na definição da transformada de Laplace bilateral, o que vai ocorrer, também, na respectiva transformada de Laplace inversa, denotada por $\mathscr{L}^{-1}[\mathsf{F}](t) = f(t)$. A fim de obter uma expressão para a transformada de Laplace inversa, introduzimos $s = \sigma + i\tau$, com $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ na definição da transformada de Laplace bilateral. Então, uma representação integral para a transformada de Laplace inversa, no plano complexo, é dada por

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[\mathsf{F}](t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau\to\infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} e^{st}\, \mathsf{F}(s)\, \mathrm{d}s\,,$$

onde $\mathrm{Re}(s) > \sigma$, de modo que todas as singularidades da função $\mathsf{F}(s)$ estejam à esquerda da reta $\mathrm{Re}(s) = \sigma$, no plano complexo. Destacamos que a integral deve ser calculada por meio das variáveis complexas o que foge ao escopo do presente trabalho. Aqui, discutimos apenas os resultados, pois com isso completamos o que atende pelo nome de metodologia da transformada integral, isto é, depois de obtermos a transformada de Laplace devemos recuperar a função de partida através da transformada de Laplace inversa [25].

Então, a metodologia da transformada integral transfere o problema inicial para um outro, supostamente mais simples de ser resolvido para, ao final, recuperarmos a solução do problema inicial, através da transformada inversa o que é feito com a ajuda do plano complexo, $s = \sigma + i\tau$ com $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. No caso particular da transformada de Laplace, o contorno é o chamado contorno de Bromwhich, também denotado por Br. Esse contorno é composto por uma linha reta paralela ao eixo vertical, $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 0$ e a parte imaginária, denotada por $\mathrm{Im}(s) = \tau$, tal que $-\infty < \tau < +\infty$, de modo que os pontos singulares estejam posicionados à esquerda da linha reta vertical. Na prática, visto que devemos ter um contorno fechado, conduzimos o contorno de Bromwhich, através de uma deformação contínua no chamado contorno de Hankel, denotado por $\mathsf{Ha}(+)$, começando em $-\infty$, ao longo do lado inferior do semieixo real negativo, contornando, no sentido positivo, o disco circular $|s| = \sigma_0$, com $\sigma_0 < \sigma$ e terminando em $-\infty$, ao longo do lado superior do semieixo real negativo [21, 25].

Exemplo A.8. *A partir do* **Exemplo A.7**, *aplicar a transformada de Laplace inversa na equação a seguir, a fim de obter $f(t)$, a transformada de Laplace inversa, $\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$,*

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{T(s)}{\Gamma(1-\alpha)} s^{-\alpha}$$

onde s é o parâmetro da transformada de Laplace.

Aplicando a transformada de Laplace inversa na equação precedente e simplificando, obtemos

$$f(t) = f(0) + \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\pi} \int_0^t T(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}\, \mathrm{d}\tau$$

onde utilizamos o produto de convolução e o resultado $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi\alpha}$, isto é, a bem conhecida fórmula de reflexão [21].

Bibliografia

[1] AGARWAL, R. P. A propos d'une note de M. Pierre Humbert. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 236, p. 2031–2032, 1953.

[2] CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. de. *Cálculo Fracionário*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

[3] CAPUTO, M. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent – II. *J. Roy. Astron. Soc.*, v. 1967, p. 529–539, 1967.

[4] CAPUTO, M.; FABRIZIO, M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Prog. Frac. Differ. Appl.*, v. 2, p. 73–85, 2015.

[5] COLE, K. S.; COLE, R. H. Difusion and absorption in dielectrics I. Alternating currents characteristics. *J. Chem. Phys.*, v. 9, p. 341–351, 1941.

[6] DEBYE, P. *Polar Molecules*. New York: Dover, 1929.

[7] DIETHELM, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.

[8] GORENFLO, R. et al. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Heidelberg: Springer, 2014.

[9] HERRMANN, R. *Fractional Calculus*: An introduction for physicists. New Jersey: World Scientific, 2011.

[10] KAMAT, S. G. Relativistic tautochrone. *J. Math. Phys.*, v. 33, p. 934–940, 1991.

[11] LOVE, E. R. Changing the order of integration. *J. Austral. Math. Soc.*, v. 9, p. 421–432, 1970.

[12] MACHADO, J. A. T.; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. A poster about the old hystory of fractional calculus. *Fract. Calc. & Appl. Anal.*, v. 13, p. 447–454, 2010.

[13] MACHADO, J. A. T.; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. A poster about the recent hystory of fractional calculus. *Fract. Calc. & Appl. Anal.*, v. 13, p. 329–334, 2010.

[14] MAINARDI, F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*: An introduction to mathematical models. London: Imperial College, 2010.

[15] MATHAI, A. M.; HAUBOLD, H. J. *Matrix Methods and Fractional Calculus*. New Jersey: World Scientific, 2017.

[16] MILLER, K. S.; ROSS, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1993.

[17] MITTAG-LEFFLER, G. M. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 137, p. 554–558, 1903.

[18] MORI, H. A continued-fractional representation of the time correlation function. *Prog. Theor. Phys.*, v. 30, p. 399–416, 1965.

[19] OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. *The Fractional Calculus*. San Diego: Academic Press, 1974.

[20] OLIVEIRA, E. C. de. *Funções Especiais com Aplicações*. Segunda edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

[21] OLIVEIRA, E. C. de. *Solved Exercises in Fractional Calculus*. Heidelberg: Springer, 2019.

[22] OLIVEIRA, E. C. de. Sobre a clássica função de Mittag-Leffler. *Revista Matemática Universitária*, v. 1, 2020.

[23] OLIVEIRA, E. C. de; MACHADO, J. A. T. A review of definitions for fractional derivatives and integrals. *Math. Prob. Ing.*, v. 2014, 2014.

[24] OLIVEIRA, E. C. de; MAINARDI, F.; VAZ Jr., J. Models based on Mittag-Leffler functions for anomalous relaxation in dielectrics. *The European Physical Journal*, v. 193, p. 161–171, 2011.

[25] OLIVEIRA, E. C. de; RODRIGUES Jr., W. A. *Funções Analíticas e Aplicações*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.

[26] OLIVEIRA, E. C. de; VAZ Jr., J. *Pré-Cálculo*. Primeira edição. http://pre-calculo.org: Edmundo Capelas de Oliveira, 2018.

[27] ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. A. T. What is a fractional derivative? *J. Comp. Phys.*, v. 293, p. 4–13, 2015.

[28] PLATA, A. R. G.; OLIVEIRA, E. C. de. *Introducción al Cálculo Fraccional*. Primeira edição. Bogotá: Editorial Neogranadina, 2019.

[29] PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations*. San Diego: Academic Press, 1999.

[30] PRABHAKAR, T. R. A singular integral equation with generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Yokohama Math. J.*, v. 19, p. 7–15, 1971.

[31] PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. *Integral and Series*: Elementary functions. London: Gordon and Breach Science Publishers, 1986.

[32] ROSA, E. C. F. A.; OLIVEIRA, E. C. de. Relaxation equations: Fractional models. *J. Phys. Math.*, v. 6, p. 146–154, 2015.

[33] SNEDDON, I. N. *Fourier Transforms*. New York: Dover Publications, 1995.

[34] TEODORO, G. S. *Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler*. Dissertação (Mestrado) — Imecc, Unicamp, Campinas, 2014.

[35] TEODORO, G. S.; MACHADO, J. A. T.; OLIVEIRA, E. C. de. A review of definitions of fractional derivatives and other operators. *J. Comput. Phys.*, v. 388, p. 195–208, 2019.

[36] THOMAS, G. B. *Cálculo*. Décima primeira edição. São Paulo: Pearson/Addison Wesley, 2008.

[37] VAZ Jr., J.; OLIVEIRA, E. C. de. *Métodos Matemáticos*. Campinas: Editora da Unicamp, 2016.

[38] WITTAKER, E. T.; WATSON, G. N. *A Course of Modern Analysis*. Fourth. Cambridge: Cambridge Mathematical Library, 1996.

[39] ZWANZIG, R. *Lectures in Theoretical Physics*. New York: Interscience, 1961.

Índice

Abel
    equação de, 44
    equação integral de, 44
Arco dobro, 12

Beta, função, 36
Bromwich, contorno de, 87

Caputo
    derivada de, 31, 52
    formulação de, 31
    relação com Riemann-Liouville, 33
Caputo, derivada de, 68, 70
Constante de Euler-Mascheroni, 75
Contorno de
    Bromwich, 87
    Hankel, 87
Convergência, região de, 82
Convolução, produto de, 35

Derivada, 8
    da função potência, 25
    de Caputo, 31, 52
    de Grünwald-Letnikov, 22
    de ordem inteira, 8
    de ordem não inteira, 21
    de Riemann-Liouville, 30, 52, 61
    de uma constante, 52
    outras formulações, 36
Dirichlet, fórmula de, 34

Efeito de memória, 58
Equação
    integral, 67
Equação
    algébrica, 51
    diferencial, 50
        coeficientes não constantes, 62
        fracionária, 62
    fracionária, 50
    integral, 57
    integrodiferencial fracionária, 56
Equações, sistema de, 60
Euler-Mascheroni, constante de, 75

Fórmula de
    duplicação, 76
    reflexão, 58, 76, 88
Função
    beta, 36
    de Mittag-Leffler
        com dois parâmetros, 69
        com um parâmetro, 69
Função
    admissível, 83
    beta, 21, 55, 58, 63, 74
        propriedades, 76
        relação com gama, 76
    contínua, 13
    de Gelfand-Shilov, 47, 78
    de Heaviside, 85
    de Mittag-Leffler, 79

clássica, 46, 60, 61
com dois parâmetros, 54, 79
com três parâmetros, 43, 78, 80
derivada de, 81
trigonometria, 46
de ordem exponencial, 83
de Prabhakar, 43, 78
degrau unitário, 82
gama, 21, 55, 58, 63, 74
duplicação, 76
recorrência, 75
relação com beta, 76
hipergeométrica confluente, 80
limitada, 83
valor médio de, 11

Gauss, função gama, 75
Gelfand-Shilov, função de, 47, 78
Grünwald-Letnikov, derivada de, 22

Hankel, contorno de, 87
Heaviside, função de, 85

Integração
ordem de, 34
por partes, 4
Integral
da função potência, 25
de Riemann-Liouville, 21, 47
definida, 59
ordem inteira, 3
derivada, 4
ordem não inteira, 20
derivada, 20

Laplace, transformada de, 61, 69
Lei dos expoentes, 33
Leibniz, regra de, 72

Massa-mola, 69
fracionário, 69
sistema, 67, 69
Mittag-Leffler, função de, 61, 79
Modelo de
Cole-Cole, 61
Debye, 61

Newton, lei de, 65

Operador deslocamento, 27
Oscilador
harmônico, 67, 69
amortecido, 67, 69
fracionário, 68
simples, 67, 69

Pochhammer, símbolo de, 43, 78
Problema de valor inicial, 53
fracionário, 55
Produto de convolução, 69
Propriedade de semigrupo, 33

Região de convergência, 82
Regra de Leibniz, 72
Relação fundamental da trigonometria, 12
Riemann-Liouville
derivada de, 30, 45, 52
formulação de, 30
integral de, 21, 47
relação com Caputo, 33
Riemann-Liouville, derivada de, 72

Semigrupo, propriedade de, 34, 38
Série do binômio, 43

Tautócrona, 44
Teorema
do valor médio, 11, 12
fundamental do cálculo, 11, 13
Transformada de Laplace

bilateral, 81
convolução, 4, 57, 86
da derivada, 85
de Caputo, 48
de Riemann-Liouville, 49
derivada, 54
existência, 83
função potência, 42
inversa, 87
propriedades, 81, 84
região de convergência, 82
Riemann-Liouville, 47

Valor
inicial, problema de, 53
médio, 13

Weierstrass, função gama, 75