

Volume 17, 2023

Corpo Editorial

Sandra Mara Cardoso Malta (Editor Chefe)

Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC
Petrópolis, RJ, Brasil

Eduardo V. O. Teixeira (Editor Executivo)

University of Central Florida - UCF
Orlando, FL, EUA

Lilian Markenzon

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Marcelo Sobottka

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Florianópolis, SC, Brasil

Paulo F. Arruda Mancera

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP
Botucatu, SP, Brasil

Sandra Augusta Santos

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Campinas, SP, Brasil

Tânia Schmitt

Universidade de Brasília - UnB
Brasília, DF, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série *Notas em Matemática Aplicada* devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex, com as figuras em .eps, .pdf e etc.** e ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo. O idioma pode ser Português ou Espanhol.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
<http://https://proceedings.science/notas-sbmac>

TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY COM APLICAÇÕES

3ª edição

Rosana Sueli da Motta Jafelice
rmotta@ufu.br

Faculdade de Matemática
Universidade Federal de Uberlândia

Laécio Carvalho de Barros
laeciocb@ime.unicamp.br

Rodney Carlos Bassanezi
rodney@ime.unicamp.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2023

Coordenação Editorial: Mateus Bernardes

Coordenação Editorial da Série: Sandra M. C. Malta

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2023 by Rosana Sueli da Motta Jafelice, Laécio Carvalho de Barros e Rodney Carlos Bassanezi. Direitos reservados, 2023 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Jafelice, Rosana S. M.

Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações - São Carlos, SP :
SBMAC, 2023, 136 p., 21,5 cm - (Notas em Matemática
Aplicada; v. 17)

ISBN 978-65-86388-14-5 e-ISBN 978-65-86388-13-8

1. Computação-Matemática 2. Conjuntos Fuzzy 3. Sistemas Difusos
I. Jafelice, Rosana S. M. II. Barros, Laécio C.
III. Bassanezi, Rodney C.. IV. Título. V. Série

CDD - 51

Aos meus filhos Mateus e Lucas.
Ao meu netinho Kenshin.
Aos meus amigos.
Dedicamos

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq sob o número 314885/2021-8.

Conteúdo

Prefácio	xiii
1 Conjuntos Fuzzy	1
1.1 Introdução	1
1.2 Conjuntos Fuzzy	2
1.3 Representações de Conjuntos Fuzzy	4
1.4 Operações entre Conjuntos Fuzzy	8
1.5 Normas Triangulares	12
1.6 Níveis de um Conjunto Fuzzy	14
1.7 Números Fuzzy	16
1.8 Princípio de Extensão de Zadeh	19
1.9 Operações Aritméticas com Números Fuzzy	22
1.10 Esperança Fuzzy	27
Exercícios	28
2 Sistema Baseado em Regras Fuzzy	31
2.1 Introdução	31
2.2 Relações Fuzzy	31
2.3 Composição entre Relações Fuzzy	32
2.4 Equações Relacionais Fuzzy	33
2.5 Regras e Inferência Fuzzy	34
2.6 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy	34
2.7 Aplicações do SBRF: Método de Mamdani	39
2.7.1 Vitalidade das Violetas	39
2.7.2 Grau de Risco da Obesidade	41
2.7.3 Qualidade da Água	44
2.7.4 Taxa de Infecção: Coronavírus	48
2.8 ANFIS	50
2.9 Aplicação do SBRF: Método de Takagi-Sugeno	53
2.9.1 Taxa de Infecção do Linfócito T do tipo $CD4+$ pelo HIV	53
Exercícios	54

3	Aplicações Gerais	57
3.1	Introdução	57
3.2	Diagnóstico Médico	57
3.2.1	Base de Conhecimentos	57
3.3	Modelo de Evolução da AIDS	60
3.3.1	Informações Médicas sobre HIV	61
3.3.2	Variáveis Linguísticas e Base de Regras	64
3.3.3	Esperança Fuzzy da População Assintomática	68
3.3.4	População Assintomática com a Taxa de Transferência no Valor Modal	72
3.3.5	Esperança Fuzzy da Taxa de Transferência	73
3.3.6	Comparações entre Populações HIV via Esperança Fuzzy	75
3.3.7	Comentários Finais	75
3.4	Eliminação de Fármacos do Organismo	76
3.4.1	Modelo Farmacocinético Clássico	76
3.4.2	A Meia-Vida ($t_{\frac{1}{2}}$) de um Fármaco	77
3.4.3	Modelo Farmacocinético Fuzzy	77
3.4.4	Base de Regras	79
3.4.5	Insuficiência Renal e a Eliminação de Fármacos	80
3.4.6	Comentários Finais	82
3.5	Método de TSK em Modelos Farmacocinéticos Multi-compartimentais	84
3.5.1	Introdução	84
3.5.2	Modelagem Fuzzy	84
3.5.3	Comentários Finais	88
	Exercícios	88
4	Aplicações via Sistemas p-fuzzy	89
4.1	Introdução	89
4.2	Sistema p-fuzzy de Malthus	91
4.2.1	Sistema p-fuzzy com o Método de Inferência de Mamdani para Modelo Malthusiano	91
4.2.2	Sistema p-fuzzy com o Método de Inferência de Takagi-Sugeno para Modelo Malthusiano	93
4.3	Sistema p-fuzzy de Transferência da População HIV Assintomática para Sintomática	94
4.3.1	Sistema p-fuzzy com o Método de Inferência de Mamdani para uma População HIV	95
4.3.2	Sistema p-fuzzy com o Método de Inferência de Takagi-Sugeno para População HIV	97
4.4	Modelo Presa-Predador Fuzzy	98

4.4.1	Exemplo Realístico de Presa-Predador: Lebres e Lince na Baía de Hudson	98
4.4.2	Modelo Clássico	99
4.4.3	Sistema p-fuzzy com Método de Inferência de Mamdani para Modelo Presa-Predador	100
4.4.4	Sistema p-fuzzy com Método de Inferência de Takagi-Sugeno para Modelo Presa-Predador	111
4.4.5	Algumas Considerações Finais	115
	Exercícios	115

Bibliografia**117**

Prefácio

A teoria dos conjuntos fuzzy, introduzida por Lotfi A. Zadeh em 1965, tem intenção de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos, como “aproximadamente”, “em torno de”, dentre outros. Esse seria um primeiro passo para se representar e armazenar, em um computador, informações incertas, tornando possível o cálculo com estas, a exemplo do que faz o ser humano. Por exemplo, há um consenso que adicionar uma quantia em “torno de 3” a outra “em torno de 2” resulta em uma terceira “em torno de 5”. Devido a essa possibilidade, a teoria dos conjuntos fuzzy tem se tornado uma das áreas emergentes em tecnologia contemporânea. Nas engenharias, os denominados controladores fuzzy têm sido largamente utilizados em eletrodomésticos, com o objetivo imitar o ser humano na execução de algumas tarefas.

No texto são apresentados conceitos e ferramentas básicas desta teoria, como função de pertinência, variáveis linguísticas, sistema baseado em regras fuzzy, os métodos de inferência de Mamdani e de Sugeno com suas utilizações nos chamados sistemas p-fuzzy. Em seguida, é ilustrado o poder de tais ferramentas por meio de aplicações em Biomatemática. Algumas destas aplicações são típicas de dinâmica de população, como a da evolução da AIDS, e outras que tratam de diagnóstico médico.

Nesta nova edição alguns tópicos, como o *Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System* (ANFIS) são acrescentados. A principal diferença em relação às edições anteriores, é a inserção do Capítulo 4, o qual destaca os sistemas p-fuzzy para modelar a evolução de sistemas dinâmicos via base de regras fuzzy que modelam as variáveis de estado do fenômeno em estudo. Para esses casos, além de métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias (como o de Euler), são adicionados os métodos numéricos explícitos de passos múltiplos para estimar as soluções dos sistemas p-fuzzy.

Uberlândia, 20 de junho de 2023.

Rosana Sueli da Motta Jafelice
Laécio Carvalho de Barros
Rodney Carlos Bassanezi

Capítulo 1

Conjuntos Fuzzy

Uma semente não constitui uma pilha nem duas nem três ...mas por outro lado todo mundo irá concordar que 100 milhões de sementes constituem uma pilha. Afinal qual é o limite apropriado? Podemos dizer que 325647 sementes não constituem uma pilha mas 325648 constituem? (Borel 1950)

1.1 Introdução

A característica essencial da modelagem matemática, utilizando sistemas de equações determinísticas, é a precisão obtida nas previsões de fenômeno. Evidentemente, tais previsões ou inferências estão sempre dependentes de informações precisas que são inseridas nos *valores médios* dos parâmetros utilizados. Por outro lado, nos modelos estocásticos, as soluções médias dos modelos são obtidas *a posteriori* quando se tem alguma distribuição estatística de dados referentes ao fenômeno analisado.

Os modelos estocásticos são frequentemente utilizados para analisar variações sujeitas às distribuições de dados estatísticos. Entretanto, para modelar alguma situação em que seus elementos ou variáveis são heterogêneos, relativamente a alguma característica, deve-se considerar o comportamento desta característica no processo evolutivo. Por exemplo, uma população de “*fumantes*” num instante t_0 , sujeita a alguma taxa de mortalidade, o interesse pode ser como estará composta esta população no futuro. Caso se considere que cada indivíduo desta população é simplesmente fumante ou não fumante o problema pode ser resolvido com um modelo determinístico, tomando separadamente ambas as populações. Por outro lado, se inicialmente uma distribuição de probabilidades dos fumantes desta população é considerada, pode-se usar um modelo estocástico para estudar a evolução desta distribuição inicial. Agora, se a característica de ser *fumante* depender da

quantidade de cigarros que se fuma diariamente, qualidade dos cigarros fumados, intermitência do ato de fumar e outras particularidades, deve-se caracterizar também o *grau* de ser fumante. Neste caso, cada indivíduo pertence à população de *fumantes* com um *grau específico de pertinência*. Se não fumar, seu grau de pertinência é zero, se fumar 3 carteiras diárias pode-se dizer que é um fumante de grau 1. Agora, se o indivíduo fumar 10 cigarros por dia o quanto ele será *fumante*? Esta subjetividade, ser fumante, pode ser caracterizada pela teoria dos conjuntos fuzzy.

Um subconjunto *fuzzy* de um conjunto é caracterizado por uma função $u_A : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$, em que $u_A(x)$ atribui o grau com que o elemento x pertence ao subconjunto fuzzy A .

Os modelos clássicos de biomatemática, particularmente, os modelos de dinâmica populacional e epidemiologia são fundamentados em hipóteses, quase sempre, provenientes da físico-química sendo o encontro de duas substâncias (variáveis de estado) modelado pelo produto de sua concentração - *lei da ação das massas*. Isto é usado nos modelos de Lotka-Volterra de interação de duas espécies ou nos modelos de Kermak-Mackendrick de epidemiologia. A taxa de predação do modelo presa-predador ou a força de infecção dos modelos epidemiológicos são valores médios obtidos empiricamente ou simulados o que nem sempre traduz corretamente o fenômeno correspondente.

Por outro lado, a população de *presas* de uma determinada espécie pode ser considerada como um subconjunto fuzzy, se associarmos a cada presa a *facilidade como é predada*, o que está relacionada com a sua idade, seu estado de saúde, habitat . Variáveis deste tipo são muito frequentes em fenômenos biológicos e difíceis de serem avaliadas como médias de dados experimentais.

Os modelos variacionais fuzzy podem comportar vários tipos de subjetividade (*fuzziness*), dependendo da escolha da variável de estado e dos parâmetros dos modelos. Tem-se uma *fuzziness demográfica* quando a variável de estado é um subconjunto fuzzy, e *fuzziness ambiental* quando somente os parâmetros são considerados subconjuntos fuzzy. Em geral ambos o tipos de *fuzziness* estão presentes nos fenômenos biológicos.

1.2 Conjuntos Fuzzy

Um *subconjunto fuzzy* A de um universo \mathcal{U} é definido em termos de uma função de pertinência u_A que a cada elemento x de \mathcal{U} associa um número $u_A(x)$ entre *zero* e *um* chamado de grau de pertinência de x a A . Assim,

$$u_A : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1].$$

Os valores $u_A(x) = 1$ e $u_A(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência do elemento x a A . Um subconjunto fuzzy também pode ser identificado por um conjunto clássico de pares ordenados:

$$G = \{(x, u_A(x)) | x \in \mathcal{U}\},$$

que é o gráfico da função de pertinência.

É interessante notar que um subconjunto clássico A de \mathcal{U} é um particular conjunto fuzzy para o qual a função de pertinência é a função característica de A , isto é,

$$u_A : \mathcal{U} \rightarrow \{0, 1\}.$$

Do ponto de vista formal, a definição de subconjunto fuzzy foi obtida simplesmente ampliando-se o contra domínio da função característica, que é o conjunto $\{0,1\}$, para o intervalo $[0,1]$. O exemplo a seguir pode ser considerado como um caso típico de subconjunto fuzzy.

Exemplo 1.1. *Considere o subconjunto fuzzy F dos números inteiros próximos de zero:*

$$F = \{n \in Z \mid n \text{ é próximo de zero}\}.$$

O número 0 (zero) pertence a esse conjunto? E o número 1000? Dentro do espírito da lógica fuzzy, pode-se dizer que ambos pertencem a F porém com diferentes graus de pertinência, de acordo com a propriedade que caracteriza o conjunto. Ou seja, a função de pertinência de F deve ser “construída” de forma coerente com o termo “pequeno” que caracteriza seus elementos no conjunto universo dos números naturais. Uma possibilidade para a função de pertinência de F é

$$u_F(n) = \frac{1}{n^2 + 1}. \quad (1.2.1)$$

Se esse for o caso, pode-se dizer que o número 0 pertence a F com grau de pertinência $u_F(0) = 1$, enquanto 1000 pertence a F com grau de pertinência $u_F(1000) \cong 10^{-6}$, veja Figura 1.1.

Note que a escolha da função u_F neste caso foi feita de maneira totalmente arbitrária, levando em conta apenas o significado da palavra “pequeno”. Portanto, existem infinitas maneiras de modelar matematicamente o conceito de ‘número natural pequeno’. Uma outra maneira possível é

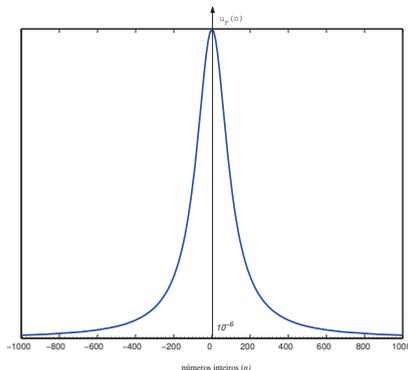


Figura 1.1: Conjunto fuzzy dos números inteiros “próximos de zero”.

$$u_F(n) = \frac{n + 1}{n^4 + 1}. \quad (1.2.2)$$

Claro que a escolha dessas funções para representar o conjunto fuzzy em questão depende de como tais funções estão relacionadas com o contexto do problema a ser estudado. Do ponto de vista apenas da teoria de conjuntos fuzzy, qualquer uma das duas funções de pertinência (1.2.1) ou (1.2.2), pode ser representante do conjunto fuzzy F . Porém, o que deve ser notado é que cada uma destas funções produz conjuntos fuzzy distintos. Finalmente, está implícito que dois conjuntos fuzzy A e B são iguais quando $u_A(x) = u_B(x)$, para todo $x \in \mathcal{U}$.

Exemplo 1.2. *O conjunto fuzzy dos fumantes dado por $u(c, t) = \frac{ct}{20+ct}$, em que c é proporcional ao número de cigarros fumados por unidade de tempo e t o tempo em que o indivíduo fumou durante sua vida [6].*

A seguir são apresentadas algumas representações de conjuntos fuzzy.

1.3 Representações de Conjuntos Fuzzy

As representações das funções de pertinências que definem um conjunto fuzzy facilitam a visualização deste conjunto. São comuns as formas tabular (ou de lista), gráfica e analítica. Para universos finitos, os conjuntos fuzzy podem ser representados por tabelas. Tais tabelas listam todos os elementos do universo com seus respectivos graus de pertinência ao conjunto fuzzy. O exemplo a seguir é uma ilustração

deste caso.

Exemplo 1.3. Considere X o conjunto dos estudantes de uma escola e A o subconjunto de X , formado pelo Fernando, Carlos, Márcia e André. Nem todos os estudantes do conjunto A estudam diligentemente, de modo que alguns têm um grau de **mais estudiosos**, outros **menos estudiosos** variando entre 0 e 1. Para os estudantes citados, A é dado pela Tabela 1.1 [50].

Tabela 1.1: Estudantes e graus de estudo.

Estudante	Grau de Estudo
Carlos	0,3
Márcia	0,7
Fernando	0,8
André	0,9

Alternativamente à Tabela 1.1, é comum escrever da seguinte forma:

$$A=0,8/\text{Fernando} + 0,3/\text{Carlos} + 0,7/\text{Márcia} + 0,9/\text{André}.$$

O símbolo “/” é apenas usado para associar o elemento do conjunto universo X e seu grau de pertinência ao conjunto fuzzy A . Também, o símbolo + não significa soma; simplesmente conecta os elementos do conjunto. Para esse caso, a forma geral para representar o conjunto fuzzy A , quando X é finito, é:

$$A = \sum u_A(x)/x.$$

Uma outra forma de se representar um conjunto fuzzy é feita graficamente. A representação gráfica é a mais usada na literatura fuzzy por ter uma interpretação mais intuitiva. No caso de se fazer representação em duas dimensões, o eixo vertical representa o grau de pertinência no intervalo $[0,1]$, e o eixo horizontal contém a informação a ser modelada.

A seguir três exemplos de representação gráfica de conjuntos fuzzy são apresentadas. No exemplo 1.4, a representação é uma curva que inicia em 1 (no eixo vertical) e se aproxima do eixo horizontal, ou seja, é uma curva decrescente. No exemplo 1.5 é uma curva que cresce e depois decresce, na forma de sino. No exemplo 1.6, a representação é uma curva que inicia próxima ao eixo horizontal e vai crescendo até o limite de 1.

Exemplo 1.4. *Um conjunto fuzzy J compatível com o conceito de jovem deve, no mínimo, indicar que, quanto menos idade um indivíduo tiver, mais jovem será. Sua função grau de pertinência u_J pode ser representada como na Figura 1.2 [50].*

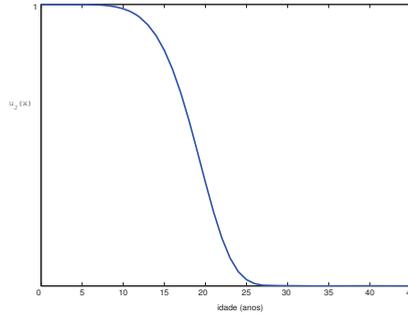


Figura 1.2: Função de pertinência de jovens.

Exemplo 1.5. *O conjunto fuzzy de pessoas de “meia idade” poderia ser representado pela função u_A ilustrada na Figura 1.3.*

Neste exemplo, a curva tem a forma de sino, crescendo da esquerda para a direita até uma certa idade, e depois decrescendo com a idade. Que a curva deva ter esta forma acreditamos que é consenso. As controvérsias talvez apareçam a respeito da idade, onde há mudança do crescimento da curva [50].

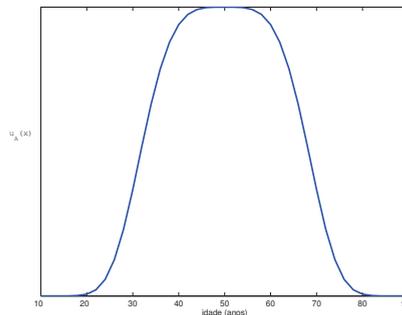


Figura 1.3: Função de pertinência de pessoas de meia idade.

Exemplo 1.6. *Suponha que a universidade defina níveis de experiência acadêmica, de acordo com o número de créditos feitos pelos alunos, conforme a Tabela 1.2 [50].*

Tabela 1.2: Níveis de experiência acadêmica.

Nível	Créditos (em horas)
Iniciante	0 - 42
Segundanista	43 - 82
Júnior	83 - 114
Sênior	115 - 146

*Ao contrário da teoria clássica de conjuntos que definiriam precisamente os níveis de experiência, o termo vago **grau de experiência acadêmica** corresponde a um genuíno conjunto fuzzy. Os créditos (em horas) é que classificam os níveis dos indivíduos, porém há diferenças de créditos dentro de cada nível. Por exemplo, o indivíduo com 126 créditos é **mais sênior** que aquele que tem 95 créditos. Uma representação gráfica para este exemplo pode ser a Figura 1.4.*

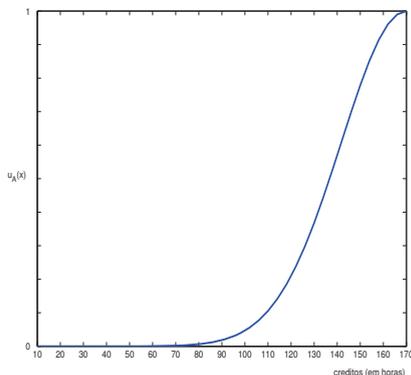


Figura 1.4: Função de pertinência para o nível sênior.

Nesta fase, em que os conjuntos fuzzy estão sendo definidos, é de fundamental importância as informações fornecidas pelo especialista da área do fenômeno estudado.

A representação analítica é também bastante utilizada na teoria dos conjuntos fuzzy. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 1.7. O conjunto fuzzy A dos números reais em torno de 6, pode ser representado analiticamente da seguinte forma:

$$u_A(x) = \begin{cases} x - 5, & \text{se } 5 \leq x < 6 \\ 7 - x, & \text{se } 6 \leq x \leq 7 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (1.3.3)$$

veja Figura 1.5.

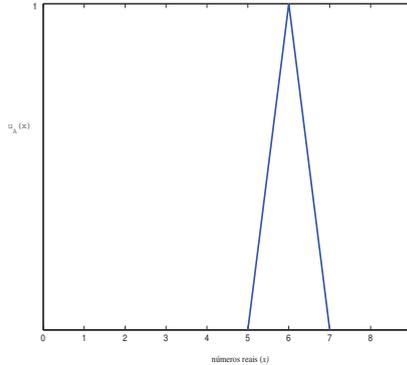


Figura 1.5: Conjunto fuzzy dos números reais ‘em torno de 6’.

Na próxima seção, são definidas as operações entre os conjuntos fuzzy.

1.4 Operações entre Conjuntos Fuzzy

Sejam A e B subconjuntos clássicos de \mathcal{U} representados pelas funções características u_A e u_B , respectivamente. Os conjuntos

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U}; x \in A \text{ ou } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U}; x \in A \text{ e } x \in B\},$$

$$A' = \{x \in \mathcal{U}; x \notin A\},$$

têm respectivamente as funções características, $\forall x \in \mathcal{U}$,

$$u_{A \cup B}(x) = \max\{u_A(x), u_B(x)\},$$

$$u_{A \cap B}(x) = \min\{u_A(x), u_B(x)\},$$

$$u_{A'}(x) = 1 - u_A(x).$$

Pensando novamente em conjuntos fuzzy como sendo caracterizados pelas funções de pertinências que são extensões de funções características, define-se união, intersecção e complementar de conjuntos fuzzy trocando a função característica pela função grau de pertinência.

Definição 1.1. *Sejam A e B conjuntos fuzzy (veja Figura 1.6). As funções de pertinência que representam os conjuntos fuzzy união (veja Figura 1.7), intersecção (veja Figura 1.8) e complementar (veja Figura 1.9) de conjuntos fuzzy são dadas por, $\forall x \in \mathcal{U}$,*

$$u_{A \cup B}(x) = \max\{u_A(x), u_B(x)\},$$

$$u_{A \cap B}(x) = \min\{u_A(x), u_B(x)\},$$

$$u_{A'}(x) = 1 - u_A(x).$$

respectivamente.

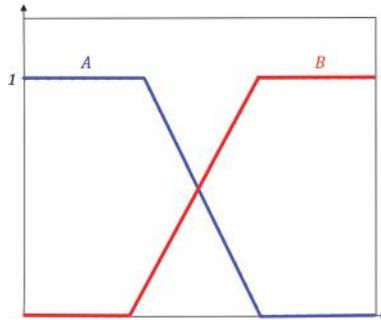


Figura 1.6: Conjuntos fuzzy A e B .

Particularmente, se A e B forem conjuntos clássicos, então as funções características das respectivas operações, anteriormente definidas, satisfazem estas igualdades, mostrando a coerência destas definições. Por exemplo, se A é um subconjunto (clássico) de \mathcal{U} , então a função característica do seu complementar é tal que $u_{A'}(x) = 0$ se $u_A(x) = 1$ (i.e. $x \in A$) e $u_{A'}(x) = 1$ se $u_A(x) = 0$ (i.e. $x \notin A$). Neste caso, ou $x \in A$ ou $x \notin A$. Na teoria fuzzy não necessariamente essa dicotomia ocorre, nem sempre é verdade que $A \cap A' = \emptyset$ assim como não é verdade que $A \cup A' = \mathcal{U}$. O exemplo a seguir ilustra tais fatos.

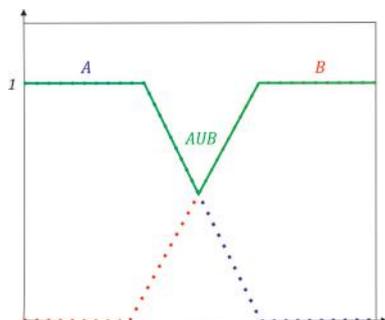


Figura 1.7: União dos conjuntos fuzzy.

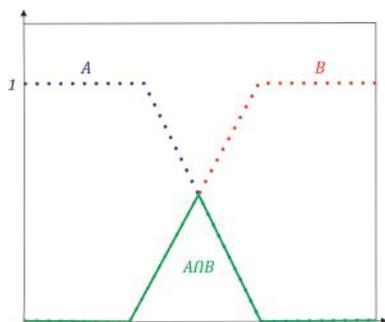


Figura 1.8: Intersecção dos conjuntos fuzzy.

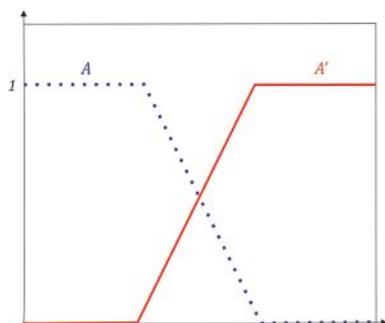


Figura 1.9: Complementar dos conjuntos fuzzy.

Exemplo 1.8. *Suponha que o conjunto universo U seja composto pelos pacientes de uma clínica, identificados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Se-*

jam A e B os conjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre e dor, respectivamente. A Tabela 1.3 ilustra a união, intersecção e o complemento.

Tabela 1.3: União, intersecção e complementar dos conjuntos A e B .

Paciente	Febre(u_A)	Dor(u_B)	$u_{A \cup B}$	$u_{A \cap B}$	$u_{A'}$	$u_{A \cap A'}$
1	0,7	0,6	0,7	0,6	0,3	0,3
2	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0
3	0,4	0,2	0,4	0,2	0,6	0,4
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
5	1,0	0,2	1,0	0,2	0,0	0,0

Os valores das colunas, exceto os da primeira, indicam os graus com que cada paciente pertence aos conjuntos fuzzy A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, A' , $A \cap A'$, respectivamente, em que A e B são supostamente dados. Na coluna $A \cap A'$, o valor 0,3 indica que o paciente 1 está tanto no grupo dos febris como dos não febris. Como foi dito anteriormente, este é um fato inadmissível na teoria clássica de conjuntos na qual ocorre a lei do terceiro excluído ($A \cap A' = \phi$).

Exemplo 1.9. Suponha que o conjunto universo \mathcal{U} seja composto por cinco projetos em uma empresa, identificados por 1, 2, 3, 4 e 5. Sejam A o conjunto fuzzy que representa os quatro projetos com os fundos financeiros e B o conjunto fuzzy dos risco dos projetos, que é uma incerteza positiva ou negativa que se ocorrer, poderá afetar um dos objetivos do projeto. A Tabela 1.4 ilustra, através das suas funções de pertinência (colunas 4,5 e 6, respectivamente da Tabela 1.4), a união, intersecção dos conjuntos A e B e o complemento de A [2].

Tabela 1.4: As funções de pertinência da união, intersecção dos conjuntos A e B (colunas 4 e 5 respectivamente) e na coluna 6 a função de pertinência do complemento de A .

Projeto	Fundos (u_A)	Risco (u_B)	$u_{A \cup B}$	$u_{A \cap B}$	$u_{A'}$	$u_{A \cap A'}$
1	0,2	0,85	0,85	0,2	0,8	0,2
2	0,4	0,7	0,7	0,4	0,6	0,4
3	0,5	0,55	0,55	0,5	0,5	0,5
4	0,7	0,35	0,7	0,35	0,3	0,3
5	0,9	0,2	0,9	0,2	0,1	0,1

Na coluna $u_{A \cap A'}$, o valor 0,5 indica que o projeto 3 está tanto no grupo de fundos razoável como dos fundos não razoável.

1.5 Normas Triangulares

As normas triangulares são generalizações dos operadores união e intersecção. Formalmente são definidas a seguir.

Definição 1.2. *Uma co-norma triangular (s -norma) é uma operação binária $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as seguintes condições:*

- *Comutatividade:* $xsy = ysx$;
- *Associatividade:* $xs(ysz) = (xsy)sz$;
- *Monotonicidade:* Se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $xsw \leq ysz$;
- *Condições de fronteira:* $xs0 = x$, $xs1 = 1$.

Claramente, o operador max é uma s -norma.

Exemplos:

1. **União Padrão:** $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xsy = \max(x, y)$, veja Figura 1.10.

2. **Soma Algébrica:** $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com

$$xsy = x + y - xy = 1 - (1 - x)(1 - y), \text{ veja Figura 1.11.}$$

3. **Soma Limitada:** $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com

$$xsy = \min(1, x + y), \text{ veja Figura 1.12.}$$

4. **União Drástica:** $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com

$$xsy = \begin{cases} x, & \text{se } y = 0 \\ y, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

veja Figura 1.13.

Definição 1.3. *Uma norma triangular (t -norma) é uma operação binária $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as seguintes condições:*

- *Comutatividade:* $xty = ytx$;
- *Associatividade:* $xt(ytz) = (xty)tz$;
- *Monotonicidade:* Se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $xtw \leq ytz$;
- *Condições de fronteira:* $0tx = 0$, $1tx = x$.

O operador min é uma t -norma.

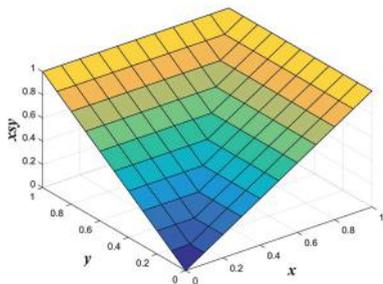


Figura 1.10: União Padrão.

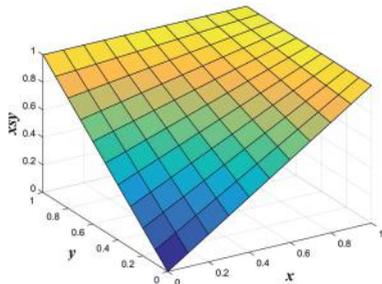


Figura 1.11: Soma Algébrica.

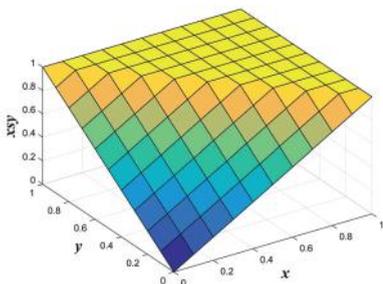


Figura 1.12: Soma Limitada.

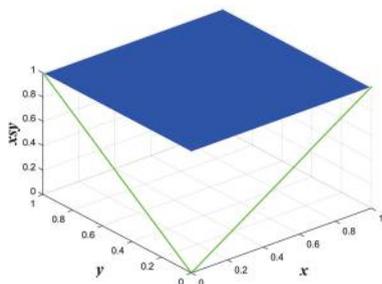


Figura 1.13: União Drástica.

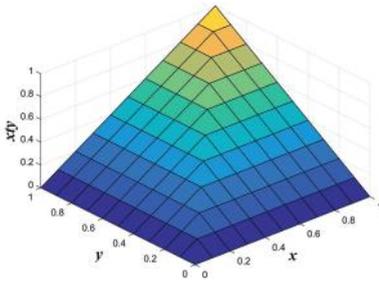


Figura 1.14: Intersecção Padrão.

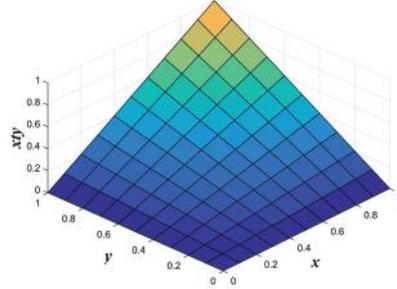


Figura 1.15: Produto Algébrico.

Exemplos:

1. **Intersecção Padrão:** $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xy = \min(x, y)$, veja Figura 1.14.
2. **Produto Algébrico:** $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xy = xy$, veja Figura 1.15.
3. **Diferença Limitada:** $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $xy = \max(0, x + y - 1)$, veja Figura 1.16.
4. **Intersecção Drástica:** $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com

$$xy = \begin{cases} x, & \text{se } y = 1 \\ y, & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

veja Figura 1.17.

Na próxima seção é definido o conceito de nível que é de fundamental importância na teoria de conjuntos fuzzy.

1.6 Níveis de um Conjunto Fuzzy

Definição 1.4. *Sejam A um conjunto fuzzy e $\alpha \in (0, 1]$. Defina-se como α -nível de A o conjunto*

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathcal{U} \mid u_A(x) \geq \alpha\}.$$

Definição 1.5. *Suporte de um conjunto fuzzy A são todos os elementos de \mathcal{U} que têm grau de pertinência diferente de zero em A e denota-se por $\text{supp}(A)$.*

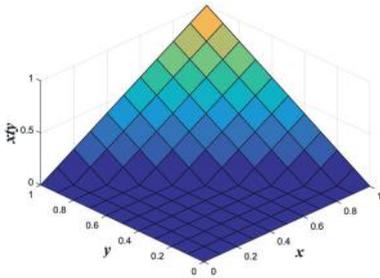


Figura 1.16: Diferença Limitada.

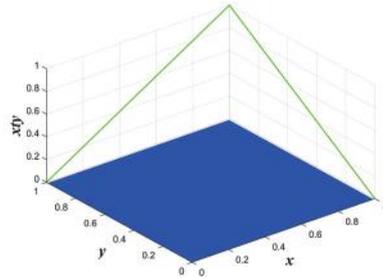


Figura 1.17: Intersecção Drástica.

$$\text{supp}(A) = \{x \in \mathcal{U} \mid u_A(x) > 0\}.$$

Assim, o nível zero de um conjunto fuzzy A é definido da seguinte forma.

Definição 1.6. *O nível zero de um conjunto fuzzy A do universo \mathcal{U} , em que \mathcal{U} é um espaço topológico, é o fecho topológico do suporte de A , isto é,*

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}.$$

Denota-se por $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ o conjunto de todos os conjuntos fuzzy de \mathcal{U} .

Exemplo 1.10. *Considere $\mathcal{U} = [0, 10]$ e o conjunto fuzzy A , cuja função de pertinência é $u_A(x) = \frac{x}{x+1}$, que é um ramo de hipérbole (veja Figura 1.18). Neste caso tem-se que:*

- os α -níveis do conjunto fuzzy A são

$$[A]^\alpha = \left[\frac{\alpha}{1-\alpha}, 10 \right], \text{ para } 0 < \alpha \leq \frac{10}{11}$$

$$[A]^\alpha = \emptyset, \text{ para } \frac{10}{11} < \alpha \leq 1;$$

- o suporte do conjunto fuzzy A é

$$\text{supp}(A) = (0, 10];$$

- o nível zero do conjunto fuzzy A é

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)} = \mathcal{U}.$$

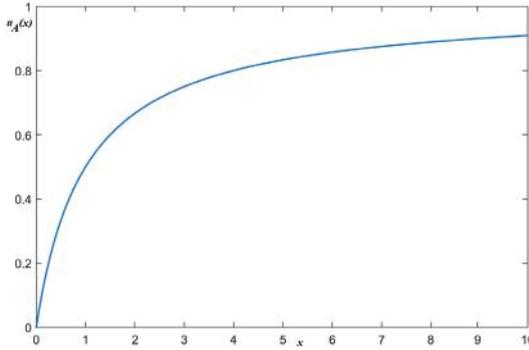


Figura 1.18: Função de pertinência do conjunto fuzzy A [2].

1.7 Números Fuzzy

Assim como no caso clássico, nesta teoria também tem-se o objetivo de fazer “contas”. A diferença é que aqui pretende-se calcular quantidades imprecisas. Por exemplo, somos unânimes em dizer que o dobro de uma quantidade “em torno de 5” resulta em outra “em torno de 10”. Para isto, “criamos” objetos que generalizam os números reais. Tais objetos são chamados de *números fuzzy* [32].

Definição 1.7. Um conjunto fuzzy N é chamado número fuzzy quando o conjunto universo, em que N está definido, é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e a função de pertinência $u_N : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é tal que:

1. $u_N(x) = 1$ para pelo menos um valor x do $\text{supp}(N)$;
2. $[N]^\alpha$ é um intervalo fechado, $\forall \alpha \in (0, 1]$;
3. O suporte de N é limitado.

Observamos que, com a Definição 1.7, todo número real r é um caso particular de número fuzzy cuja função de pertinência é sua função característica:

$$u_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = r \\ 0, & \text{se } x \neq r \end{cases} . \quad (1.7.4)$$

Os números fuzzy frequentemente utilizados na modelagem matemática são aqueles cujas funções de pertinência associadas são as triangulares, trapezoidais e os em forma de sino.

Exemplo 1.11. Um número fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma

$$u_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{b - a}, & \text{se } a \leq x < b \\ \frac{-x + c}{c - b}, & \text{se } b \leq x < c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

O gráfico desta função de pertinência forma com o eixo x um triângulo, tendo como base o intervalo $[a, c]$ e, o vértice no ponto $(b, 1)$. Para conjuntos fuzzy triangulares a notação utilizada no texto é $A = (a; b; c)$, em que a, b e c são as abscissas dos vértices do triângulo, veja Figura 1.19. Note que um número fuzzy triangular não precisa ser simétrico. Os α -níveis desses números fuzzy tem a forma simplificada

$$[A]^\alpha = [(b - a)\alpha + a, (b - c)\alpha + c]. \quad (1.7.5)$$

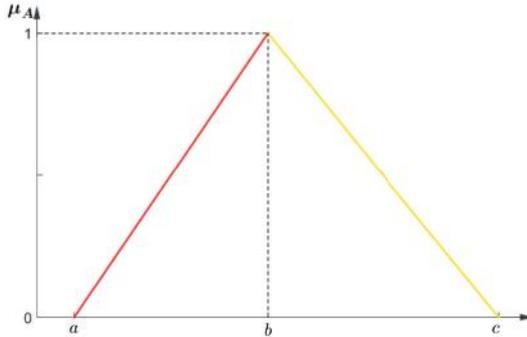


Figura 1.19: Número fuzzy triangular.

Exemplo 1.12. Um número fuzzy A é dito trapezoidal se o gráfico de sua função de pertinência tem a forma de um trapézio (veja Figura 1.20), é dada por

$$u_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{b - a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x < c \\ \frac{d - x}{d - c}, & \text{se } c \leq x < d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

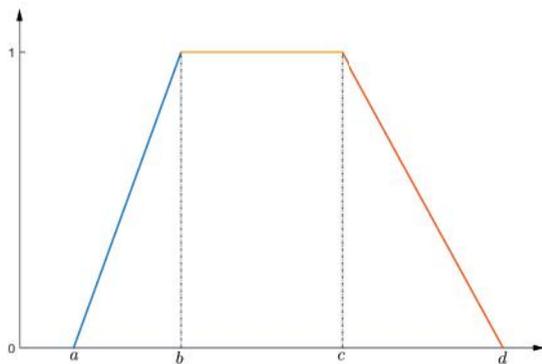


Figura 1.20: Número fuzzy trapezoidal.

Exemplo 1.13. Um número fuzzy tem forma de sino se a função de pertinência for suave e simétrica em relação a um número real. A seguinte função de pertinência tem estas propriedades para u , a e δ (veja Figura 1.21).

$$u_A(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2}, & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

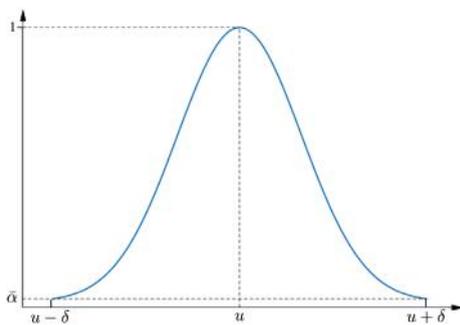


Figura 1.21: Número fuzzy em forma de sino.

1.8 Princípio de Extensão de Zadeh

Essencialmente, o princípio da extensão de Zadeh é utilizado para obter a imagem de conjuntos fuzzy através de uma função clássica.

Definição 1.8. *Sejam f uma função tal que $f : \mathcal{U} \rightarrow Z$ e A um subconjunto fuzzy de \mathcal{U} . A extensão de Zadeh de f é a função \widehat{f} que, aplicada a A , fornece o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$ de Z , cuja função de pertinência é dada por*

$$u_{\widehat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(z)} u_A(x), & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

em que $f^{-1}(z) = \{x \mid f(x) = z\}$ [7].

A Figura 1.22, ilustra o processo gráfico para obter $\widehat{f}(A)$.

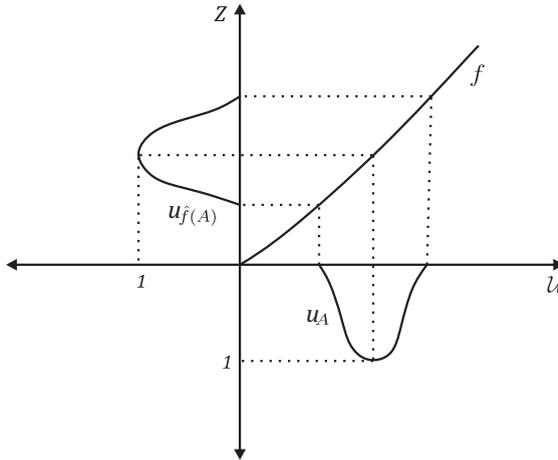


Figura 1.22: Princípio da extensão de Zadeh.

Observação 1.1. *Se A é um conjunto fuzzy de \mathcal{U} , com função de pertinência u_A e se f é injetora, então a função de pertinência de $\widehat{f}(A)$ é dada por*

$$u_{\widehat{f}(A)}(z) = \sup_{\{x: f(x)=z\}} u_A(x) = \sup_{\{x \in f^{-1}(z)\}} u_A(x) = u_A(f^{-1}(z)).$$

Teorema 1.1. *Sejam $f : \mathcal{U} \rightarrow Z$ uma função contínua e A um conjunto fuzzy de \mathcal{U} , com α -níveis compactos e não vazios [7]. Então, para todo $\alpha \in [0, 1]$ tem-se*

$$[\widehat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha). \quad (1.8.6)$$

Este resultado indica que os α -níveis do conjunto fuzzy, obtido pela princípio de extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos α -níveis do conjunto fuzzy.

Exemplo 1.14. Considere o conjunto fuzzy A de números reais cuja função de pertinência é dada por

$$u_A(x) = 2x - x^2, \text{ para } x \in [0, 2].$$

Os α -níveis de A são os intervalos

$$[A]^\alpha = [1 - \sqrt{1 - \alpha}, 1 + \sqrt{1 - \alpha}].$$

Considere a função real $f(x) = x^3$ para $x \geq 0$. Como f é polinomial então f é contínua. Assim, pelo Teorema 1.1, tem-se

$$\begin{aligned} f([A]^\alpha) &= [f(1 - \sqrt{1 - \alpha}), f(1 + \sqrt{1 - \alpha})] \\ &= [(1 - \sqrt{1 - \alpha})^3, (1 + \sqrt{1 - \alpha})^3] \\ &= [\widehat{f}(A)]^\alpha. \end{aligned}$$

Calculando $[\widehat{f}(A)]^\alpha$ para $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ e para $\alpha = 0,5$, obtém-se $[\widehat{f}(A)]^0 = [0, 8]$, $[\widehat{f}(A)]^1 = \{1\}$ e $[\widehat{f}(A)]^{0,5} = [0, 0251, 4, 9749]$. A Figura 1.23 ilustra o princípio de extensão de Zadeh para $f(x)$, que é dado pelo conjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$.

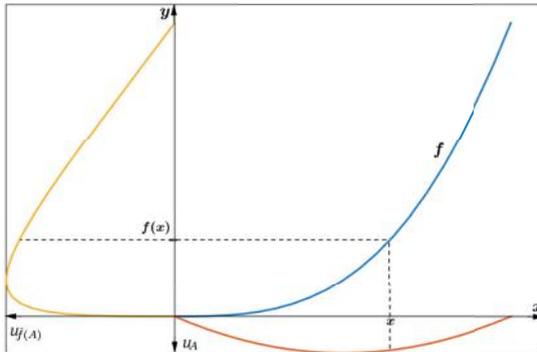


Figura 1.23: Conjunto $\widehat{f}(A)$ [2].

O princípio de extensão pode ser facilmente generalizado para funções de várias variáveis. Sejam $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \dots \times \mathcal{U}_n$ e Z conjuntos universos. Considere os conjuntos fuzzy A_i em \mathcal{U}_i , $i = 1, \dots, n$, e uma função $f : \mathcal{U} \rightarrow Z$. Os conjuntos fuzzy A_1, A_2, \dots, A_n são então

transformados pela f em $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ em Z , cuja função de pertinência é dada por

$$u(z) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in f^{-1}(z)} [\min(u_{A_1}(x_1), u_{A_2}(x_2), \dots, u_{A_n}(x_n))], & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

em que

$$u(z) = u_{\widehat{f}(A_1, A_2, \dots, A_n)}(z) \text{ e } f^{-1}(z) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = z\}.$$

Exemplo 1.15. *Considere uma população de HIV positivos e sabe-se que, ao atingir a corrente sanguínea, o HIV lança seu ataque principalmente contra os linfócitos T, do tipo CD4+. Conhecendo o conjunto fuzzy do nível de CD4+ e uma função da população assintomática em função do nível de CD4+, através do princípio de extensão de Zadeh determina-se o grau de pertinência da população assintomática no instante t [23], veja Figura 1.24.*

$$x_t(c) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{se } c < 200 \\ e^{-\lambda(c)t}, & \text{se } 200 \leq c \leq 500 \\ 1, & \text{se } c > 500 \end{cases}, \quad (1.8.7)$$

em que $\lambda(c) = \frac{500-c}{300}$, C_t é o conjunto fuzzy do nível de CD4+ em t cuja a função de pertinência é u_{C_t} e W_t é o correspondente conjunto fuzzy em t com a função de pertinência u_{W_t} . Mais especificamente, a partir do Princípio de Extensão, para cada instante t , tem-se:

$$u_{W_t}(x_t(c)) = \sup_c u_{C_t}(c). \quad (1.8.8)$$

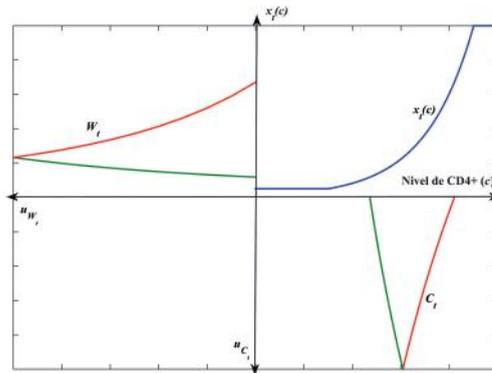


Figura 1.24: W_t em $t = 3$.

1.9 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

Definição 1.9. *Sejam A e B dois números fuzzy, e λ um número real [7].*

- (a) *A soma entre os números fuzzy A e B é o número fuzzy $A + B$, cuja função de pertinência é*

$$u_{A+B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(u_A(x), u_B(y)),$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) \mid x + y = z\}$.

- (b) *A diferença entre os números fuzzy A e B é o número fuzzy $A - B$, cuja função de pertinência é*

$$u_{A-B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(u_A(x), u_B(y)),$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) \mid x - y = z\}$.

- (c) *A multiplicação entre os números fuzzy A e B é o número fuzzy $A \cdot B$, cuja função de pertinência é*

$$u_{A \cdot B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(u_A(x), u_B(y)),$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) \mid xy = z\}$.

- (d) *A divisão do número fuzzy A pelo número fuzzy B , se $0 \notin \text{supp}(B)$ é o número fuzzy A/B , cuja função de pertinência é*

$$u_{A/B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(u_A(x), u_B(y)),$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) \mid x/y = z\}$.

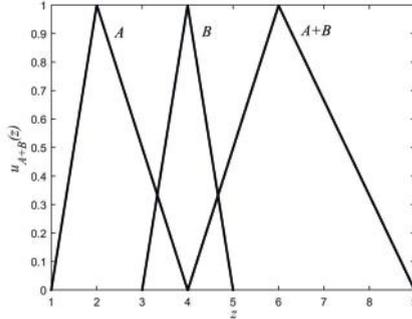
- (e) *A multiplicação de um escalar λ pelo número fuzzy A é o número fuzzy λA , cuja função de pertinência é*

$$u_{\lambda A}(z) = \begin{cases} u_A(\lambda^{-1}z), & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(z), & \text{se } \lambda = 0 \end{cases},$$

em que $\chi_{\{0\}}$ é a função característica de $\{0\}$.

Exemplo 1.16. *Neste exemplo a soma dos números triangulares $A = (1; 2; 4)$ e $B = (3; 4; 5)$ é determinada utilizando o item (a) da Definição 1.9. A Figura 1.25 apresenta graficamente a operação realizada.*

Uma maneira alternativa, e mais prática de se fazer estas operações é por meio dos α -níveis dos conjuntos fuzzy envolvidos, de acordo com a proposição a seguir.

Figura 1.25: Soma dos números fuzzy A e B .

Proposição 1.1. *Sejam A e B números fuzzy com α -níveis dados, respectivamente, por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$ [7]. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) *A soma entre A e B é o número fuzzy $A + B$ cujos α -níveis são*

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha].$$

(b) *A diferença entre A e B é o número fuzzy $A - B$ cujos α -níveis são*

$$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha].$$

(c) *A multiplicação de A por B é o número fuzzy $A \cdot B$ cujos α -níveis são*

$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [\min P, \max P],$$

em que $P = \{a_1^\alpha \cdot b_1^\alpha, a_1^\alpha \cdot b_2^\alpha, a_2^\alpha \cdot b_1^\alpha, a_2^\alpha \cdot b_2^\alpha\}$.

(d) *A divisão entre A por B , se $0 \notin \text{supp}(B)$, é o número fuzzy A/B cujos α -níveis são*

$$\left[\frac{A}{B} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot \left[\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha} \right].$$

(e) *A multiplicação de λ por A é o número fuzzy λA cujos α -níveis são*

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda [A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha], & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha], & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}.$$

Exemplo 1.17. *Considere os números fuzzy triangulares A e B que indicam, respectivamente, aproximadamente 3 e aproximadamente 4 [2], dados por*

$$A = (2; 3; 4) \text{ e } B = (3; 4; 5).$$

Os resultados para cada uma das operações aritméticas entre números fuzzy são mostrados a seguir.

$$[A]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha] \text{ e } [B]^\alpha = [\alpha + 3, 5 - \alpha],$$

então pela Proposição 1.1, obtém-se

$$(a) [A + B]^\alpha = [2\alpha + 5, 9 - 2\alpha].$$

$$(b) [A - B]^\alpha = [2\alpha - 3, 1 - 2\alpha].$$

$$(c) [A \cdot B]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha] \cdot [\alpha + 3, 5 - \alpha] = [\min P, \max P], \text{ em que}$$

$$P = \{(\alpha + 2)(\alpha + 3), (\alpha + 2)(5 - \alpha), (4 - \alpha)(\alpha + 3), (4 - \alpha)(5 - \alpha)\}.$$

Então, $\min P = (\alpha + 2)(\alpha + 3)$ e $\max P = (4 - \alpha)(5 - \alpha)$. Assim,

$$[A \cdot B]^\alpha = [(\alpha + 2)(\alpha + 3), (4 - \alpha)(5 - \alpha)].$$

$$(d) \left[\frac{A}{B} \right]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha] \cdot \left[\frac{1}{5 - \alpha}, \frac{1}{\alpha + 3} \right]. \text{ Assim,}$$

$$\left[\frac{A}{B} \right]^\alpha = [(\alpha + 2)/(5 - \alpha), (4 - \alpha)/(\alpha + 3)].$$

$$(e) [3A]^\alpha = 3[A]^\alpha = [3\alpha + 6, 12 - 3\alpha].$$

O exemplo a seguir (extraído de [7]) ilustra as operações entre números fuzzy para uma situação do cotidiano.

Exemplo 1.18. Considere que uma viagem de ônibus de Campinas a São Paulo está sujeita às seguintes considerações:

- A distância é de aproximadamente 100Km;
- A velocidade na estrada não deve exceder a 120Km/h;
- O trânsito é geralmente intenso e a velocidade é também reduzida nos pedágios;
- O ônibus sai quase sempre atrasado mas nunca ocorreu com mais de 1/2 hora.

Pergunta: Qual o tempo (T) gasto numa viagem de Campinas à cidade de São Paulo?

Resolver este problema, com uma resposta exata é impossível pois somente tem-se informações parciais ou mal definidas do ponto de vista da matemática clássica.

Uma abordagem intuitiva de resolução deste problema mostrou que toda pessoa questionada a respeito de uma solução tem como resposta algo como “o tempo deve ser pouco mais que uma hora” ou “entre 1 hora a 1 hora e meia”. Tais respostas são baseadas nas experiências pessoais intuitivas dos que já enfrentaram situações semelhantes: “Estes ônibus correm muito mas o trânsito pesado e as passagens nos pedágios fazem a velocidade diminuir e ainda tem-se que partem, quase sempre, atrasados”. Se optarmos por um valor preciso (número real) na resposta, devemos adotar valores precisos nos dados também. Por exemplo, uma velocidade média de 90Km/h e um atraso de partida (T_1) de 15min daria como resposta o tempo total para a viagem:

$$T = T_1 + T_2 = 15\text{min} + \frac{100}{90}h \cong 15\text{min} + 1,11h \cong 1,36h,$$

em que T_2 é o tempo gasto na viagem.

A ideia é propor um modelo matemático para essa “aritmética” intuitiva que permite pessoas fazerem contas com dados imprecisos (como os do problema) a ponto de produzirem respostas, ainda “linguísticas”, mas com informações numéricas.

A seguir a abordagem fuzzy desta situação é apresentada.

- Como o dado da distância (D) do trajeto é aproximado pode ser considerado um número fuzzy em torno de 100Km. Pode ser, por exemplo, o número triangular $D = (90; 100; 110)$ cuja função grau de pertinência é:

$$u_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 90 \\ \frac{x}{10} - 9, & \text{se } 90 < x \leq 100 \\ 11 - \frac{x}{10}, & \text{se } 100 < x \leq 110 \\ 0, & \text{se } x > 110 \end{cases}$$

e α -níveis dados por $[D]^\alpha = [10\alpha + 90, -10\alpha + 110]$. Note que a fórmula (1.7.5) pode ser usada para obter esses α -níveis.

- A incerteza da velocidade (V) do ônibus pode ser também modelada por um número triangular fuzzy. Levando-se em conta que: nunca ultrapassa 120Km/h e que têm algumas velocidades no percurso bem baixas, é suposto $V = (30; 100; 120)$, cujos α -níveis são $[V]^\alpha = [70\alpha + 30, -20\alpha + 120]$.
- O fato do ônibus partir quase sempre atrasado indica que deve-se ter também um tempo extra (T_1) de espera que não excede meia hora. Este tempo pode ser modelado por um número fuzzy do tipo triangular $T_1 = (0; 0; 0, 5)$, cujos α -níveis são

$$[T_1]^\alpha = [0, -0, 5\alpha + 0, 5] = \left[0, \frac{1 - \alpha}{2}\right].$$

Da Física, o tempo gasto na estrada (T_2) é obtido pelo número fuzzy

$T_2 = \frac{D}{V}$. Da Proposição 1.1 tem-se que os α -níveis de T_2 são:

$$[T_2]^\alpha = [10\alpha + 90, 110 - 10\alpha] \left[\frac{1}{120 - 20\alpha}, \frac{1}{70\alpha + 30} \right].$$

Portanto, o tempo total gasto (T) é dado pelo número fuzzy $T = T_1 + T_2$ cujos α -níveis são:

$$[T]^\alpha = \left[0, \frac{1 - \alpha}{2} \right] + \left[\frac{10\alpha + 90}{120 - 20\alpha}, \frac{110 - 10\alpha}{70\alpha + 30} \right]$$

$$[T]^\alpha = \left[\frac{10\alpha + 90}{120 - 20\alpha}, \frac{1 - \alpha}{2} + \frac{110 - 10\alpha}{70\alpha + 30} \right].$$

Esta seria a solução fuzzy do problema que contempla toda resposta do tempo gasto ser compreendido entre $\frac{3}{4}h$ e $\frac{25}{6}h$. Isto é dado pelo suporte do conjunto T : $[T]^0 = [\frac{3}{4}, \frac{25}{6}]$. Também é importante notar que o tempo com maior possibilidade ($\alpha = 1$) é $t = 1h$. O tempo $t = 1,36h$, dado no início do exemplo em que os valores são todos precisos, teria graus de pertinência $\alpha^* \cong 0,8$, obtido de

$$1,36 = \frac{1 - \alpha^*}{2} + \frac{110 - 10\alpha^*}{70\alpha^* + 30}$$

no conjunto total T dos tempos. A Figura 1.26 apresenta o gráfico da função de pertinência (u_T) do conjunto fuzzy T .

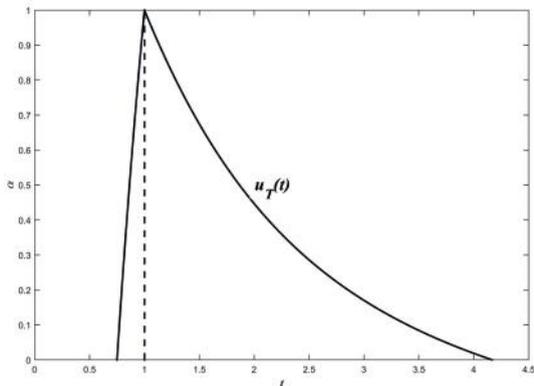


Figura 1.26: Gráfico da função de pertinência (u_T) do tempo gasto (T).

1.10 Esperança Fuzzy

A fim de usar um método de defuzzificação para obter um valor real, isto é, um número real representativo de um conjunto fuzzy, necessitaremos dos conceitos de ínfimo de um conjunto e medida fuzzy.

Seja A um subconjunto não vazio do conjunto parcialmente ordenado E . Ao maior dos limites inferiores de A dá-se o nome de ínfimo de A que é indicado por $\inf A$.

Seja Ω um conjunto não vazio e $P(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω . A função $\mu : P(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ é uma *medida fuzzy* [8, 42, 48] se:

- a) $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(\Omega) = 1$;
- b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subseteq B$.

Seja A um conjunto fuzzy de \mathbb{R} com função de pertinência u_A . O valor esperado do conjunto fuzzy, denotado por $FEV[u_A]$ (ou $FEV[A]$) é o número real dado por:

$$FEV[A] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \inf[\alpha, \mu\{u_A \geq \alpha\}], \quad (1.10.9)$$

em que μ é uma medida fuzzy e $\{u_A \geq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : u_A(x) \geq \alpha\}$.

Observação: Se $H(\alpha) = \mu\{u_A \geq \alpha\}$, então o cálculo de $FEV[A]$, consiste em determinar o ponto fixo de H , que pode ser dado pela intersecção de $y_1 = \alpha$ com $y_2 = H(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$ [31].

Neste trabalho $FEV[A]$ também é usado como o defuzzificador do conjunto fuzzy A .

Exemplo 1.19. *Determine $FEV[A]$ para o conjunto fuzzy A com a seguinte função de pertinência:*

$$u_A(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.10.10)$$

Na Figura 1.27 é apresentado o gráfico da função de pertinência $u_A(x)$. Inicialmente, calcula-se $[A]^\alpha$ que neste caso é dado por $[A]^\alpha = [\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}]$. Sendo $H(\alpha) = \mu\{u \geq \alpha\} = \mu[\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}] = (1 - \frac{\alpha}{2}) - (\frac{\alpha}{2}) = 1 - \alpha$, em que $\mu([a, b]) = b - a$.

Assim,

$$FEV[A] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \inf[\alpha, 1 - \alpha] = \frac{1}{2}. \quad (1.10.11)$$

A Figura 1.28 ilustra a intersecção entre $y_1 = \alpha$ e $y_2 = H(\alpha)$.

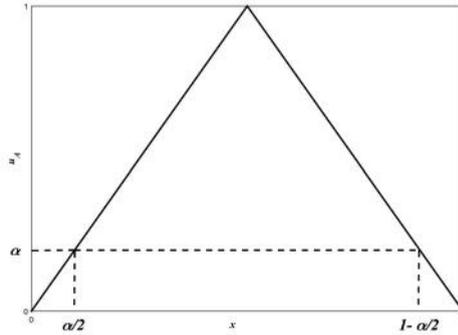


Figura 1.27: O gráfico da função de pertinência $u_A(x)$ e $[A]^\alpha$.

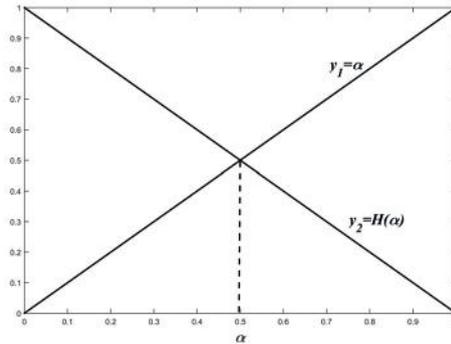


Figura 1.28: Os gráficos das funções $y_1 = \alpha$ e $y_2 = H(\alpha)$.

No próximo capítulo, as variáveis linguísticas e o sistema baseado em regras fuzzy são introduzidos.

Exercícios

1. Considere dois conjuntos fuzzy com funções de pertinência triangulares $A = (1; 2; 3)$ e $B = (2; 2; 4)$.
 - (a) Encontre a intersecção e a união dos conjuntos A e B e expresse-as analiticamente, usando os operadores \min e \max .
 - (b) Determine a intersecção com a t -norma *Produto Algébrico* xy e a união com a s -norma *Soma Algébrica* $xy = x + y - xy$.
 - (c) Encontre o complementar de A e B e intersecção destes conjun-

tos com os conjuntos originais usando as t -normas *Intersecção Padrão* $xy = \min(x, y)$ e *Produto Algébrico* $xy = xy$. Repita o mesmo com a operação união usando as s -normas *União Padrão* $xy = \max(x, y)$ e *Soma Algébrica* $xy = x + y - xy$.

2. No Exemplo 1.18, a partir da noção de FEV , estime o tempo médio (\bar{T}) da viagem. (Sugestão: $\bar{T} = \alpha^* \cdot l$, em que α^* é solução de $\alpha = H(\alpha)$ e $H(\alpha) = \mu([\frac{T}{l}]^\alpha) = \mu(\frac{1}{l}[T]^\alpha)$, pela Proposição 1.1 e, com $\mu([a, b]) = b - a$. Essa “normalização” dos tempos (t) em relação a $l = \mu[T]^0$ se faz necessária para garantir solução de $\alpha = H(\alpha)$.)

Capítulo 2

Sistema Baseado em Regras Fuzzy

2.1 Introdução

Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) é um sistema que utiliza a teoria dos conjuntos fuzzy para produzir saídas a partir de entradas dadas por conjuntos fuzzy. Tais sistemas foram desenvolvidos com o objetivo de imitar o comportamento humano considerando que o conhecimento e as ações humanas são apoiadas em uma sequência de regras linguísticas, traduzidas por um conjunto de regras. As regras formuladas pelo ser humano são usualmente da forma:

Se (um conjunto de condições é satisfeito) então (um conjunto de consequências pode ser inferido).

Neste capítulo é apresentado um estudo detalhado dos SBRF.

2.2 Relações Fuzzy

Estudos de associações, relações ou interações entre os elementos de diversas classes é de grande interesse na análise e compreensão de muitos fenômenos do mundo real. Matematicamente, o conceito de relação é formalizado a partir da teoria de conjuntos. Desta forma, intuitivamente pode-se dizer que uma relação é fuzzy quando opta-se pela teoria dos conjuntos fuzzy e é clássica quando opta-se pela teoria clássica de conjuntos para conceituar a relação em estudo. Qual dos modelos adotar, entre estes dois, depende muito do fenômeno estudado. Porém, a opção pela teoria de conjuntos fuzzy sempre tem maior robustez no sentido de que esta inclui a teoria clássica de conjuntos [5]. A seguir é apresentada a definição de relações fuzzy.

Definição 2.1. *Uma relação fuzzy R , sobre $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_n$, é qualquer subconjunto fuzzy do produto cartesiano $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_n$. Se o produto car-*

tesiano for formado por apenas dois conjuntos, $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, a relação é chamada de fuzzy binária sobre $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$.

A principal vantagem na opção pela relação fuzzy é que a relação clássica indica apenas se há ou não relação entre dois objetos, enquanto uma relação fuzzy além de indicar se existe ou não relação, indica também o grau desta relação.

Uma noção que é muito importante para este trabalho é o produto cartesiano entre conjuntos fuzzy.

Definição 2.2. *O produto cartesiano fuzzy $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ dos subconjuntos fuzzy A_1, A_2, \dots, A_n de $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n$, é a relação fuzzy R cuja função de pertinência é*

$$u_R(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_{A_1}(x_1) \wedge u_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge u_{A_n}(x_n), \quad (2.2.1)$$

em que \wedge é a t -norma min.

A noção e utilização de produto cartesiano fuzzy ficará mais clara quando introduzirmos o conceito de sistemas baseados em regras fuzzy, que são sistemas compostos de regras da forma “Se...então...”, pois estas regras podem ser interpretadas como produtos cartesianos de conjuntos fuzzy.

2.3 Composição entre Relações Fuzzy

Considere R e S duas relações fuzzy binárias em $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ e $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3$, respectivamente.

Definição 2.3. *A composição $R \circ S$ é uma relação fuzzy binária em $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_3$, com função de pertinência dada por*

$$u_{R \circ S}(x_1, x_3) = \max_{x_2 \in \mathcal{U}_2} [\min(u_R(x_1, x_2), u_S(x_2, x_3))]. \quad (2.3.2)$$

Quando os conjuntos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ e \mathcal{U}_3 são finitos, então a forma matricial da relação $R \circ S$, dada pela composição max-min, é obtida como uma multiplicação de matrizes substituindo-se o produto pelo mínimo e a soma pelo máximo.

Um caso especial da composição max – min é definida, e é utilizada no Capítulo 3 em uma importante aplicação: diagnóstico médico.

Definição 2.4. *Sejam \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 dois conjuntos, $\mathcal{F}(\mathcal{U}_1)$ e $\mathcal{F}(\mathcal{U}_2)$ as classes dos conjuntos fuzzy de \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 , respectivamente, e R uma relação fuzzy binária sobre $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. Então a relação R define um funcional de $\mathcal{F}(\mathcal{U}_1)$ em $\mathcal{F}(\mathcal{U}_2)$ que a cada elemento $A_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_1)$, faz corresponder o elemento $A_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_2)$ cuja função de pertinência é dada por:*

$$u_{A_2}(x_2) = u_{R(A_1)}(x_2) = \max_{x_1 \in \mathcal{U}_1} [\min(u_{A_1}(x_1), u_R(x_1, x_2))]. \quad (2.3.3)$$

2.4 Equações Relacionais Fuzzy

As equações relacionais fuzzy foram primeiramente citadas em Diagnóstico Médico [52]. Um resumo da formulação matemática das mesmas é apresentada.

Uma equação relacional tem a forma:

$$S * X = D \quad (2.4.4)$$

em que S , X e D são relações fuzzy e $*$ é uma operação entre relações fuzzy, como por exemplo a da fórmula (2.3.3).

A fórmula (2.4.4) é uma equação relacional porque uma, dentre as três relações, é incógnita dependendo do problema em questão. Quando são conhecidas S e X , a incógnita é a relação D , que é obtida diretamente da operação entre S e X . Esta é a abordagem enfatizada neste texto. Quando são conhecidas S e D , sendo X a incógnita, então um problema que faz parte da área de pesquisa chamada “Problemas Inversos” está posto. Um exemplo desta área é a resolução de sistemas lineares $Ax = b$, cuja solução é $x = A^{-1}b$ quando A tem inversa.

O leitor interessado nas equações relacionais fuzzy ligadas a problemas inversos pode consultar [7, 32, 44]. O objetivo neste texto é propor um sistema fuzzy a partir das equações relacionais fuzzy que imite a atuação de um médico no diagnóstico de seus pacientes.

Apenas para constar, no contexto o problema inverso seria adotado se um banco de dados de pacientes já diagnosticados é conhecido. Nesse caso, o objetivo é encontrar a matriz X que produziu esses diagnósticos. Intuitivamente, X faria o papel do médico que “produziu” os diagnósticos do banco de dados.

As operações entre as relações fuzzy de nosso interesse são $*$ e \circ_w como definidas a seguir:

Considere P e Q duas relações binárias definidas sobre $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente, as relações de composição $P \circ Q$ e $P \circ_w Q$, definidas sobre $U \times W$ por

$$(P \circ Q)(x, z) = \sup_{y \in V} [\inf(P(x, y), Q(y, z))]$$

e

$$(P \circ_w Q)(x, z) = \inf_{y \in V} [w(P(x, y), Q(y, z))],$$

sendo w uma operação em $[0, 1] \times [0, 1]$ como, por exemplo, a implicação fuzzy de Gödel

$$g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

em que

$$(a \Rightarrow b) = g(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq b. \\ b, & \text{se } a > b \end{cases}$$

O teorema a seguir tem grande utilidade no estudo das equações relacionais fuzzy e neste texto é enunciado.

Teorema 2.1. *Dadas as relações fuzzy S e D definidas $U \times V$ e $U \times W$, respectivamente, seja $\mathbb{A} = \{X : X \text{ é relação fuzzy em } V \times W \text{ e } S \circ X = D\}$. Então se $\mathbb{A} \neq \emptyset$, tem-se $S^{-1} \circ_g D$ como elemento maximal de \mathbb{A} .*

Note que o teorema anterior fornece $S^{-1} \circ_g D$ como solução da equação relacional $S \circ X = D$. Deste modo, este teorema indica uma maneira de se construir uma relação fuzzy que, quando composta com uma primeira (no caso S), produz um resultado pré-estabelecido que, neste caso, é uma relação fuzzy D .

Bem, como já foi dito neste texto só é explorado o caso de equações na forma em que S e X são conhecidas. As equações relacionais fuzzy são apresentadas aqui, porém sua aplicação aparecerá só no capítulo 3.

Na próxima seção é apresentado um outro tema que envolve relações em que o sistema fuzzy é dado por uma coleção de regras fuzzy o qual é utilizado na teoria de controladores fuzzy [7, 32, 44].

2.5 Regras e Inferência Fuzzy

Uma regra fuzzy é uma sentença da forma “Se X é A então Y é B ”, em que A e B são conjuntos fuzzy em X e Y , respectivamente. Tal regra pode ser interpretada como uma relação fuzzy R entre A e B cuja função de pertinência $u_R(x, y)$ depende de $u_A(x)$ e $u_B(x)$ para cada $(x, y) \in X \times Y$. Nesse texto, utiliza-se a função mínimo para essa dependência, ou seja,

$$u_R(x, y) = u_A(x) \wedge u_B(y).$$

Desta forma, $R = A \times B$. Essa é a modelagem dada por Mamdani para representar a regra “Se X é A então Y é B ”. Na teoria de raciocínio aproximado, essas sentenças são modeladas por implicações fuzzy [7]. Para uma coleção de regras fuzzy, usa-se um operador s -conorma para conectá-los, como por exemplo máximo. Ver o Método de Mamdani na Seção 2.5.

Uma variável linguística é uma variável cujo valor é expresso qualitativamente por termos linguísticos (que fornece um conceito à variável) e quantitativamente por uma função de pertinência. Na Figura 2.1 é apresentada a função de pertinência da variável linguística “taxa de fertilidade”, com os termos linguísticos: *baixa*, *média* e *alta*.

2.6 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

O SBRF contém quatro componentes: um processador de entrada que realiza a fuzzificação dos dados de entrada, uma coleção de regras nebulosas chamada base de regras, uma máquina de inferência fuzzy e um processador de saída que fornece um número real como saída [23]. Estes componentes estão conectados conforme indicado na Figura 2.2.

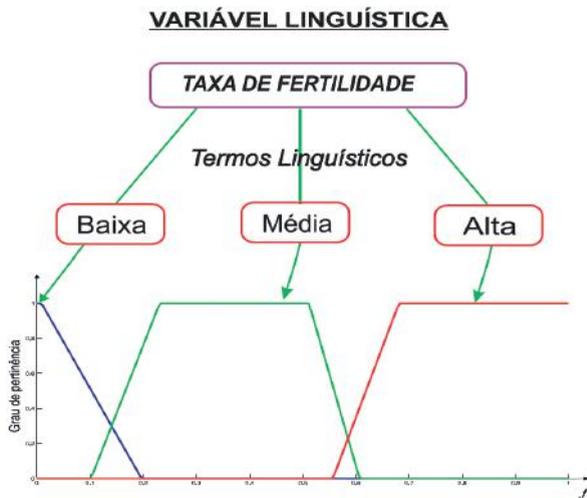


Figura 2.1: Variável Linguística.

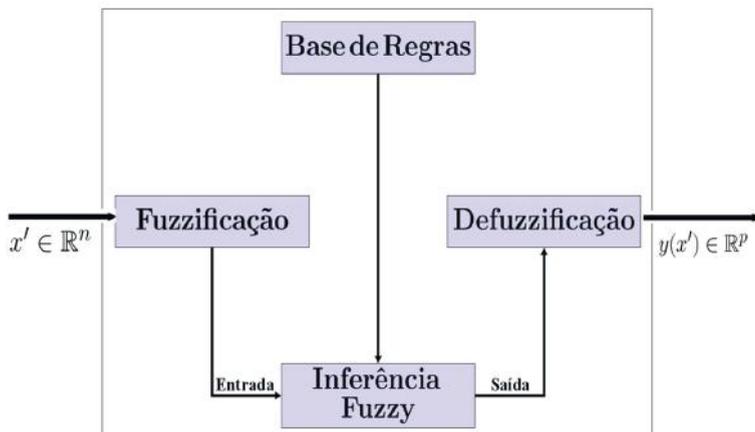


Figura 2.2: Sistemas baseados em regras fuzzy.

Uma vez estabelecida uma base de regras, isto é, como relacionamos os conjuntos fuzzy pela forma Se...então..., um SBRF pode ser visto como um mapeamento entre a entrada e a saída da forma $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^p$ (trajetória em negrito na Figura 2.2). Esta classe de sistema é amplamente utilizada em problemas de modelagem, controle e classificação. Os componentes do SBRF são descritos a seguir:

- **Processador de Entrada (Fuzzificação)**

Neste componente as entradas do sistema são traduzidas em conjuntos fuzzy em seus respectivos domínios. A atuação de um especialista na área do fenômeno a ser modelado é de fundamental importância para colaborar na construção das funções de pertinências para a descrição das entradas.

- **Base de Regras**

Este componente, juntamente com a máquina de inferência, pode ser considerado o núcleo dos sistemas baseados em regras fuzzy. Ele é composto por uma coleção de proposições fuzzy na forma Se...então.... Cada uma destas proposições pode, por exemplo, ser descrita linguisticamente de acordo com o conhecimento de um especialista. A base de regras descreve relações entre as variáveis linguísticas, para serem utilizadas na máquina de inferência fuzzy que descreveremos no próximo item.

- **Máquina de Inferência Fuzzy**

É neste componente que cada proposição fuzzy é traduzida matematicamente por meio das técnicas de raciocínio aproximado. Os operadores matemáticos serão selecionados para definir a relação fuzzy que modela a base de regras. Desta forma, a máquina de inferência fuzzy é de fundamental importância para o sucesso do sistema fuzzy, já que fornece a saída a partir de cada entrada fuzzy e da relação definida pela base de regras. Apresentamos dois métodos particulares de Inferência Fuzzy: o Método de Mamdani e o Método de Takagi-Sugeno. A diferença básica entre esses métodos está no tipo de consequente e no procedimento de defuzzificação. Para simplicidade, somente modelos de regras com duas entradas e uma saída são ilustrados.

- **Método de Mamdani**

Uma regra Se (antecedente) então (consequente) é definida pelo produto cartesiano fuzzy dos conjuntos fuzzy que compõem o antecedente e o consequente da regra. O método de Mamdani agrega

as regras através do operador lógico OU, que é modelado pelo operador máximo e, em cada regra, o operador lógico E é modelado pelo operador mínimo. As regras são apresentadas a seguir:

Regra 1: Se (x é A_1 e y é B_1) então (z é C_1);

Regra 2: Se (x é A_2 e y é B_2) então (z é C_2).

A Figura 2.3 ilustra como uma saída real z de um sistema de inferência do tipo Mamdani é gerada a partir das entradas x e y reais e a regra de composição max – min.

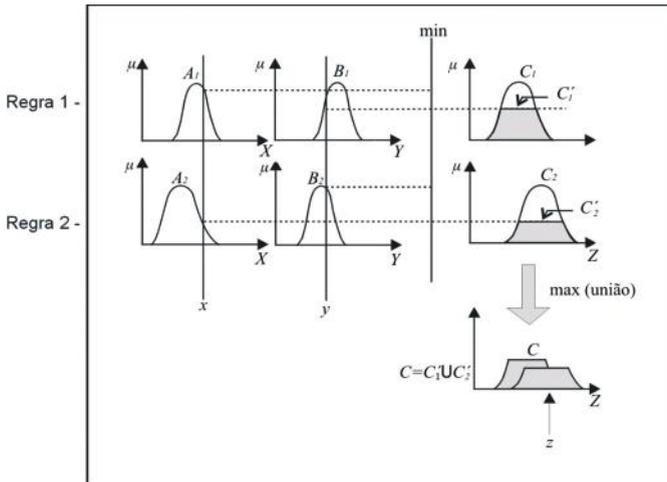


Figura 2.3: Método de Mamdani com composição max – min.

A saída $z \in \mathbb{R}$ é obtida pela defuzzificação do conjunto fuzzy de saída $C = C_1 \cup C_2$ da Figura 2.3.

– Método de Takagi-Sugeno

Neste caso, o consequente de cada regra é uma função das variáveis de entrada. Por exemplo, pode-se supor que a função que mapeia a entrada e saída para cada regra é uma combinação linear das entradas, isto é, $z = px_1 + qx_2 + r$. As regras são apresentadas a seguir:

Regra 1 : Se (x é A_1 e y é B_1) então $z = f_1(x, y)$;

Regra 2 : Se (x é A_2 e y é B_2) então $z = f_2(x, y)$.

A Figura 2.4, ilustra como uma saída z de um sistema do método de Takagi-Sugeno é gerada a partir das entradas reais x e y . Esta saída do sistema é obtida pela média ponderada (procedimento

de defuzzificação) das saídas de cada regra, usando-se o grau de ativação destas regras como ponderação.

No caso em que $p = q = 0$, então $z = r$ (conjunto unitário fuzzy), os modelos de Mamdani e de Takagi-Sugeno produzem os mesmos valores de saída, porque a defuzzificação no método de Mamdani, pelo centro de gravidade, é igual à média ponderada no método de Takagi-Sugeno. Como z_1 e z_2 são conjuntos fuzzy unitários então w_1 e w_2 são os graus de pertinências de z_1 e z_2 , respectivamente. Um exemplo de saída com conjuntos unitários é apresentado na Seção 3.3.

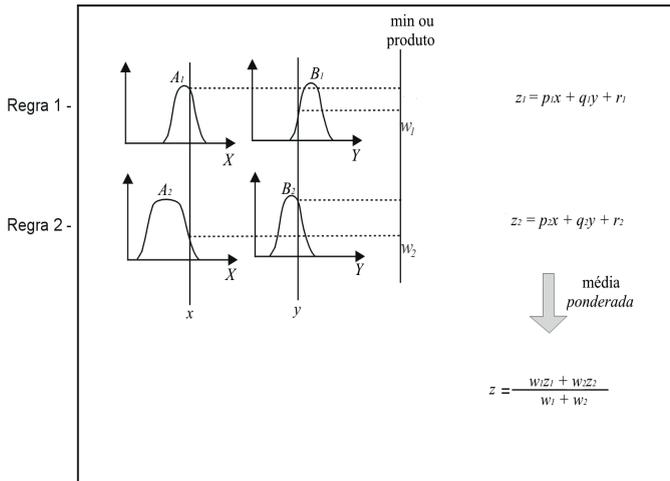


Figura 2.4: Método de Takagi-Sugeno.

- **Processador de Saída (Defuzzificação)** Na teoria dos conjuntos fuzzy pode-se dizer que a defuzzificação é um processo de se representar um conjunto fuzzy por um número real. Em sistemas fuzzy, em geral a saída é um conjunto fuzzy. Assim, devemos escolher um método para defuzzificar a saída e obter um número real que a represente. A seguir, relacionaremos o método mais comum de defuzzificação.

- **Centro de gravidade** Este método de defuzzificação é semelhante à média ponderada para distribuição de dados, com a diferença que os pesos são os valores $C(z_i)$ que indicam o grau de compatibilidade do valor z_i com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy C .

Para um domínio discreto tem-se

$$G(C) = \frac{\sum_{i=0}^n z_i C(z_i)}{\sum_{i=0}^n C(z_i)}. \quad (2.6.5)$$

Para um domínio contínuo tem-se

$$G(C) = \frac{\int_R u C(u) du}{\int_R C(u) du}, \quad (2.6.6)$$

em que R é a região de integração.

Na próxima seção, alguns SBRF são apresentados utilizando o método de inferência de Mamdani.

2.7 Aplicações do SBRF: Método de Mamdani

Nesta seção são apresentados quatro exemplos de aplicações do SBRF, os três primeiros elaborados pelos estudantes Flávia Cristina Queiroz, Eder Lúcio da Fonseca e Edinei Leandro dos Reis, respectivamente, do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia.

2.7.1 Vitalidade das Violetas

Violeta é um tipo de flor muito apreciada pelos apaixonados por plantas. Possui folhas grandes e flores miúdas.

Para que tenha vida longa pequenos cuidados diários são necessários. Por exemplo:

- Ser exposta de meia à uma hora ao sol da manhã ou ao da tarde (pois o sol é mais fraco nestas horas).
- Ser aguada com aproximadamente 33 ml.

Assim, dados os valores da quantidade de água (ml) e da quantidade de sol (minutos), tem-se como resultado a “vitalidade da violeta”.

Neste exemplo, as variáveis linguísticas são:

- Quantidade de água (ml), com domínio [0,66], representando as faixas < 26 , $33 - 53$ e > 40 , com os termos linguísticos: *pequena*, *média* e *grande*. As funções de pertinência são triangulares, como mostra a Figura 2.5.
- Tempo de exposição no sol (min), [0,95], representando as faixas < 35 , $20 - 70$ e > 55 , com os termos linguísticos: *pequeno*, *médio* e *grande*, respectivamente; também as funções de pertinência triangulares, veja Figura 2.6.
- O domínio da variável de saída “vitalidade da violeta” é [0,1] e os termos linguísticos: *ruim*, *média* e *boa*, como mostra a Figura 2.7.

Tabela 2.1: Classificações da vitalidade da violeta como função da quantidade de água A (ml) e tempo de exposição no sol S .

Sol(S) \ Água (A)	< 26	13 - 53	> 40
	< 35	<i>média</i>	<i>boa</i>
20 - 70	<i>média</i>	<i>boa</i>	<i>ruim</i>
> 55	<i>ruim</i>	<i>média</i>	<i>ruim</i>

A Tabela 2.1 apresenta as classificações da vitalidade da violeta como função da quantidade da água A (ml) e tempo de exposição no sol S (min).

As regras fuzzy são apresentadas na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Regras fuzzy.

Sol(S) \ Água (A)	<i>pequena</i>	<i>média</i>	<i>grande</i>
	<i>pequeno</i>	<i>média</i>	<i>boa</i>
<i>médio</i>	<i>média</i>	<i>boa</i>	<i>ruim</i>
<i>grande</i>	<i>ruim</i>	<i>média</i>	<i>ruim</i>

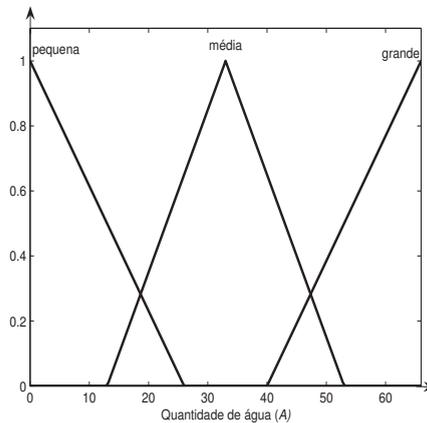


Figura 2.5: Funções de pertinência da quantidade de água (A).

Assim, dados os valores da quantidade de água e tempo de exposição, tem-se como resultado a inferência de um valor, no intervalo $[0,1]$ que representa a vitalidade das violetas V . Neste sentido, é possível obter uma saída do sistema de inferência. Por exemplo, com quantidade de água 40 ml e tempo de exposição do sol 60 min, após a defuzzificação encontramos um valor igual

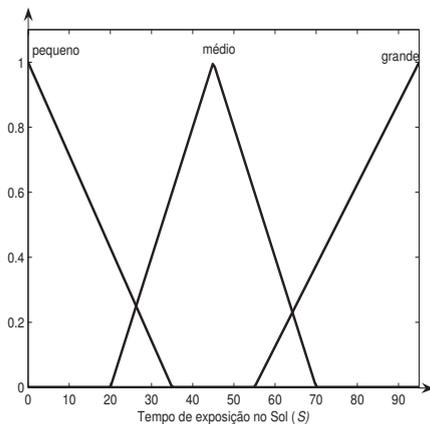


Figura 2.6: Funções de pertinência do tempo de exposição do sol (S).

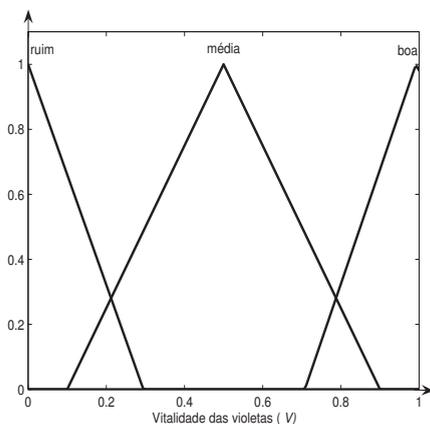


Figura 2.7: Funções de pertinência da vitalidade das violetas (V).

0,68, orientando que esta quantidade de água e tempo de exposição no sol geram uma vitalidade de 0,68 numa escala de 0 a 1 para as violetas [3].

2.7.2 Grau de Risco da Obesidade

Denomina-se obesidade uma enfermidade caracterizada pelo acúmulo excessivo de gordura corporal, associada a problemas de saúde, ou seja, que traz prejuízos à saúde do indivíduo.

O excesso de gordura corporal não provoca sinais e sintomas diretos, salvo quando atinge valores extremos. Pacientes obesos podem apresentar limita-

ções de movimento, podem ser contaminados com fungos e outras infecções de pele em suas dobras de gordura, com diversas complicações, podendo ser algumas vezes graves. Além disso, sobrecarregam sua coluna e membros inferiores, apresentando a longo prazo degenerações (artroses) de articulações da coluna, quadril, joelhos e tornozelos, além de doença varicosa superficial e profunda (varizes) com úlceras de repetição e erisipela.

Como o médico faz o diagnóstico? A forma mais amplamente recomendada para avaliação da massa corporal em adultos é o IMC (índice de massa corporal), recomendado inclusive pela Organização Mundial da Saúde. Esse índice é calculado dividindo-se a massa do paciente em quilogramas (kg) pela sua altura em metros elevada ao quadrado (quadrado de sua altura) [1]. O valor assim obtido estabelece o diagnóstico da obesidade e caracteriza também os riscos associados conforme apresentado na Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Diagnóstico da Obesidade.

IMC (kg/m^2)	Grau de Risco	Tipo de obesidade
18 a 24,9	Saudável	Ausente
25 a 29,9	Moderado	Sobrepeso (Pré-Obesidade)
30 a 34,9	Alto	Obesidade Grau I
35 a 39,9	Muito Alto	Obesidade Grau II
40 ou mais	Extremo	Obesidade Grau III (“Mórbida”)

Conforme pode ser observado, o peso normal, no indivíduo adulto, com mais de 20 anos de idade, varia conforme sua altura, assim é possível, também estabelecer os limites inferiores e superiores da massa corporal para as diversas alturas conforme a Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Altura X Massa.

Altura (cm)	Massa Inferior (kg)	Massa Superior (kg)
145	38	52
150	41	56
155	44	60
160	47	64
165	50	68
170	53	72
175	56	77
180	59	81
185	62	85
190	65	91

Neste exemplo, as variáveis linguísticas são:

- Massa (kg), com domínio [47,81], considerando as faixas 47–64, 50–68, 53–72, 56–77 e 59–81, com os termos linguísticos: *baixa, média baixa,*

média , *média alta* e *alta*. As funções de pertinência são triangulares, como mostra a Figura 2.8.

- Altura (cm), [157,183], considerando as faixas 57 – 163, 162 – 168, 167 – 173, 172 – 178 e 177 – 183, com os termos linguísticos: *baixa*, *média baixa* , *média* , *média alta* e *alta*, respectivamente; também as funções de pertinência triangulares, veja Figura 2.9.
- O domínio da variável de saída “Grau de Risco” é o intervalo [18,35] e considerando os termos linguísticos: *saudável*, *moderado* e *alto*, com funções de pertinências trapezoidais como mostra a Figura 2.10.

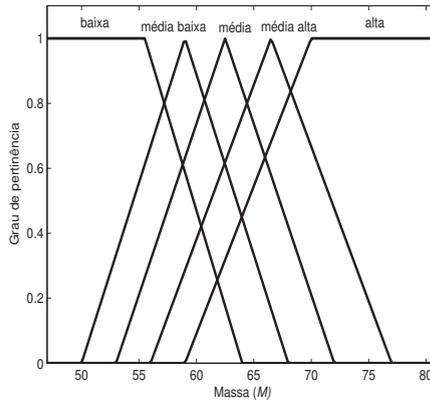


Figura 2.8: Funções de pertinência da massa (M).

As regras fuzzy são apresentadas na Tabela 2.5.

Tabela 2.5: Regras fuzzy.

Altura (A) \ Massa (M)	Regras fuzzy				
	<i>baixa</i>	<i>média baixa</i>	<i>média</i>	<i>média alta</i>	<i>alta</i>
<i>baixa</i>	<i>saudável</i>	<i>moderado</i>	<i>moderado</i>	<i>moderado</i>	<i>alto</i>
<i>média baixa</i>	<i>saudável</i>	<i>saudável</i>	<i>moderado</i>	<i>moderado</i>	<i>moderado</i>
<i>média</i>	<i>saudável</i>	<i>saudável</i>	<i>saudável</i>	<i>moderado</i>	<i>moderado</i>
<i>média alta</i>	<i>saudável</i>	<i>saudável</i>	<i>saudável</i>	<i>saudável</i>	<i>moderado</i>
<i>alta</i>	<i>saudável</i>	<i>saudável</i>	<i>saudável</i>	<i>saudável</i>	<i>saudável</i>

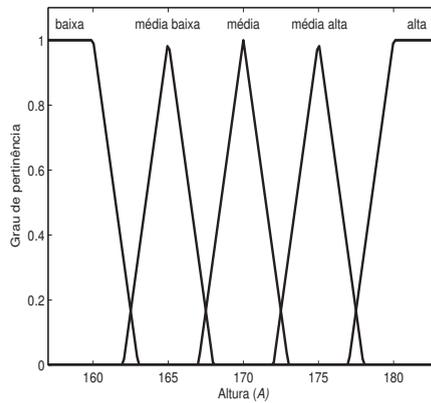


Figura 2.9: Funções de pertinência da altura (A).

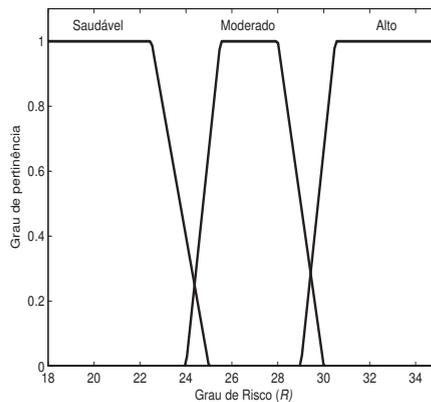


Figura 2.10: Funções de pertinência do grau de risco (R).

Assim, dados os valores da altura e a massa de uma pessoa, tem-se como resultado a inferência de um valor, no intervalo $[15,40]$ que representa o grau de risco R . Neste sentido, é possível obter uma saída do sistema de inferência, por exemplo, com altura 164 cm e peso 59 kg, após a defuzzificação encontramos um valor igual 23,9; orientando que a pessoa está *saudável*.

2.7.3 Qualidade da Água

O objetivo deste exemplo é analisar a qualidade da água abordando três aspectos de potabilidade da água. Para a fuzzificação foram utilizadas infor-

mações da SABESP (Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo) que regulamenta e fiscaliza a qualidade da água para o consumo humano no estado de São Paulo.

As variáveis de entrada escolhidas para garantir a potabilidade da água são: cor aparente (medida em UH - unidade Hazen), pH (potencial hidrogeniônico, ou seja, concentração de íons de hidrogênio - onde os valores variam de 0 a 14), e a turbidez (causada pela presença de substâncias suspensas e coloidais - é determinada pela quantidade de luz dispersada quando ela passa através de uma amostra e é medida em UT, ou seja, unidades de cor).

Além dessas três variáveis da água que vamos analisar, poderíamos utilizar outras, tais como: odor e sabor, nível de flúor, nível de cloro residual, quantidade de coliformes fecais e totais.

A variável de saída é a qualidade da água com os termos linguísticos: *boa*, *adequada* e *inadequada* para o consumo, veja Figura 2.14.

As variáveis de entrada são classificadas a seguir, suas funções de pertinências são trapezodais, veja Figuras 2.11, 2.12 e 2.13.

- Cor aparente:
 - Menor ou igual a 5UH - *boa*;
 - Maior que 5UH e menor ou igual a 15UH - *adequada*;
 - Maior que 15UH - *inadequada*.
- pH:
 - De 6,5 a 8,5 - *bom*;
 - De 6 a 10 - *adequado*;
 - Menor que 6 ou Maior que 10 - *inadequado*.
- Turbidez:
 - Menor ou igual a 1UT - *boa* ;
 - Maior que 1UT e menor que 5UT - *adequada*;
 - Maior que 5UT - *inadequada*.

Através das informações da SABESP, podemos constatar que a qualidade da água é boa para o consumo quando a cor aparente e a turbidez se aproximam de “zero” e o pH se manter em torno de 7. Desta forma, o controle da qualidade da água para o consumo humano, deve ser cuidadoso, com o intuito de evitarmos doenças posteriores.

As Tabelas 3.7, 3.8 e 3.9 fornecem a base de regras quando a aparência da água é boa, adequada e inadequada, respectivamente, estas regras foram feitas utilizando as informações da SABESP e o bom senso.

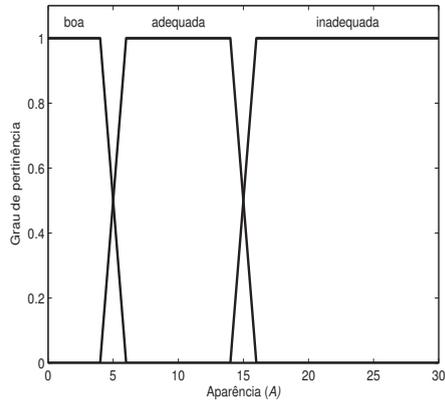


Figura 2.11: Funções de pertinência da aparência de água (A).

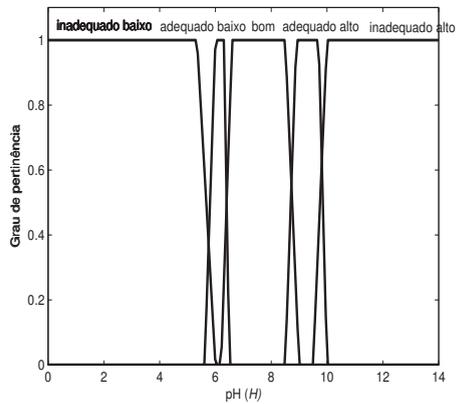


Figura 2.12: Funções de pertinência do pH (H).

Tabela 2.6: Regras fuzzy quando a aparência da água é boa.

	Turbidez (T)	<i>boa</i>	<i>adequada</i>	<i>inadequada</i>
$\text{pH}(H)$	<i>inadequado baixo</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>
<i>adequado</i>	<i>adequada</i>	<i>adequada</i>	<i>inadequada</i>	
<i>bom</i>	<i>boa</i>	<i>boa</i>	<i>inadequada</i>	
<i>inadequado alto</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>	

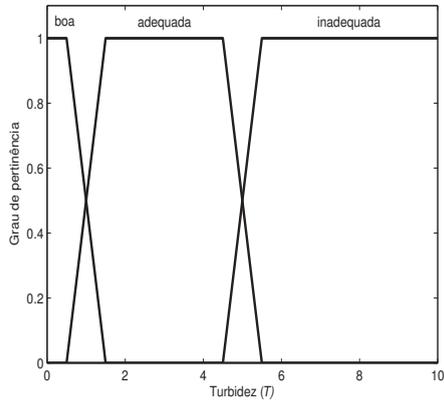


Figura 2.13: Funções de pertinência da turbidez (T).

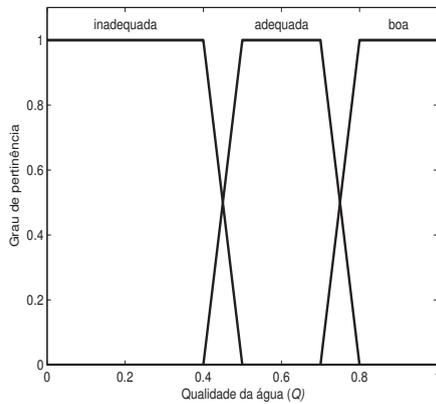


Figura 2.14: Funções de pertinência da qualidade da água (Q).

Tabela 2.7: Regras fuzzy quando a aparência da água é *adequada*.

	Turbidez (T)	<i>boa</i>	<i>adequada</i>	<i>inadequada</i>
pH(H)	<i>inadequado baixo</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>
<i>adequado</i>	<i>adequada</i>	<i>adequada</i>	<i>adequada</i>	<i>inadequada</i>
<i>bom</i>	<i>boa</i>	<i>boa</i>	<i>adequada</i>	<i>inadequada</i>
<i>inadequado alto</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>

Tabela 2.8: Regras fuzzy quando a aparência da água é *inadequada*.

pH(H) \ Turbidez (T)	<i>boa</i>	<i>adequada</i>	<i>inadequada</i>
	<i>inadequado baixo</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>
<i>adequado</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>
<i>bom</i>	<i>adequada</i>	<i>adequada</i>	<i>inadequada</i>
<i>inadequado alto</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>	<i>inadequada</i>

Assim, é possível obter uma saída do sistema de inferência. Por exemplo, quando a aparência da água é 15 UH, o pH é 7 e a turbidez é 0 UT, após a defuzzificação encontramos um valor igual 0,5, orientando que a qualidade da água é *adequada*.

2.7.4 Taxa de Infecção: Coronavírus

Nesta seção é apresentado um modelo fictício de uma população que tem indivíduos contaminados com o coronavírus. A modelagem do SBRF tem como objetivo estimar a taxa de infecção dos indivíduos suscetíveis pelos infectados. As variáveis de entrada são: adesão às medidas de proteção e isolamento social com valores no intervalo $[0,1]$. As medidas de proteção (máscara, álcool gel e lavagem das mãos) são recomendadas pela Organização Mundial da Saúde (OMS) [61]. Na Figura 2.15 é apresentado o diagrama do SBRF construído.

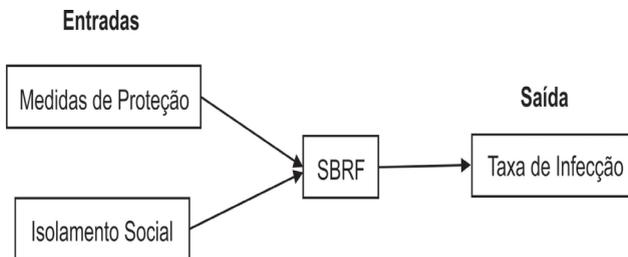


Figura 2.15: Diagrama do SBRF.

Os termos linguísticos para a variável de entrada “Medidas de Proteção” (MP) são: *inadequada*, *média* e *eficiente*. Para a variável de entrada “Isolamento Social” (IS) são: *pequeno*, *médio* e *grande* e para a variável de saída, Taxa de Infecção (TI), são: *baixa*, *média*, *alta*. As funções de pertinências das variáveis de entrada e saída são trapezoidais. O método de inferência fuzzy utilizado é o de Mamdani e o método de defuzzificação é o Centro de Gravidade. As nove regras de inferência são apresentadas na Tabela 2.9.

As Figuras 2.16 e 2.17 apresentam as funções de pertinência das variáveis

Tabela 2.9: Regras fuzzy.

Isolamento Social (<i>IS</i>)		<i>pequeno</i>	<i>médio</i>	<i>grande</i>
Med. de Proteção(<i>MP</i>)	<i>inadequada</i>	<i>alta</i>	<i>alta</i>	<i>média</i>
	<i>média</i>	<i>alta</i>	<i>média</i>	<i>baixa</i>
	<i>eficiente</i>	<i>média</i>	<i>baixa</i>	<i>baixa</i>

de entrada. As funções de pertinência da variável de saída são apresentadas na Figura 2.18.

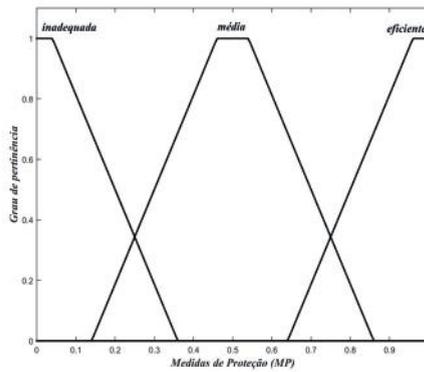


Figura 2.16: Funções de pertinência das medidas de proteção (*MP*).

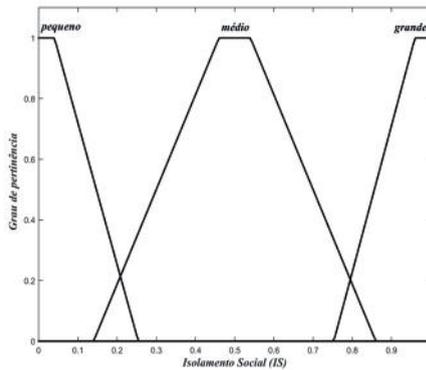


Figura 2.17: Funções de pertinência do isolamento social (*IS*).

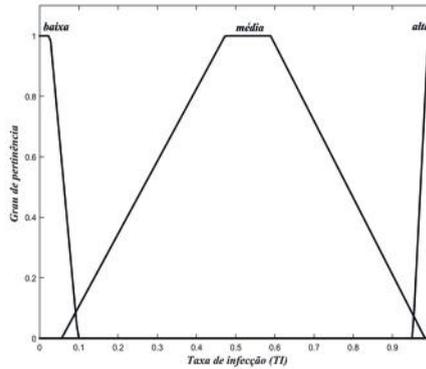


Figura 2.18: Funções de pertinência da taxa de infecção (TI).

Assim, é possível obter a saída do sistema de inferência fuzzy. Por exemplo, quando a medida de proteção é 0,1 e o isolamento social é 0,1, após a defuzzificação o sistema fornece a taxa de infecção dos indivíduos suscetíveis pelos infectados que é 0,985, orientando uma taxa de infecção *alta*. Outro exemplo, quando a medida de proteção é 0,8 e o isolamento social é 0,2, o sistema fornece a taxa de infecção dos indivíduos suscetíveis pelos infectados de 0,504, orientando uma taxa de infecção *média*.

Na próxima seção é apresentado o *Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System* (ANFIS), foi desenvolvido em [30]. Este é um sistema neuro-fuzzy utilizado para ajustar as funções de pertinência e as regras de um SBRF com o objetivo de estimar uma resposta [41, 55].

2.8 ANFIS

Segundo [20], ANFIS é uma técnica híbrida em inteligência artificial, que infere conhecimentos utilizando os princípios da teoria dos conjuntos *fuzzy* e acrescenta a essa estrutura a possibilidade de aprendizagem inerente às redes neurais artificiais. Dessa forma, esse sistema híbrido resolve um dos maiores problemas da utilização da teoria dos conjuntos fuzzy, que é a sintonia das funções de entrada e de saída de um SBRF. Esta abordagem permite determinar um SBRF a partir de conhecimentos obtidos da literatura ou de dados experimentais das variáveis de entrada e saída, sendo o método de inferência utilizado o de Takagi-Sugeno. O ANFIS é uma rede neuro-fuzzy com cinco camadas. Suas camadas são interligadas através de pesos unitários.

A Figura 2.19 ilustra a arquitetura equivalente a ANFIS. Para facilitar o entendimento da rede neuro-fuzzy, é apresentado um esquema contendo apenas duas entradas, x_1 e x_2 , e uma saída, y .

O ANFIS implementa quatro regras fuzzy do tipo Takagi-Sugeno:

Regra 1: Se $(x_1 \text{ é } A_1)$ e $(x_2 \text{ é } B_1)$ então $y = f_1 = k_{10} + k_{11}x_1 + k_{12}x_2$;

Regra 2: Se $(x_1 \text{ é } A_2)$ e $(x_2 \text{ é } B_2)$ então $y = f_2 = k_{20} + k_{21}x_1 + k_{22}x_2$;

Regra 3: Se $(x_1 \text{ é } A_2)$ e $(x_2 \text{ é } B_1)$ então $y = f_3 = k_{30} + k_{31}x_1 + k_{32}x_2$;

Regra 4: Se $(x_1 \text{ é } A_1)$ e $(x_2 \text{ é } B_2)$ então $y = f_4 = k_{40} + k_{41}x_1 + k_{42}x_2$;

em que A_1 e A_2 são conjuntos *fuzzy* do universo X_1 ; B_1 e B_2 são conjuntos *fuzzy* do universo X_2 ; e k_{i0} , k_{i1} e k_{i2} são os parâmetros da regra i .

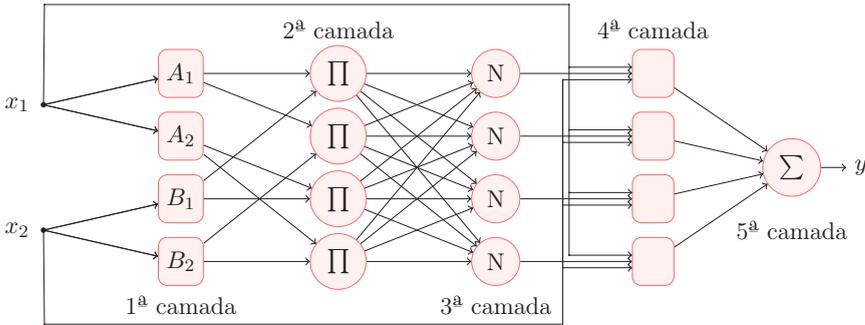


Figura 2.19: Arquitetura ANFIS [21].

Além disso, considera-se as funções de pertinência como sendo gaussianas, conforme descrito na equação

$$u_A(x) = e^{-((x-c)^2/\sigma^2)}, \quad (2.8.7)$$

em que c representa o centro da função e σ determina sua largura.

A seguir cada camada do ANFIS é abordada de maneira detalhada, de acordo com [30].

Camada 1

Após os valores de entrada serem computados, os nós desta camada calculam seus graus pertinência aos respectivos termos linguísticos de cada variável de entrada. Assim, as funções dos nós desta camada são dadas por:

$$y_i^{(1)} = u_{A_i}(x_1) \text{ para } i = 1, 2 \quad (2.8.8)$$

$$y_i^{(1)} = u_{B_{i-2}}(x_2) \text{ para } i = 3, 4, \quad (2.8.9)$$

em que A_i e B_{2-i} são os conjuntos fuzzy dos termos linguísticos relacionados os valores das entradas x_1 e x_2 , respectivamente.

Camada 2

Nesta camada a parte “Se” das regras fuzzy são criadas com base no operador “E” definido por uma t-norma. Assim, as funções dos nós desta camada são dadas por:

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= w_1 = u_{A_1}(x_1) \cdot u_{B_1}(x_2), \\ y_2^{(2)} &= w_2 = u_{A_1}(x_1) \cdot u_{B_2}(x_2), \\ y_3^{(2)} &= w_3 = u_{A_2}(x_1) \cdot u_{B_1}(x_2), \\ y_4^{(2)} &= w_4 = u_{A_2}(x_1) \cdot u_{B_2}(x_2), \end{aligned}$$

em que $y_i^{(2)}$ é a saída do nó i obtida pela t-norma do produto algébrico.

Camada 3

A terceira camada é composta por nós fixos, denotados por N . Tais nós realizam um processo de normalização dos antecedentes das regras criados na Camada 2. Assim, as funções dos nós desta camada são dadas por:

$$y_i^{(3)} = \bar{w}_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}.$$

Camada 4

Os nós desta camada computam a parte “ENTÃO” das regras criando um conjunto de parâmetros $\{k_{i0}, k_{i1}, k_{i2}\}$, denominados parâmetros consequentes. Assim, as funções dos nós desta camada são dadas por:

$$y_i^{(4)} = \bar{w}_i f_i = \bar{w}_i(k_{i0}x_1 + k_{i1}x_2 + k_{i2}).$$

Camada 5

Esta é uma camada de nó único que tem como objetivo calcular a saída do sistema neuro-fuzzy através da média ponderada das saídas de cada regra. Assim, a função de saída deste nó é dada por:

$$y_i^{(5)} = \sum_{i=1}^4 \bar{w}_i f_i. \quad (2.8.10)$$

O ANFIS também utiliza um algoritmo de aprendizagem híbrido de duas fases. É utilizado o método dos mínimos quadrados [14] para aperfeiçoar os parâmetros k_{i0} , k_{i1} e k_{i2} , e o método do gradiente descendente para otimizar os parâmetros das funções de pertinência dos antecedentes. Inicialmente as funções de pertinência são definidas igualmente espaçadas no domínio de cada variável entrada de modo a cobri-lo por completo.

Na próxima seção um SBRF é determinado a partir do ANFIS, este trabalho foi publicado em [13].

2.9 Aplicação do SBRF: Método de Takagi-Sugeno

2.9.1 Taxa de Infecção do Linfócito T do tipo $CD4+$ pelo HIV

O objetivo deste estudo é combinar informações obtidas em um autômato celular [27] com o ANFIS para determinar um SBRF, em que a variável de entrada é o tempo e variável de saída é a taxa de infecção do linfócito T do tipo $CD4+$ pelo *Human Immunodeficiency Virus* (HIV). Neste autômato celular é simulado a dinâmica populacional das células infectadas do linfócito T do tipo $CD4+$, das células não infectada deste linfócito, das partículas de vírus livres e do linfócito T citotóxico (CTL) com tratamento com antirretrovirais. O linfócito T do tipo $CD4+$ é o principal linfócito que o vírus ataca ao atingir a corrente sanguínea. Os dados da taxa de infecção podem ser calculados pela expressão:

$$\beta(t) = \frac{\text{Células infectadas do linfócito T } CD4+}{(\text{Células não infectadas do linfócito T } CD4+) \cdot \Delta t} \quad (2.9.11)$$

em que Δt é o intervalo de tempo das contagens das células. Como estas informações são obtidas a partir do autômato celular, em cada iteração é contado o número de células não infectadas e infectadas do linfócito T do tipo $CD4+$ pelo HIV, assim, $\Delta t = 1$. A partir dos dados obtidos por (2.9.11), o ANFIS gera um SBRF com o método de inferência de Takagi-Sugeno e um esquema da modelagem é apresentado na Figura 2.20.

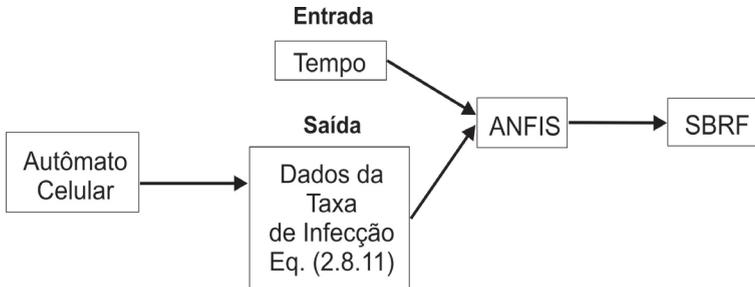


Figura 2.20: Esquema para determinar o SBRF.

No SBRF gerado pela rede neuro-fuzzy ANFIS, a variável de entrada é o tempo e a variável de saída é a taxa de infecção, veja Figura 2.21.

As funções de pertinência da variável de entrada estão apresentadas na Figura 2.22, foram escolhidas seis gaussianas.

As seis regras fuzzy determinadas pelo ANFIS estão a seguir:

- Se o tempo é *muito baixo* então $\beta(t) = -0,003621t + 0,3547$;
- Se o tempo é *baixo* então $\beta(t) = -0,001201t + 0,324$;

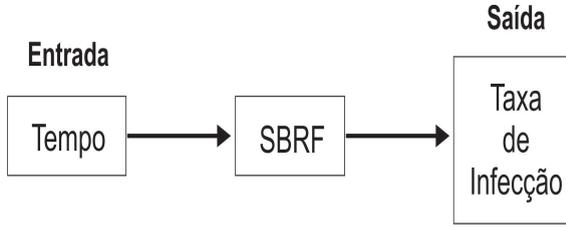


Figura 2.21: Esquema do SBRF determinado pelo ANFIS.

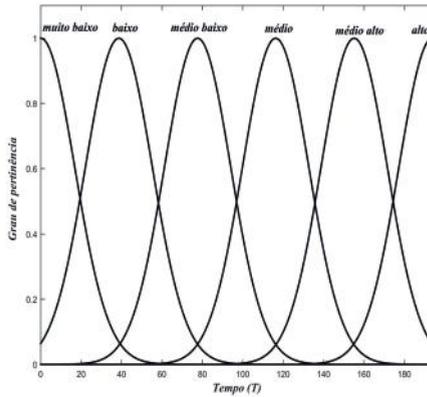


Figura 2.22: Funções de pertinência do tempo (T).

- Se o tempo é *médio baixo* então $\beta(t) = -0,0001017t + 0,2593$;
- Se o tempo é *médio* então $\beta(t) = 0,0007064t + 0,1605$;
- Se o tempo é *médio alto* $\beta(t) = 0,0008186t + 0,1095$;
- Se o tempo é *alto* $\beta(t) = 0,001741t - 0,09445$.

Utilizando comandos do *software* livre *R-Studio* ou outros é possível construir um SBRF, a partir do qual determina-se a taxa de infecção ($\beta(t)$) para todos os valores no intervalo de tempo em $[0, 200]$ (veja Figura 2.23).

O gráfico da taxa de infecção do linfócito T do tipo *CD4+* é decrescente, compatível com o fenômeno biológico, pois os indivíduos estão recebendo tratamento com antirretrovirais.

O próximo capítulo é dedicado às aplicações da teoria dos conjuntos fuzzy aliada a outras ferramentas matemáticas, como as equações diferenciais.

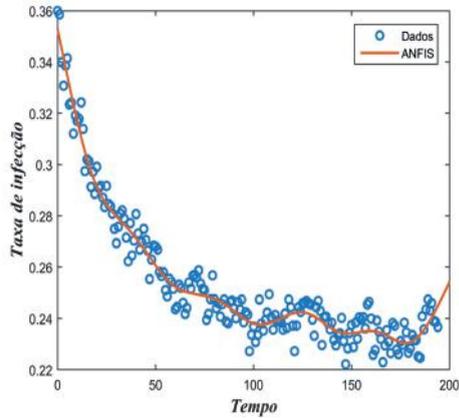


Figura 2.23: Dados da taxa de infecção gerados a partir do autômato celular e o gráfico da taxa de infecção gerado pelo ANFIS.

Exercícios

1. Assuma que você está dirigindo em uma rodovia com velocidade máxima de 100km/h . Como você caracteriza descrições tal como baixa, média, alta em termos de variáveis linguísticas? E sobre não baixa e não alta?

2. Considere as regras:

$$R_1: \text{“Se } x \text{ é baixo } (A_1) \text{ então } y_1 = x + 2\text{”};$$

$$R_2: \text{“Se } x \text{ é alto } (A_2) \text{ então } y_2 = 2x\text{”};$$

em que $u_{A_1}(x) = 1 - \frac{x}{4}$ e $u_{A_2}(x) = \frac{x}{4}$ com $x \in [0, 4]$. Determine a saída do Método de Inferência de Takagi-Sugeno [7].

3. Refaça o exercício 2, inclusive as representações gráficas, trocando os consequentes por $y_1 = x + 2$ e $y_2 = 4 - x$ [7].

Capítulo 3

Aplicações Gerais

3.1 Introdução

A literatura matemática que trata de fenômenos imprecisos tem crescido consideravelmente, principalmente em relação à teoria dos conjuntos fuzzy, utilizada com sucesso nas áreas de Engenharia. As primeiras aplicações desta teoria em Biomatemática foi em diagnóstico médico [52] e [53]. Mais recentemente outros autores têm utilizado esta abordagem em problemas de epidemiologia [8, 11, 24, 25, 26, 37, 43]. Na Seção 3.2 é apresentada uma aplicação de diagnóstico médico, nas Seções 3.3 e 3.4, sistemas de equações diferenciais ordinárias com parâmetro fuzzy e na Seção 3.5 uma aplicação do método de Takagi-Sugeno.

3.2 Diagnóstico Médico

A aplicação que é exibida trata de estabelecer o diagnóstico para doenças infantis. Tal estudo foi desenvolvido pelas estudantes Mariana Fernandes dos Santos Villela e Patrícia Borges dos Santos do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia [59], apresentado na 7ª Semana da Matemática da Universidade Federal de Uberlândia [60].

3.2.1 Base de Conhecimentos

O objetivo é utilizar equações relacionais fuzzy da forma (2.4.4) em que as relações fuzzy sintomas dos pacientes e das doenças, com esses sinais, “captam” os possíveis diagnósticos dos pacientes.

Para isto, foi preciso a opinião de um especialista na área. Neste caso, dois pediatras foram consultados. A ideia básica é relacionar os sintomas ou sinais de pacientes com as possíveis doenças. Tais doenças são catapora, caxumba, coqueluche e meningite. Considere os seguintes conjuntos universais:

- U_1 = conjuntos dos pacientes do especialista 1;
- U_2 = conjuntos dos pacientes do especialista 2;

- V = conjunto dos sintomas;
- W = conjunto das doenças.

Foram analisadas as informações de dois diferentes médicos, dos quais obtivemos conhecimento de sete pacientes $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ e P_7 : sintomas $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}$ e s_{18} que apresentaram os diagnósticos d_1, d_2, d_3 e d_4 , em que:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| • s_1 : pintas vermelhas no corpo | • s_{10} : infecção glândulas salivares; |
| • s_2 : coceira | • s_{11} : tosse seca; |
| • s_3 : febre | • s_{12} : coriza; |
| • s_4 : cansaço | • s_{13} : dor muscular; |
| • s_5 : cefaléia | • s_{14} : fraqueza; |
| • s_6 : perda de apetite | • s_{15} : dor ao mastigar ou engolir; |
| • s_7 : rigidez na nuca | • s_{16} : mal estar; |
| • s_8 : calafrios | • s_{17} : vômito; |
| • s_9 : confusão mental | • s_{18} : dor de garganta; |
| • d_1 : catapora | • d_3 : coqueluche; |
| • d_2 : caxumba | • d_4 : meningite. |

Esses dados irão compor a base de conhecimentos que serão expressos por meio de relações fuzzy. A Tabela 3.1 representa a relação fuzzy R , em que seus valores indicam o grau com que cada sintoma está relacionado com cada doença. Esses valores são as médias aritméticas obtidas através de informações de dois especialistas. As colunas são os sintomas considerados e as linhas são as doenças.

As Tabelas 3.2 e 3.4 indicam os graus com que cada sintoma se manifestou nos pacientes, dados por especialistas. A partir da relação fuzzy R é possível obter o diagnóstico médico de cada paciente, ou seja, o grau da doença para cada paciente, por meio de uma fórmula:

$$u_{R(P_j)}(d_k) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_k, s_i), u_{P_j}(s_i)]], \quad (3.2.1)$$

em que $j = 1, \dots, 7$ e $k = 1, \dots, 4$.

Por exemplo, o diagnóstico médico do paciente P_1 , via relação fuzzy R , é facilmente obtido através da equação (3.2.1). O paciente P_1 pode ter a doenças d_k , $k = 1, \dots, 4$ com os respectivos graus de possibilidades dados pelo especialista 1 (da Tabela 3.2):

$$u_{R(P_1)}(d_1) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_1, s_i), u_{P_1}(s_i)]] = 0,45;$$

Tabela 3.1: Relação fuzzy sintomas \times doenças (R).

d \ s	s									
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
d_1	1	1	0,45	0,4	0,5	0,4	0	0,1	0	0
d_2	0	0	0,3	0,15	0,7	0,5	0	0,25	0	0,8
d_3	0	0	0,9	0,45	0,25	0,25	0	0,15	0	0
d_4	0,2	0	0,95	0,5	0,8	0,8	1	0,75	0,4	0

d \ s	s							
	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{17}	s_{18}
d_1	0,2	0,3	0,05	0,2	0	0,1	0	0
d_2	0,1	0	0,4	0,4	0,9	0,3	0,05	0,75
d_3	1	0,55	0,1	0,1	0	0,6	0,05	0
d_4	0	0	0,3	0,1	0	0,85	0,8	0

$$u_{R(P_1)}(d_2) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_2, s_i), u_{P_1}(s_i)]] = 0,4;$$

$$u_{R(P_1)}(d_3) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_3, s_i), u_{P_1}(s_i)]] = 1;$$

$$u_{R(P_1)}(d_4) = \max_{1 \leq i \leq 18} [\min[u_R(d_4, s_i), u_{P_1}(s_i)]] = 0,7.$$

A fórmula (2.4.4) pode ser aplicada na forma matricial e obter os diagnósticos de todos os pacientes de uma só vez. Para isto, basta fazer o produto fuzzy (troca-se produto por min e soma por sup da multiplicação tradicional de matrizes) da matriz S por $X = R^t$ na equação (2.4.4). Assim, $S * R^t = D$ (que indica o diagnóstico de cada paciente), em que D é dada pela Tabela 3.3.

A Tabela 3.3 representa a relação fuzzy D , em que seus valores indicam o grau com que cada paciente está relacionado com cada doença. As linhas são os pacientes considerados e as colunas são as doenças. Portanto, notamos que o paciente P_1 , pela teoria aplicada, tem maior possibilidade de estar com coqueluche (d_3). O paciente P_2 pode estar com meningite (d_4), P_3 pode estar com caxumba (d_1), P_4 e P_5 podem estar com catapora (d_1) e, P_6 e P_7 podem estar com coqueluche (d_3). Segundo o especialista, os pacientes realmente possuíam as respectivas doenças. O mesmo ocorreu com os pacientes do especialista 2, a doença que teve maior possibilidade de ocorrer para cada paciente na relação fuzzy D , que será feita pelo leitor como exercício, também foi a doença que os pacientes possuíam.

Note que a resposta da composição é também um conjunto fuzzy, ou seja, a composição nem sempre responde qual doença o paciente possui, porém fornece a distribuição de possibilidades do paciente no conjunto de doenças dado que ele apresenta uma certa distribuição de possibilidades no conjunto de sintomas [36]. Outra propriedade importante da relação fuzzy é que à medida que tem-se diagnósticos de novos pacientes, estes podem ser incluídos

Tabela 3.2: Relação fuzzy pacientes \times sintomas elaborados pelo especialista 1 (S) [59].

		S									
		s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
P	P_1	0	0	0,7	0,5	0,1	0,2	0	0,5	0	0
	P_2	0	0	0,5	0,7	0,9	0,5	0,9	0,3	0,9	0
	P_3	0	0	0,5	0,3	0,8	0,7	0	0,2	0	1
	P_4	1	0,8	0,9	0,3	0	0,7	0	0,3	0	0
	P_5	1	0,5	0,9	0,2	0	0,1	0	0,5	0	0
	P_6	0	0	0,2	0,2	0,1	0,1	0	0,1	0	0
	P_7	0	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0	0,1	0	0

		S							
		s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{17}	s_{18}
P	P_1	1	0,5	0,1	0,5	0	0	0	0
	P_2	0,5	0,1	0,6	0,5	0	0,8	0,7	0
	P_3	0,5	0,2	0,3	0,5	0,9	0,7	0,3	0,8
	P_4	0	0	0,2	0,3	0	0,1	0	0
	P_5	0	0,5	0,1	0,2	0	0	0	0
	P_6	1	0,3	0,1	0,1	0	0,1	0	0
	P_7	1	0,5	0,1	0,1	0	0,1	0,3	0

na base de conhecimentos e assim aumentar a capacidade de se obter mais diagnósticos por meio de relações fuzzy, tal como faz o médico.

Na próxima seção é apresentado um modelo de evolução da AIDS com parâmetro fuzzy.

3.3 Modelo de Evolução da AIDS

A Saúde Pública considera importante para o controle da população HIV-positivos a contagem de células do linfócio $T CD4+$ e da carga viral. Neste capítulo, inicialmente a taxa de transferência de assintomático para sintomático dependendo da carga viral v e do nível de $CD4+$ é estudada. Não é raro ocorrer discrepância entre a contagem de células do $CD4+$ e de carga viral, ou seja, diminuição da carga viral e do $CD4+$, ou elevação da carga viral e do $CD4+$. Nestes casos, a contagem $CD4+$ é o melhor determinante para indicação terapêutica. Assim, posteriormente trataremos a taxa de transferência de assintomático para sintomático dependendo do nível de $CD4+$. Neste modelo não estamos levando em conta tratamento com terapia antirretroviral para a população [23].

Tabela 3.3: Relação fuzzy pacientes \times doença (D).

P	d			
	d_1	d_2	d_3	d_4
P_1	0,45	0,4	1,0	0,7
P_2	0,5	0,7	0,6	0,9
P_3	0,6	0,9	0,6	0,8
P_4	1,0	0,5	0,9	0,9
P_5	1,0	0,3	0,9	0,9
P_6	0,3	0,3	1,0	0,3
P_7	0,3	0,3	1,0	0,5

Tabela 3.4: Relação fuzzy pacientes \times sintomas elaborados pelo especialista 2 [59].

P	s									
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
P_1	1,0	0,5	0,9	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	1,0	0	1,0	0	1,0	0	0	0
P_3	1,0	0,7	1,0	0,9	0	0	0	0	0	0
P_4	0	0	1,0	0	0	1,0	0	0	0	0
P_5	0	0,7	0	0	1,0	1,0	1,0	0	1,0	0
P_6	1,0	0,5	1,0	0	0	0	0	0	0	0
P_7	1,0	0,9	0,9	0	0,5	0	0,5	0,5	0,3	0

P	s							
	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{17}	s_{18}
P_1	0	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	0	0	0	0	1,0	0
P_3	0	0	0	0,9	0	0	0	0
P_4	1,0	0	0	0	0	0	1,0	0
P_5	0,9	0	0	0	0	0	1,0	0
P_6	0	0	0	0,5	0	0	1,0	1,0
P_7	0,4	0,5	0	0,4	0	0,5	0,7	0

3.3.1 Informações Médicas sobre HIV

Inicialmente se acreditava que a AIDS tinha um longo período de latência clínica entre a infecção e o desenvolvimento da doença manifesta. Contrária a essa visão, recente pesquisa sobre as contagens de células $CD4+$ e a replicação viral revela que o estágio intermediário da doença é, na verdade, muito dinâmico. Essa pesquisa demonstrou, através da análise da meia-vida das células, da taxa de replicação viral e da vida média do HIV, que diariamente sobrevive uma quantidade de vírus maior do que as de células $CD4+$ (o HIV possui uma replicação de 10^{10} vírus/dia e a produção de $CD4+$ é, no

máximo, 2×10^9 unidades/dia). Ao longo do tempo essa diferença confere um desequilíbrio em favor do HIV, levando a apresentação clínica dos sintomas relacionados à AIDS. Assim, a AIDS é uma consequência dos altos níveis de replicação contínua do HIV em detrimento da menor velocidade de produção de células de defesa, que leva à inutilização e destruição dos linfócitos $CD4+$, mediadas pelo próprio vírus ou por mecanismos imunológicos.

A contagem de células $CD4+$ em sangue periférico tem implicações prognósticas na evolução da infecção pelo HIV, pois é a marca registrada de déficit imunológico e pode ser associada a certos parâmetros clínicos. É a medida de imunocompetência celular mais útil clinicamente no acompanhamento de pacientes infectados pelo HIV e a mais amplamente aceita, embora não seja a única. De maneira didática, pode-se dividir a contagem de células $CD4+$ por mililitro do sangue periférico em quatro faixas [54]:

- **$CD4+ > 0,5$ células/ml:** Estágio da infecção pelo HIV com baixo risco de doença. Neste estágio, há boa resposta às imunizações de rotina e boa confiabilidade nos testes cutâneos de hipersensibilidade tardia como o PPD¹. Casos de infecção aguda podem ter estes níveis de $CD4+$, embora, de modo geral, esses pacientes tenham níveis mais baixos.
- **$CD4+$ entre 0,2 e 0,5 células/ml:** Estágio caracterizado por surgimento de sinais e sintomas menores ou alterações constitucionais. Risco moderado de desenvolvimento de doenças oportunistas. Nesta fase podem aparecer candidíase oral, herpes simples recorrente, herpes zóster, tuberculose, leucoplasia pilosa oral, pneumonia bacteriana.
- **$CD4+$ entre 0,05 e 0,2 células/ml:** Estágio com alta probabilidade de surgimento de doenças oportunistas como pneumocistose, toxoplasmose de SNC, neurocriptococose, histoplasmose, citomegalovirose localizada. Está associado à síndrome consumptiva, leucoencefalopatia multifocal progressiva, candidíase esofágica e outras.
- **$CD4+ < 0,05$ células/ml:** Estágio com grave comprometimento de resposta imunitária. Alto risco de surgimento de doenças oportunistas como citomegalovirose disseminada, sarcoma de Kaposi, linfoma não-Hodgkin e infecção por microbactérias do complexo *Avium-Intracellulare*. Alto risco de morte com baixa sobrevida.

A quantificação da carga viral e a contagem de $CD4+$ são utilizadas para iniciar ou alterar a terapêutica antirretroviral. Quando não há disponibilidade de quantificação da carga viral pode-se basear na contagem de células $CD4+$.

¹PPD (Derivado Protéico Purificado): teste recomendado de rotina anual para avaliação da necessidade de quimioprofilaxia para tuberculose.

Em caso de início ou mudança de terapia antirretroviral, alguns autores recomendam uma medida de acompanhamento da carga viral após 1 a 2 meses para avaliar o tratamento. Os resultados devem ser interpretados da seguinte maneira:

- **Carga viral abaixo de 10,000 cópias de RNA por ml:** baixo risco de progressão ou piora da doença.
- **Carga viral entre 10.000 e 100.000 cópias de RNA por ml:** risco moderado de progressão ou piora da doença.
- **Carga viral acima de 100.000 cópias de RNA por ml:** alto risco de progressão ou piora da doença.

Em 2000 o Ministério da Saúde organizou um documento com o título: *Recomendações para terapia antirretroviral em adultos e adolescentes infectados pelo HIV*, que contém a Tabelas 3.5.

A conversão do portador assintomático para portador sintomático depende das características individuais, conforme a contagem da carga viral v e do nível de $CD4+$.

O modelo fuzzy é considerado como um sistema de equações diferenciais, com as variáveis de interesse, nível de $CD4+$ (c) e carga viral (v) incertas, dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda(v, c)x & x(0) &= 1 \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda(v, c)x = \lambda(v, c)(1 - y) & y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Do ponto de vista matemático, pode-se pensar (3.3.2) como uma família de sistemas de equações diferenciais ordinárias dependendo dos parâmetros. No caso, dependendo de λ , que por sua vez, depende de v e c . Assim, nos parece razoável que o controle de λ , e consequentemente da população y (sintomáticos), possa ser feito a partir de v e c .

Resolvendo a primeira equação de (3.3.2) para cada par (v, c) , tem-se:

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda(v, c)t}. \quad (3.3.3)$$

Com a condição inicial $x_0 = x(0) = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\lambda(v, c)t} \\ y(t) &= 1 - e^{-\lambda(v, c)t}, \end{aligned} \quad t > 0. \quad (3.3.4)$$

Tabela 3.5: Recomendações para início da terapia antirretroviral.

Situação Clínica	Contagem de $CD4+$ (células/ml)	Carga Viral (cópias/ml)	Recomendações
Assintomático	Contagem de $CD4+$ não disponível	Carga viral não disponível	Não tratar
Assintomático	$\geq 0,5$	Independente da carga viral	Não tratar
Assintomático	$\geq 0,35 < 0,5$	< 30000	Considerar tratamento
		≥ 30000	Considerar tratamento
Assintomático	$\geq 0,2 < 0,35$	Independente de carga viral	Tratamento antirretroviral
Assintomático	$< 0,2$	Independente de carga viral	Tratar e iniciar profilaxia para infecções oportunistas
Sintomático	Independente da contagem de $CD4+$	Independente da carga viral	Tratar e iniciar profilaxia para infecções oportunistas

3.3.2 Variáveis Linguísticas e Base de Regras

Como anteriormente, é estimado a taxa de transferência $\lambda = \lambda(v, c)$ baseada nas informações médicas. Adotamos a base de regras fuzzy assumindo como antecedentes a carga viral V e o nível de $CD4+$, e Λ como conseqüente. Os termos linguísticos para V são *baixa*, *média* e *alta* e para o nível de $CD4+$ *muito baixo*, *baixo*, *médio*, *médio alto* e *alto*. A base de regras fuzzy é apresentada na Tabela 3.6.

Tabela 3.6: Base de regras fuzzy.

$CD4+$	V		
	<i>baixa</i>	<i>média</i>	<i>alta</i>
<i>muito baixo</i>	$z_4 = 1$	$z_4 = 1$	$z_4 = 1$
<i>baixo</i>	$z_3 = 0,65$	$z_4 = 1$	$z_4 = 1$
<i>médio</i>	$z_3 = 0,65$	$z_3 = 0,65$	$z_3 = 0,65$
<i>médio alto</i>	$z_2 = 0,15$	$z_2 = 0,15$	$z_3 = 0,65$
<i>alto</i>	$z_1 = 0$	$z_1 = 0$	$z_3 = 0,65$

A Tabela 3.5 relata uma fase importante da transferência de assintomático para sintomático, quando o nível de $CD4+$ está entre 0,2 e 0,5 células/ml, assim, a contagem de $CD4+$ é dividida em duas faixas: de 0,35 a 0,5

células/ml não considerar tratamento; e de 0,2 a 0,35 células/ml considerar tratamento.

O método de inferência utilizado foi Takagi-Sugeno. As funções de pertinência da carga viral e do nível de $CD4+$ são trapezoidais, Figuras 3.1 e 3.2; e as da taxa de transferência são conjuntos unitários, veja Figura 3.3. Note que dividimos os valores da carga viral por 200000 cópias de RNA/ml e com informações médicas a Figura 3.6 é construída. Por exemplo: Se V é *baixa* e $CD4+$ é *muito baixo* então Λ é *forte*.

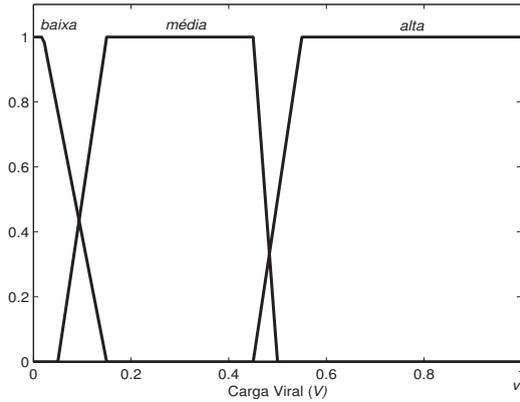


Figura 3.1: Funções de pertinência da carga viral (V).

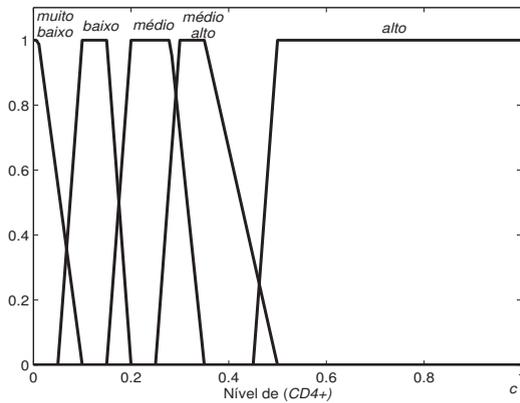


Figura 3.2: Funções de pertinência do nível de $CD4+$.

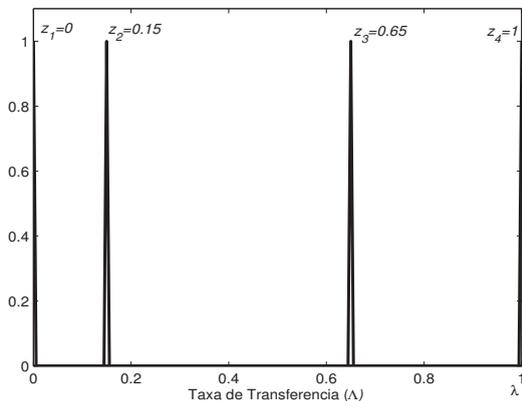


Figura 3.3: Funções de pertinência da taxa de transferência (λ).

A simulação é realizada para 60 valores para a carga viral e o nível de $CD4+$ em um indivíduo HIV-positivo, e determina-se os valores de λ , utilizando o SBRF. A superfície é construída como mostra a Figura 3.4.

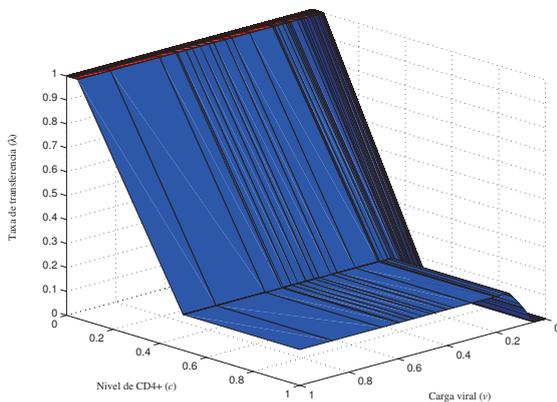


Figura 3.4: Valores da taxa de transferência defuzzificados.

Fazendo um corte na superfície paralela ao eixo do nível de $CD4+$, obtém-se a curva da Figura 3.5.

Propomos uma expressão analítica para a taxa de transferência λ como função do nível de $CD4+$ com propriedades qualitativas semelhantes à Figura 3.5. Assim, escolhemos um conjunto fuzzy λ com a seguinte função de

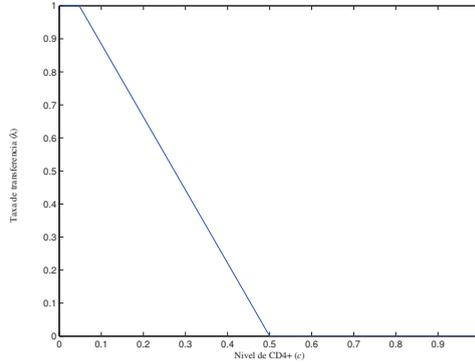


Figura 3.5: λ como função do $CD4+$ ($v = 0, 1$).

pertinência

$$\lambda(c) = \begin{cases} 1, & \text{se } c < c_{\min} \\ \frac{c_M - c}{c_M - c_{\min}} & c_{\min} \leq c \leq c_M, \\ 0, & \text{se } c_M < c < c_{\max} \end{cases}, \quad (3.3.5)$$

em que c_{\min} representa o menor nível de $CD4+$ na qual a chance do indivíduo se tornar sintomático é máxima e c_M representa o nível de $CD4+$ na qual a chance de se tornar sintomático é mínima, e c_{\max} é o maior nível de $CD4+$ possível, veja Figura 3.6.

A partir da Figura 3.5, pode-se obter os valores aproximados para c_{\min} e c_M , isto é, c_{\min} é aproximadamente 0,05 cels/ml e c_M é aproximadamente 0,5 cels/ml. Estes valores são compatíveis com as informações do Ministério da Saúde, se o nível de $CD4+$ é menor que 0,05 cels/ml a tendência é o indivíduo ser sintomático e quando o nível de $CD4+$ é maior que 0,5 cels/ml a tendência é que o indivíduo seja assintomático.

Para calcular a esperança fuzzy da população assintomática, é considerado o $CD4+$ do grupo HIV-positivo estudado (C), veja Figura 3.7, como uma variável linguística com valores *baixo*, *médio* e *alto*, sendo cada um desses valores caracterizados por conjuntos fuzzy triangulares, de acordo com a função de pertinência:

$$\rho(c) = \begin{cases} 0, & \text{se } c \leq \underline{c} - \delta \\ \frac{1}{\delta}(c - \underline{c} + \delta), & \underline{c} - \delta < c \leq \underline{c} \\ \frac{1}{\delta}(\underline{c} - c), & \underline{c} < c \leq \underline{c} + \delta \\ 0, & \text{se } c > \underline{c} + \delta \end{cases}. \quad (3.3.6)$$

O parâmetro \underline{c} é um valor modal e δ é a dispersão dos conjuntos fuzzy assumidos pela variável linguística. Estes conjuntos fuzzy serão definidos a partir dos valores c_{\min} , c_M e c_{\max} que aparecem na definição de λ .

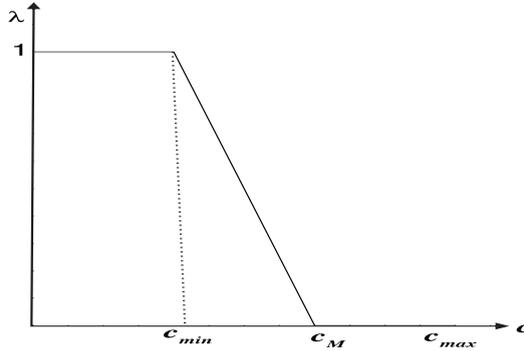


Figura 3.6: Taxa de transferência λ em função de c .

A seguir, é calculado a esperança fuzzy da população assintótica em um determinado grupo da população.

3.3.3 Esperança Fuzzy da População Assintótica

Como apresentado no Capítulo 1, a esperança fuzzy é um defuzzificador. O valor da esperança fuzzy para população assintótica $x = x(c)$ é

$$FEV[x] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \inf[\alpha, \mu\{x \geq \alpha\}], \quad (3.3.7)$$

em que $\{x \geq \alpha\} = \{c : x(c) \geq \alpha\}$ e μ é uma medida fuzzy. Como vimos no Capítulo 1, o ponto fixo da função $H_2(\alpha) = \mu\{c \mid x(c) \geq \alpha\}$, para cada $t > 0$ fornece a $FEV[x]$. Para $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} H_2(0) &= \mu\{c \mid x(c) \geq 0\} = \mu[0, 1] = 1 \text{ e} \\ H_2(1) &= \mu\{c \mid x(c) \geq 1\} = \mu[c_M, c_{\max}]. \end{aligned}$$

Para $0 < \alpha < 1$, tem-se

$$\begin{aligned} H_2(\alpha) &= \mu\{c \mid x(c) \geq \alpha\} = \mu\{c \mid e^{-\lambda(c)t} \geq \alpha\} = \mu\{c \mid \lambda(c) \leq -\frac{\ln \alpha}{t}\} = \\ &= \begin{cases} \mu[c_M, c_{\max}], & \text{se } -\frac{\ln \alpha}{t} \leq 0 \\ \mu[a_2, c_{\max}], & \text{se } 0 < -\frac{\ln \alpha}{t} \leq 1 \\ 1, & \text{se } -\frac{\ln \alpha}{t} > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mu[c_M, c_{\max}], & \text{se } \alpha = 1 \\ \mu[a_2, c_{\max}], & \text{se } e^{-t} \leq \alpha < 1, \\ 1, & \text{se } \alpha < e^{-t} \end{cases} \end{aligned}$$

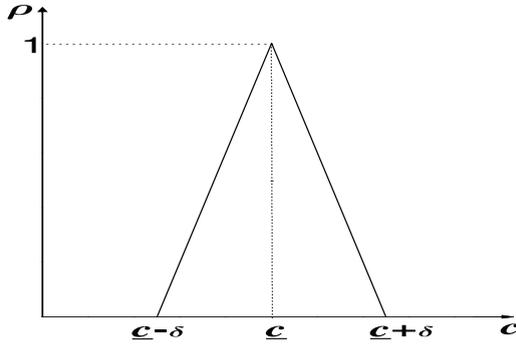


Figura 3.7: Função de pertinência adotada para c .

em que

$$a_2 = c_M - (c_M - c_{\min})\left(-\frac{\ln \alpha}{t}\right), \quad (3.3.8)$$

desta forma $c_{\min} < a_2 \leq c_M$.

A medida fuzzy é definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} \sup_{c \in A} \rho(c), & \text{se } A \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } A = \emptyset \end{cases}$$

para $A \subset \mathbb{R}$. A μ é uma medida otimista, pois o nível de $CD4+$ em um grupo está sendo avaliado no indivíduo com o melhor nível de $CD4+$. Para estudar a $FEV[x]$ são considerados três diferentes casos, de acordo com as variáveis linguísticas c , e seus valores *baixo*, *médio* e *alto*, com cada um destes valores sendo um número fuzzy que depende dos valores c_{\min} , c_M e c_{\max} que aparecem na definição de λ .

1. **Caso: Nível de $CD4+$ baixo (C_-).**

Neste caso, tomando $c_{\min} > c + \delta$, veja Figura 3.8.

Como $a_2 > c_{\min}$, tem-se $\mu[c_M, c_{\max}] = 0$ e $\mu[a_2, c_{\max}] = 0$. Logo,

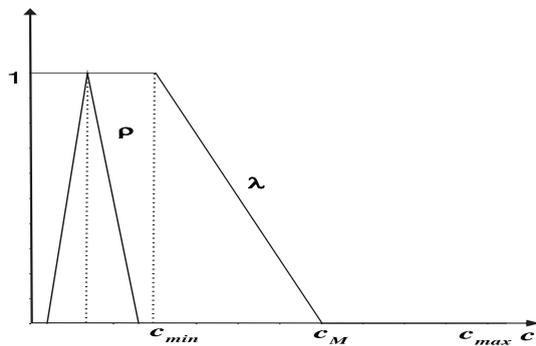
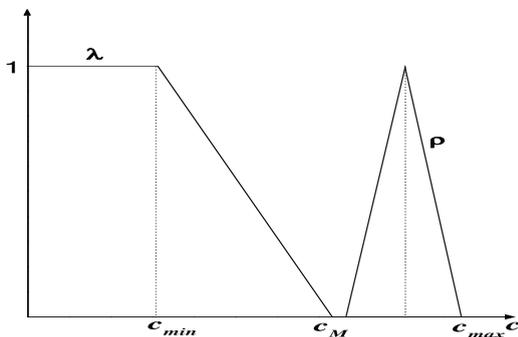
$$H_2(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{se } e^{-t} \leq \alpha \leq 1 \\ 1, & \text{se } \alpha < e^{-t} \end{cases} .$$

Portanto, $FEV[x] = e^{-t}$.

2. **Caso: Nível de $CD4+$ alto (C_+).**

Neste caso, tomando $c_M \leq c - \delta$ e $c + \delta \leq c_{\max}$.

A Figura 3.9 mostra que $a_2 \leq c_M$ e obtém-se $\mu[c_M, c_{\max}] = 1$ e $\mu[a_2, c_{\max}] = 1$, logo $H_2(\alpha) = 1$ se $0 \leq \alpha \leq 1$. Portanto, $FEV[x] = 1$.

Figura 3.8: Nível de $CD4+$ *baixo*.Figura 3.9: Nível de $CD4+$ *alto*.

3. **Caso: Nível de $CD4+$ médio (C_-^+).**

Neste caso, tomando $\underline{c} - \delta > c_{\min}$ e $\underline{c} + \delta < c_M$ e $\mu[c_M, c_{\max}] = 0$, veja Figura 3.10.

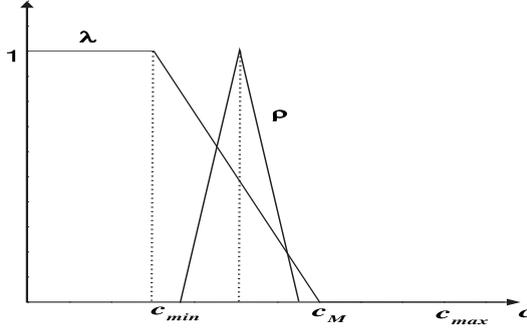


Figura 3.10: Nível de $CD4+$ médio.

Fazendo alguns cálculos, obtém-se:

$$H_2(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < \alpha \leq e^{-\left(\frac{-\underline{c}+c_M}{c_M-c_{\min}}\right)t} \\ \psi(a_2), & \text{se } e^{-\left(\frac{-\underline{c}+c_M}{c_M-c_{\min}}\right)t} < \alpha < e^{-\left(\frac{-\underline{c}-\delta+c_M}{c_M-c_{\min}}\right)t}, \\ 0, & \text{se } e^{-\left(\frac{-\underline{c}-\delta+c_M}{c_M-c_{\min}}\right)t} < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (3.3.9)$$

em que $\psi(a_2) = \frac{1}{\delta}[-c_M - (c_M - c_{\min})\left(\frac{\ln \alpha}{t}\right) + \underline{c} + \delta]$. A partir de (3.3.9), conclui-se que $H_2(\alpha)$ é contínua e uma função decrescente com $H_2(0) = 1$ e $H_2(1) = 0$. Entretanto, H_2 tem um único ponto fixo que coincide com $FEV[x]$, veja Figura 3.11. Portanto,

$$e^{-\lambda(\underline{c})t} \leq FEV[x] \leq e^{-\lambda(\underline{c}+\delta)t}. \quad (3.3.10)$$

Observe que derivando em relação a t a expressão $\alpha = \psi(a_2)$ de (3.3.9), determina-se $\frac{d\alpha}{dt}$, dada por:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{(c_M - c_{\min})\alpha \ln(\alpha)}{t[\alpha\delta t + (c_M - c_{\min})]}. \quad (3.3.11)$$

O sinal de (3.3.11) é negativo, pois $0 < \alpha < 1$. Assim, $\alpha = FEV[x]$ é decrescente com t .

A partir de 3.3.10, a seguinte proposição é enunciada.

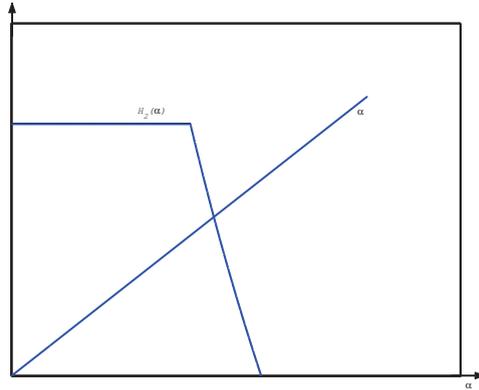


Figura 3.11: A função $H_2(\alpha)$.

Proposição 3.1. *Para cada $t > 0$, existe um único $c(t) \in (\underline{c}, \underline{c} + \delta)$ para o qual $FEV[x] = e^{\left(\frac{c(t)-c_M}{c_M-c_{\min}}\right)t}$.*

Prova: A função $H_2(\alpha)$ é contínua, decrescente e tem $FEV[x]$ como seu ponto fixo. A desigualdade (3.3.10) fornece o intervalo que contém $FEV[x]$. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um único $c(t)$ no intervalo $(\underline{c}, \underline{c} + \delta)$. Tal que

$$FEV[x] = e^{\left(\frac{c(t)-c_M}{c_M-c_{\min}}\right)t} \quad \blacksquare \quad (3.3.12)$$

Consequentemente, a esperança fuzzy não é solução de (3.3.2). A Proposição 3.1 mostra que, para cada instante t , existe uma solução de (3.3.2) em t que coincide com a $FEV[x]$. A $FEV[x]$ é diferenciável e satisfaz a seguinte equação diferencial com o parâmetro $c(t)$ dependendo do tempo:

$$\frac{dx}{dt} = - \left[\lambda(c(t)) + t \frac{d\lambda}{dt}(c(t)) \frac{dc}{dt}(t) \right] x. \quad (3.3.13)$$

Na próxima seção, é calculada a proporção da população assintótica considerando a taxa de transferência do valor modal \underline{c} , para compararmos com a desigualdade (3.3.10).

3.3.4 População Assintótica com a Taxa de Transferência no Valor Modal

Nesta seção é calculado a proporção da população assintótica considerando a taxa de transferência correspondente ao valor modal \underline{c} . Para comparar com o valor da $FEV[x]$, em três casos diferentes, de acordo com a

variável linguística $CD4+$, que são *baixo*, *médio* e *alto* com cada uma destas sendo um número fuzzy baseado nos valores c_{\min} , c_M e c_{\max} que aparecem na definição de λ .

1. **Caso: Nível de $CD4+$ baixo (C_-).**

Neste caso, tomando $c_{\min} > \underline{c} + \delta$. Tem-se que $\lambda(\underline{c}) = 1$, logo, $x(t) = e^{-t}$. Portanto, igual a $FEV[x]$.

2. **Caso: Nível de $CD4+$ alto (C_+).**

Neste caso, tomando $c_M \leq \underline{c} - \delta$ e $\underline{c} + \delta \leq c_{\max}$. Tem-se $\lambda(\underline{c}) = 0$, logo, $x(t) = 1$. Portanto, igual a $FEV[x]$.

3. **Caso: Nível de $CD4+$ médio (C^+).**

Neste caso, tomando $\underline{c} - \delta > c_{\min}$ e $\underline{c} + \delta < c_M$. Tem-se $\lambda(\underline{c}) = \frac{-\underline{c} + c_M}{c_M - c_{\min}}$, logo, $x(t) = e^{-\left(\frac{-\underline{c} - c_M}{c_M - c_{\min}}\right)t}$. Assim,

$$e^{-\left(\frac{-\underline{c} - c_M}{c_M - c_{\min}}\right)t} < FEV[x].$$

Destes três casos, conclui-se que:

$$e^{-\left(\frac{-\underline{c} - c_M}{c_M - c_{\min}}\right)t} \leq FEV[x]. \tag{3.3.14}$$

3.3.5 Esperança Fuzzy da Taxa de Transferência

A esperança fuzzy de λ , interpretada como a taxa média de transferência associada ao conjunto fuzzy λ , é dada por:

$$FEV[\lambda] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \inf[\alpha, \mu\{\lambda \geq \alpha\}],$$

em que $\{\lambda \geq \alpha\} = \{c \in \mathbb{R} : \lambda(c) \geq \alpha\}$ e μ é uma medida fuzzy.

Seja $H_3(\alpha) = \mu\{c \mid \lambda(v) \geq \alpha\}$. É fácil ver que, se $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, então $H_3(0) = 1$ e $H_3(1) = \mu[0, c_{\min}]$. Para $0 < \alpha < 1$, tem-se

$$H_3(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = 0 \\ \mu[0, a_3], & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \mu[0, c_{\min}], & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} .$$

em que $a_3 = c_M - (c_M - c_{\min})\alpha$.

Para comparar com os resultados das seções anteriores, são considerados os três diferentes casos, de acordo com os valores linguísticos de c , *baixo*, *médio* e *alto*, em que cada um deles é um número fuzzy baseado nos valores c_{\min} , c_M e c_{\max} que aparecem na definição de λ .

1. **Caso: $CD4+$ baixo (C_-).**

Neste caso, tomando $c_{\min} > \underline{c} + \delta$, veja Figura 3.8, como $a_3 > c_{\min}$, tem-se que $\mu[0, c_{\min}] = 1$ e $\mu[0, a_3] = 1$.

$$H_3(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} .$$

Desta forma, $FEV[\lambda] = 1$, logo, $e^{-FEV[\lambda]t} = e^{-t}$. Coincide com os primeiros itens das seções anteriores.

2. **Caso: Nível de CD4+ alto (C_+).**

Neste caso, tomando $c_M \leq \underline{c} - \delta$ e $\underline{c} + \delta \leq c_{\max}$, a Figura 3.9, mostra que $a_3 \leq v_M$ e obtém-se $\mu[0, c_{\min}] = 0$ e $\mu[0, a_3] = 0$. Portanto,

$$H_3(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = 0 \\ 0, & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Desta forma, $FEV[\lambda] = 1$, logo, $e^{-FEV[\lambda]t} = e^{-t}$. Coincide com os segundos itens das seções anteriores.

3. **Caso: Nível de CD4+ médio (C_+).**

Neste caso, tomando $\underline{c} - \delta > c_{\min}$ e $\underline{c} + \delta < c_M$, veja Figura 3.10, fazendo alguns cálculos, obtém-se:

$$H_3(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \frac{-\underline{c}+c_M}{c_M-c_{\min}} \\ \psi_1(a_3), & \text{se } \frac{-\underline{c}+c_M}{c_M-c_{\min}} < \alpha \leq \frac{-\underline{c}+\delta+c_M}{c_M-c_{\min}}, \\ 0, & \text{se } \frac{-\underline{c}+\delta+c_M}{c_M-c_{\min}} < \alpha < 1 \end{cases}, \quad (3.3.15)$$

em que $\psi_1(a_3) = \frac{1}{\delta}[c_M - (c_M - c_{\min})\alpha - \underline{c} + \delta]$. A partir da expressão anterior, conclue-se que $H_3(\alpha)$ é contínua e uma função decrescente com $H_3(0) = 1$ e $H_3(1) = 0$. Entretanto, H_3 tem um único ponto fixo que coincide com $FEV[\lambda]$, veja Figura 3.11.

Assim,

$$\frac{-\underline{c} + c_M}{c_M - c_{\min}} < FEV[\lambda] < \frac{-\underline{c} + \delta + c_M}{c_M - c_{\min}}.$$

Logo,

$$e^{-\left(\frac{-\underline{c}+\delta+c_M}{c_M-c_{\min}}\right)t} < e^{-FEV[\lambda]t} < e^{-\left(\frac{-\underline{c}+c_M}{c_M-c_{\min}}\right)t}.$$

Pode-se concluir que:

$$e^{-FEV[\lambda]t} < e^{-\lambda(\underline{c})t}. \quad (3.3.16)$$

Determinando o valor de $FEV[\lambda]$, que é o ponto fixo de $\psi_1(a_3)$, resolvendo a seguinte equação:

$$\frac{1}{\delta}[c_M - (c_M - c_{\min})\alpha - \underline{c} + \delta] = \alpha \quad (3.3.17)$$

$$\alpha = \frac{-\underline{c} + \delta + c_M}{c_M - c_{\min} + \delta}. \quad (3.3.18)$$

Portanto, $FEV[\lambda] = \frac{-\underline{c} + \delta + c_M}{c_M - c_{\min} + \delta}$. Observe que $e^{-FEV[\lambda]t}$ é solução do sistema de equações diferenciais (3.3.19) apenas para c^* dado em (3.3.20).

Considere

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda(c)x & x(0) &= 1 \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda(c)x = \lambda(c)(1-y) & y(0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

e tem-se

$$c^* = \frac{(\underline{c} - \delta - c_M)(c_M - c_{\min})}{c_M - c_{\min} + \delta} + c_M. \quad (3.3.20)$$

Fazendo alguns cálculos, é verificado que $\lambda(c^*) = FEV[\lambda]$ e, de (3.3.16), conclue-se que:

$$e^{-\lambda(c^*)t} < e^{-\lambda(\underline{c})t}. \quad (3.3.21)$$

Logo, $\lambda(c^*) > \lambda(\underline{c})$ e, como λ é decrescente, tem-se que $c^* < \underline{c}$. Por outro lado, é conhecido que

$$\frac{c_M - c_{\min}}{c_M - c_{\min} - \delta} < 1. \quad (3.3.22)$$

Após alguns cálculos obtém-se $c^* > \underline{c} - \delta > c_{\min}$. Logo, conclue-se que $c_{\min} < c^* < \underline{c}$.

3.3.6 Comparações entre Populações HIV via Esperança Fuzzy

Comparando o nível da $CD4+$ médio, a esperança fuzzy da população assintomática (3.3.10), a proporção da população assintomática com a taxa de transferência no valor modal \underline{c} (3.3.14) e a proporção da população assintomática com a esperança fuzzy da taxa de transferência (3.3.16), e também os níveis de $CD4+$ baixo e alto, conclue-se que

$$e^{-FEV[\lambda]t} \leq e^{-\lambda(\underline{c})t} \leq FEV[x]. \quad (3.3.23)$$

Das desigualdades (3.3.10) e (3.3.23), tem-se que:

$$e^{-FEV[\lambda]t} \leq e^{-\lambda(\underline{c})t} \leq FEV[x] \leq e^{-\lambda(\underline{c} + \delta)t}. \quad (3.3.24)$$

3.3.7 Comentários Finais

Para o modelo que trata da taxa de transferência dependendo de c , a solução do modelo determinístico considerando o valor de \underline{c} , é $x(t) = e^{-\lambda(\underline{c})t}$. A $FEV[x]$ é menor que $e^{-\lambda(\underline{c} + \delta)t}$ como mostra (3.3.10) e assim depende da dispersão populacional δ do nível de $CD4+$ do grupo estudado. Quando $\delta \rightarrow 0$, $FEV[x] \rightarrow e^{-\lambda(\underline{c})t}$, isto é, depende somente do $CD4+$. Isto indica que, para uma população homogênea, isto é, para uma população com o nível de $CD4+$ ao redor do valor modal do conjunto fuzzy triangular, o número médio da população assintomática aproxima-se de $e^{-\lambda(\underline{c})t}$.

Na próxima seção é apresentada uma parte da monografia da estudante Wanda Aparecida Lopes que foi desenvolvida no VII Curso de Especialização em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia [34] e foi apresentado no BIOMAT2005 [33].

3.4 Eliminação de Fármacos do Organismo

O objetivo desta seção é o estudo da eliminação de fármacos na corrente sanguínea. Primeiro é estudado o modelo clássico e, em seguida, é apresentado o modelo fuzzy.

3.4.1 Modelo Farmacocinético Clássico

Um problema fundamental em Farmacologia é saber como decai a concentração de um fármaco no sangue de um indivíduo. O conhecimento deste fato permite estabelecer qual a dosagem a ser inserida e o intervalo de tempo que cada aplicação deve ser feita.

O modelo mais simples para descrever a eliminação do fármaco de um certo compartimento é obtido quando supomos que a concentração (y) de um fármaco decai a uma velocidade que é proporcional, em cada instante, a sua própria concentração [10]. Em termos matemáticos isto pode ser dado pela equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad (3.4.25)$$

em que k é a constante de velocidade de eliminação do fármaco.

Suponha que seja dada ao indivíduo uma dose inicial y_0 , absorvida pelo sangue instantaneamente, no instante $t = 0$. A solução geral da equação (3.4.25) é dada por:

$$y = y_0 e^{-kt}. \quad (3.4.26)$$

Quando um conjunto de doses é dado em intervalos de tempos espaçados igualmente, obtém-se (3.4.27) a qual representa o nível de saturação da droga para o indivíduo considerado:

$$y_s = \frac{y_0}{1 - e^{-kt}}, \quad (3.4.27)$$

em que, k é a constante de velocidade de eliminação do fármaco, y_0 é uma dose inicial do fármaco, t é o intervalo entre as doses administradas e y_s é a concentração máxima de fármaco tolerada pelo organismo, na qual se atinge níveis tóxicos para o organismo.

A equação (3.4.27) pode ser representada na Figura 3.12. Nesta figura, pode ser verificado que após a administração de quatro doses a concentração máxima do fármaco tolerada é atingida pelo organismo, e que a partir da quinta dose, tem-se uma estabilidade da concentração máxima atingida.

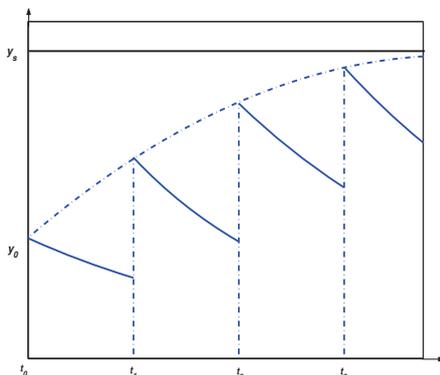


Figura 3.12: Curva de concentração de um fármaco no tempo.

3.4.2 A Meia-Vida ($t_{\frac{1}{2}}$) de um Fármaco

A meia-vida é o tempo necessário para que a concentração plasmática de determinado fármaco seja reduzida pela metade. A meia-vida plasmática dos fármacos é um dos índices básicos da farmacocinética, colaborando para a interpretação dos efeitos terapêuticos ou tóxicos dos fármacos, como a duração do efeito farmacológico e do regime posológico adequado. O conhecimento da meia vida é útil para se conseguir a concentração máxima plasmática média constante. Esse platô da concentração constante é mantido pela repetição das doses com finalidade de substituir a parte do fármaco que é eliminada.

Partindo da equação (3.4.26) determina-se a relação entre a meia-vida e a constante de velocidade de eliminação (k) de um fármaco:

$$y = y_0 e^{-kt} \implies \ln y = \ln y_0 - kt. \tag{3.4.28}$$

Quando $t = t_{\frac{1}{2}}$ (tempo de meia-vida dos fármacos), então $y = \frac{y_0}{2}$, assim substituindo em (3.4.28) tem-se;

$$k = \frac{0,693}{t_{\frac{1}{2}}}. \tag{3.4.29}$$

3.4.3 Modelo Farmacocinético Fuzzy

Nosso interesse principal é modelar a velocidade de eliminação de fármacos no organismo do indivíduo, segundo informações fornecidas pelo especialista. A velocidade de eliminação é considerada muito dependente da função renal. Assim, é considerada como um parâmetro fuzzy que depende das variáveis volume urinário (v), da clearance de creatinina ² ($clcr$) e do pH sérico (p).

²A creatinina é um produto final do metabolismo da creatina (creatina é um composto produzido naturalmente pelo nosso organismo para fornecer a energia necessária aos nossos

Esta constante pode variar de um indivíduo para outro, pois os fármacos que são eliminados pelo rim, sem serem transformados metabolicamente, como por exemplo, a digoxina³ e muitos antibióticos, depende do estado funcional desse órgão [22]. Então, a mesma dose de medicamento pode produzir as mais diferentes constantes de eliminação.

Depois de absorvidos e distribuídos no organismo, segundo as informações médicas, os fármacos são eliminados por diferentes vias, neste trabalho apenas o sistema renal é considerado responsável pela principal via de excreção de fármacos. Com as informações do especialista na área em [34], as variáveis que mais influenciam a velocidade de eliminação k de um fármaco são:

1. **Volume Urinário:** Considera-se como sendo a produção de urina em um indivíduo a cada 24 horas, é classificado da seguinte maneira dependendo da quantidade:
 - **anúria:** para um volume entre 0 e 100 ml;
 - **oligúria:** para um volume entre 100 e 300 ml;
 - **diurese normal:** para um volume entre 300 e 1500 ml;
 - **poliúria:** para um volume > 1500 ml.

2. **Clearance de Creatinina:** o teste de clearance de creatinina determina a eficiência com que os rins eliminam a creatinina do sangue. A taxa de clearance é expressa em termos de volume de sangue (medido em mililitros) que pode ficar livre de creatinina em 1 minuto. Os níveis de creatinina tornam-se anormais quando mais de 50% dos néfrons⁴ tenham sido danificados. O clearance de creatinina foi classificado da seguinte maneira dependendo da quantidade:
 - **muito baixo:** entre 0 e 10 ml/min;
 - **baixo:** entre 10 e 50 ml/min;
 - **médio baixo:** entre 50 e 90 ml/min;
 - **normal:** entre 90 e 120 ml/min;
 - **alto:** > 120 ml/min.

3. **pH Sérico:** É o pH do sangue, classificado da seguinte maneira:
 - **básico:** $< 7,35$;

músculos. Creatina é produzida pelo fígado e em seguida é levada pelo sangue para as células dos músculos) que aparece no soro em quantidades proporcionais à massa muscular corpórea.

³Digoxina é um medicamento cardiotônico (substâncias que reforçam a energia do coração.), e antiarrítmico (que controla os batimentos do coração).

⁴Os néfrons são unidades filtrantes dos rins; cada rim contém 1 milhão de néfrons o que torna esse órgão capaz de filtrar as excretas que circulam no sangue.

- **normal:** entre 7,35 e 7,45;
- **ácido:** > 7,45.

Considera-se a velocidade de eliminação do fármaco (k) como um parâmetro fuzzy que depende das variáveis volume urinário (v), clearance de creatinina ($clcr$) e pH sérico (p) [33], o modelo (3.4.25) é representado como:

$$\frac{dy}{dt} = -k(v, clcr, p)y, \quad (3.4.30)$$

cuja solução da equação é dada por:

$$y = y_0 e^{-k(v, clcr, p)t}, \quad t > 0. \quad (3.4.31)$$

A principal diferença entre o modelo (3.4.30) e o modelo (3.4.25) é o fato que o parâmetro (k) é função do volume urinário (v), do clearance de creatinina ($clcr$) e do pH sérico (p), que permite incorporar as informações médicas, citadas anteriormente.

Na subseção seguinte faremos um estudo dessa dependência por meio de um sistema baseado em regras fuzzy.

3.4.4 Base de Regras

A base de regras fuzzy tem como antecedentes o volume urinário (v), clearance de creatinina ($clcr$) e pH sérico (p), e a velocidade de eliminação (k) como consequente. Os termos linguísticos para v são: *anúria*, *oligúria*, *diurese normal* e *poliúria*, para o $clcr$ são: *muito baixo*, *baixo*, *médio baixo*, *normal* e *alto*; e para p são: *básico*, *normal* e *ácido*. Para a velocidade de eliminação k considera-se o domínio entre 0 e 0,693, pois a partir da equação (3.4.29) e consultando bulas de fármacos observa-se que pode-se considerar o menor tempo de meia-vida do fármaco igual a uma hora. Assim, a maior velocidade de eliminação é 0,693. Os termos linguísticos para k são: *muito baixa*, *baixa* e *normal*.

No modelo via SBRF é utilizado o método de inferência de Mamdani para obter o comportamento de k , ou seja simulamos alguns valores para v , $clcr$, p , e determinamos os valores de k , em que os valores assumidos são traduzidos pelas funções de pertinência ilustradas nas Figuras 3.13, 3.14, 3.15, 3.16.

As Tabelas 3.7, 3.8, 3.10 e 3.9 fornecem a base de regras quando o volume urinário está classificado em *anúria*, *oligúria*, *diurese normal* e *poliúria*, respectivamente. Estas regras foram feitas a partir de informações do especialista na área [34].

Assim, a partir do SBRF com o método de inferência de Mamdani e a defuzzificação pelo centro de gravidade, pode-se determinar $k = k(v, clcr, p)$.

Tabela 3.7: Regras fuzzy quando o volume urinário é *anúria*.

(p) \ (clcr)	ácido	normal	básico
<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>
<i>baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>baixa</i>	<i>baixa</i>
<i>média baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>baixa</i>	<i>baixa</i>
<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>alta</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>

Tabela 3.8: Regras fuzzy quando o volume urinário é *oligúria*.

(p) \ (clcr)	ácido	normal	básico
<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>
<i>baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>baixa</i>	<i>baixa</i>
<i>média baixa</i>	<i>baixa</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>normal</i>	<i>baixa</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>alta</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>

Tabela 3.9: Regras fuzzy quando o volume urinário é *diurese normal*.

(p) \ (clcr)	ácido	normal	básico
<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>
<i>baixa</i>	<i>normal</i>	<i>baixa</i>	<i>baixa</i>
<i>média baixa</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>alta</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>

Tabela 3.10: Regras fuzzy quando o volume urinário é *poliúria*.

(p) \ (clcr)	ácido	normal	básico
<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>	<i>muito baixa</i>
<i>baixa</i>	<i>normal</i>	<i>baixa</i>	<i>baixa</i>
<i>média baixa</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>
<i>alta</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>	<i>normal</i>

3.4.5 Insuficiência Renal e a Eliminação de Fármacos

Nesta seção é apresentada a concentração de fármaco de três indivíduos a partir do volume urinário (v), da clearance de creatinina ($clcr$) e do pH sérico (p), é utilizado um Sistema Baseado em Regras Fuzzy para determinar a velocidade de eliminação (k) do fármaco, Tabela 3.11.

Assim, com uma prescrição de $500mg$ de um certo fármaco de oito em oito

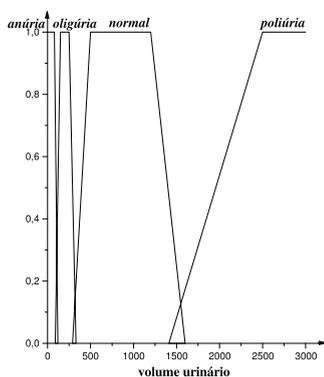


Figura 3.13: Funções de pertinência de volume urinário.

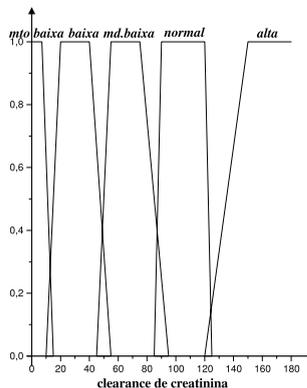


Figura 3.14: Funções de pertinência de clearance de creatinina.

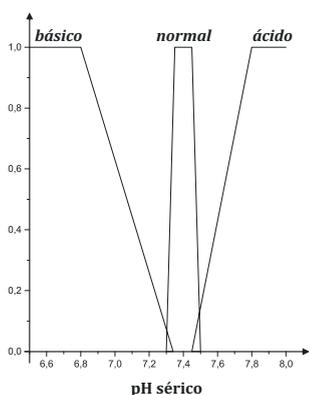


Figura 3.15: Funções de pertinência de pH sérico.

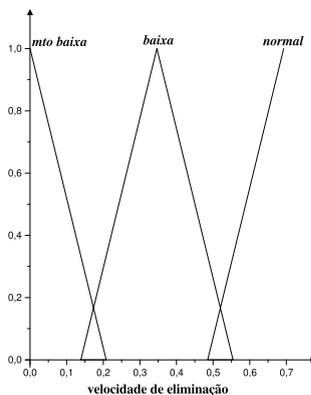


Figura 3.16: Funções de pertinência de velocidade de eliminação.

horas para três indivíduos, obtém-se a velocidade de eliminação do fármaco para cada indivíduo, veja Tabela 3.11.

Tabela 3.11: Velocidade de eliminação do fármaco para cada indivíduo.

	v	$clcr$	p	$k(v, clcr, p)$
Indivíduo 1 (I_1)	1500ml diário	100 ml/min	7,4	0,6032
Indivíduo 2 (I_2)	100 ml diário	10 ml/min	7,35	0,0860
Indivíduo 3 (I_3)	300 ml diário	35 ml/min	7,25	0,2308

Para os valores de $k(v, clcr, p)$ obtidos na Tabela 3.11 e através das equações (3.4.31) e (3.4.27), obtêm-se os gráficos da Figura 3.17, que ilustram como estão a concentração máxima de fármaco tolerada pelo organismo e a eliminação do fármaco dos indivíduos 1 e 2, analogamente, obtêm-se os gráficos da Figura 3.18 para os indivíduos 1 e 3. O nível de saturação (y_{s1}) do indivíduo 1, que está com função renal normal, é em torno de 500 *mg*. O nível de saturação (y_{s2}) do indivíduo 2, que está com função renal comprometida, é em torno de 1000 *mg*, veja Figura 3.17. O indivíduo 3 também tem função renal comprometida. Porém, o nível de saturação do fármaco (y_{s3}) é mais baixo e encontra-se em torno de 600 *mg*, veja Figura 3.18. O nível de concentração do indivíduo 2 é muito maior do que o indivíduo 3 porque o volume urinário, o o clearance de creatinina e o pH sérico do indivíduo 2 são muito baixos em relação ao indivíduo 3, Tabela 3.11. Mas, os dois indivíduos estão com o nível de saturação acima do normal, porque estão com a função renal comprometida e eliminam pouco fármaco. Logo, é necessário mudar a prescrição do indivíduo 2 e do indivíduo 3, pois, caso contrário, provavelmente terão uma intoxicação medicamentosa.

A Figura 3.19 mostra a concentração do indivíduo 1 e 2, ambos, com a mesma dose de 500 *mg* de fármaco. Para o indivíduo 2 mudamos o intervalo entre as doses. As doses estão sendo administradas a cada 24 horas. Isto resultou em um nível de saturação em torno de 600 *mg*, mais próximo do nível de saturação do indivíduo 1 cuja função renal é normal. A Figura 3.20, ilustra a concentração dos indivíduos 1 e 2, porém mantém-se o intervalo de 8 horas entre as doses e altera-se a dose administrada do fármaco do indivíduo 2 para 250 *mg*, o resultado mostrou a mesma saturação de 500 *mg* para os dois indivíduos.

O procedimento indicado pelo modelo fuzzy de diminuir a dose do medicamento para que não ocorra uma intoxicação do paciente está de acordo com o especialista. Pois, segundo o profissional da área quando os pacientes estão com função renal comprometida, o procedimento é diminuir a dose do medicamento, isto é, mudar a prescrição do fármaco.

3.4.6 Comentários Finais

Nesta seção foram apresentados modelos envolvendo a eliminação de fármacos do organismo. Exploramos a teoria dos conjuntos fuzzy para modelar a constante de velocidade de eliminação (k), considerada como um parâmetro fuzzy que depende da função renal de um indivíduo. Desta forma pode-se obter este parâmetro variando de indivíduo para indivíduo como a bibliografia da área afirma [62]. Assim, por meio de uma base de regras fuzzy, estudamos a influência do volume urinário (v), da clearance de creatinina ($clcr$) e do pH sérico (p) que são as principais variáveis médicas que indicam a eficiência renal de um indivíduo.

A grande vantagem do modelo fuzzy (3.4.30) sobre o clássico (3.4.25) é incluir variáveis que as ciências médicas consideram para indicar a manutenção

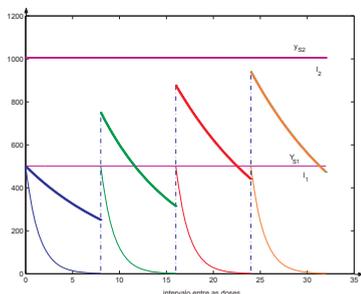


Figura 3.17: Concentração de fármaco dos indivíduos 1 e 2 com a mesma prescrição.

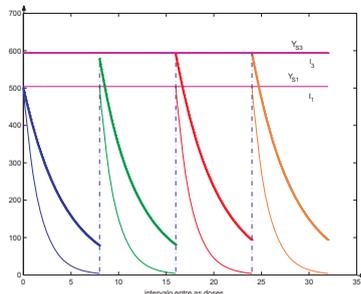


Figura 3.18: Concentração de fármaco dos indivíduos 1 e 3 com a mesma prescrição.

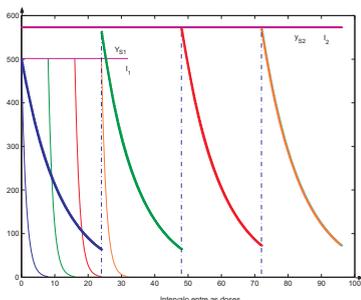


Figura 3.19: Concentração de fármaco dos indivíduos 1 e 2 alterando o intervalo entre as doses.

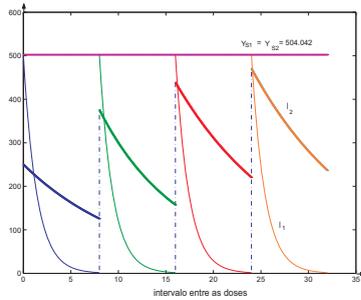


Figura 3.20: Concentração de fármaco dos indivíduos 1 e 2 alterando a dose prescrita.

ou diminuição das doses dos fármacos. No modelo considera-se a prescrição de certo fármaco para alguns indivíduos e determina-se as curvas de concentração de fármaco destes indivíduos. Concluí-se que para os indivíduos com comprometimento renal, deve-se diminuir a dose prescrita para evitar qualquer risco de intoxicação medicamentosa.

Na próxima seção é apresentada uma parte da dissertação da estudante Juliana Menegotto que foi desenvolvida no Mestrado em Matemática Aplicada da Universidade Estadual de Campinas [38] e foi publicada na Revista da Biomatemática [39]. O modelo apresentado nesta seção estima o parâmetro de decaimento do fármaco através do Método de Inferência de Mamdani e o modelo a seguir trata de um modelo de Takagi-Sugeno-Kang (TSK) que modela a dinâmica da própria variável de estado (concentração do fármaco em função do tempo).

3.5 Método de TSK em Modelos Farmacocinéticos Multicompartmentais

Para estudar a concentração do fármaco no organismo são utilizados modelos farmacocinéticos multicompartmentais que, via de regra, são dados por um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO). Neste trabalho é proposto um modelo para descrever a dinâmica da concentração a partir de um sistema baseado em regras fuzzy. Para obter a curva da concentração, é utilizado o método de TSK e as curvas via TSK e EDO são comparadas. Quando o fármaco é administrado em doses múltiplas, o índice de acúmulo do fármaco no organismo é avaliado através da razão entre as áreas sob a curva referente à dose dada, após atingir o estado estacionário, e a curva da primeira dose. Simulações são realizadas e os índices de acúmulo obtidos em ambas curvas são comparados.

3.5.1 Introdução

A farmacocinética é uma área da farmacologia que estuda a concentração do fármaco no sangue no decurso do tempo após administração de uma ou sucessivas doses.

O estudo da cinética do fármaco é realizado por meio de modelos farmacocinéticos multicompartmentais. Os estudos cinéticos podem ser descritos por modelos matemáticos, em que a movimentação dos fármacos de um compartimento para outro modifica sua concentração nesses compartimentos, supondo que o corpo pode ser interpretado como uma série de compartimentos interconectados [15]. Através de modelos e cálculos matemáticos, pode-se quantificar os principais processos farmacocinéticos: a absorção, a distribuição e a eliminação de fármacos.

Quando o fármaco é administrado intravenosamente dois processos são estudados por estes modelos. Neste caso, a absorção do fármaco é completa e está disponível na corrente sanguínea para ser distribuído pelo corpo inteiro, em todos os tecidos vascularizados, bem como para ser eliminado. Desta forma, os modelos matemáticos procuram descrever os processos de distribuição e de eliminação por meio de compartimentos [57].

Neste trabalho é desenvolvido um modelo matemático, para descrever a cinética no fármaco no organismo após uma administração intravenosa, a partir de um sistema fuzzy.

3.5.2 Modelagem Fuzzy

O tratamento matemático para modelos farmacocinéticos multicompartmentais é, via de regra, dado por um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO). O número de equações é determinado pela quantidade de compartimentos (fases) do modelo. Do ponto de vista prático, o número de fases é observado a partir do conjunto de dados: através de estudos locais, determina-se

o número de retas que ajustam esses dados, em uma escala semilogarítmica [29].

Na prática clínica, a aplicação da teoria de equações diferenciais ordinárias em modelos farmacocinéticos compartimentais nem sempre é fácil. A complexidade desses sistemas começa a surgir na medida que aumenta o número dos compartimentos, onde o número de parâmetros e taxas de transferências entre os compartimentos aumentam consideravelmente. Além disso, alguns profissionais da farmacocinética, por não serem da área de matemática, utilizam as soluções de EDO já prontas apenas para ajustarem os parâmetros de acordo com os dados de seu estudo específico. O estudo farmacocinético via EDO é uma “caixa preta” para estes profissionais, fazendo com que “aceitem” essas soluções como “verdadeiras” restando-lhes apenas aprender a explorar os parâmetros nas equações.

Nosso interesse é obter um modelo de decaimento para a concentração a partir de um sistema de base de regras fuzzy [7]. O número de regras é dado pela quantidade de fases (que coincide com o número de retas) do modelo multicompartimental. Nesse sentido, o sistema fuzzy é composto por 2 regras fuzzy, pois o conjunto de dados ajusta-se em um modelo bicompartimental e foram extraídos de [29]. Assim, duas fases são analisadas: a fase da distribuição (fase α) e a fase da eliminação (fase β) [57].

Para a base de regras fuzzy considera-se a variável de entrada *tempo* em horas (t) composta pelos termos linguísticos fuzzy *baixo* e *não-baixo*. Tais termos foram modelados por números fuzzy. A saída de cada regra fuzzy é a *concentração plasmática* do fármaco que, numa escala semilogarítmica, é dada pelas retas das fases α e β . Para determinar as retas em escala semilog, é utilizado o método dos mínimos quadrados. As retas (consequentes de cada regra fuzzy) de cada fase são:

$$\begin{aligned} \text{Fase } \alpha : y_\alpha(t) &= 0,11394 - 0,0751t; \\ \text{Fase } \beta : y_\beta(t) &= -0,08618 - 0,003995t. \end{aligned}$$

Ressalta-se que na metodologia tradicional, via EDO, a reta da fase α utilizada para obter a equação (3.5.33) difere da reta aqui utilizada para o modelo fuzzy. Desta forma, se a reta da fase α aqui obtida é utilizada, tem-se uma expressão ligeiramente diferente da que aparece em (3.5.33).

As meias-vidas de cada fase são determinadas pela razão entre $\log 2$ e o coeficiente angular de cada reta, elas são: $t_{\frac{1}{2}\alpha} \simeq 12h$ e $t_{\frac{1}{2}\beta} \simeq 75h$.

Na Figura 3.21 encontram-se os dados experimentais e as retas correspondentes à cada fase, y_α e y_β , a Figura 3.22 ilustra as funções de pertinência adotadas nesta modelagem em que os números fuzzy são do tipo trapezoidais.

Como as retas da Figura 3.21 estão em escala semilogarítmica, tem-se respectivamente para as fases α e β :

$$\begin{aligned} y_\alpha = \log C_\alpha &\Leftrightarrow C_\alpha = 10^{y_\alpha}; \\ y_\beta = \log C_\beta &\Leftrightarrow C_\beta = 10^{y_\beta}. \end{aligned}$$

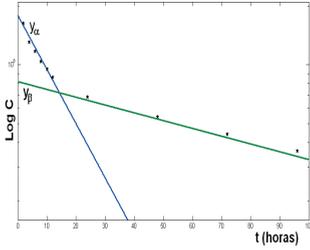


Figura 3.21: Retas em escala semi-log.

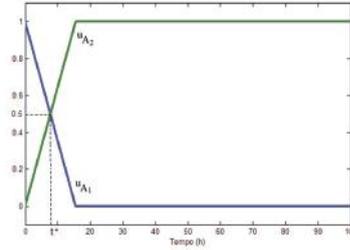


Figura 3.22: Funções de pertinência.

Assim, as saídas de cada regra são dadas por funções exponenciais e a base de regras fuzzy considerada são apresentadas a seguir:

$$R_1: \text{Se } t \text{ é } \textit{baixo} (A_1) \text{ então } y_\alpha = a_1 - \alpha.t \Leftrightarrow C_\alpha = 10^{y_\alpha};$$

$$R_2: \text{Se } t \text{ é } \textit{não-baixo} (A_2) \text{ então } y_\beta = a_2 - \beta.t \Leftrightarrow C_\beta = 10^{y_\beta}.$$

Para obter a curva da concentração sanguínea em um indivíduo como função do tempo, o método de inferência de TSK é utilizado [7]. A saída geral do sistema pelo método TSK é a curva de concentração sanguínea:

$$C(t) = \frac{u_{A_1}(t) \cdot 10^{y_\alpha} + u_{A_2}(t) \cdot 10^{y_\beta}}{u_{A_1}(t) + u_{A_2}(t)}, \quad (3.5.32)$$

em que $C(t)$ é a concentração do fármaco no sangue do indivíduo e os pesos (definido pelo operador t-norma mínimo) são obtidos pelos próprios números fuzzy A_1 e A_2 , pois tem-se apenas uma variável de entrada [7]. Assim, estes pesos são as funções de pertinência (veja Figura 3.22) que retratam a contribuição de cada fase na dinâmica da variável modelada.

A Figura 3.23 apresenta uma curva obtida pelo método TSK. Visualmente, é possível notar que a curva se ajusta bem aos dados, demonstra-se que o erro cometido nesse ajuste diminui a medida que o número de regras aumenta [5, 7, 12]. O método de TSK foi eficiente para determinar uma curva em um modelo bicompartimental.

Para a modelagem clássica, a solução analítica é:

$$C(t) = 1,3e^{-0,173t} + 0,82e^{-0,0092t}. \quad (3.5.33)$$

A título de comparação, a Figura 3.24 mostra que os gráficos das soluções via EDO (equação (3.5.33)) e via TSK (equação (3.5.32)) ajustaram-se num modelo bicompartimental.

A partir da curva da concentração plasmática pode-se estudar o índice de acúmulo do fármaco (R) e a concentração máxima (C_{\max}) tolerada pelo organismo, quando o medicamento é administrado em doses múltiplas. O

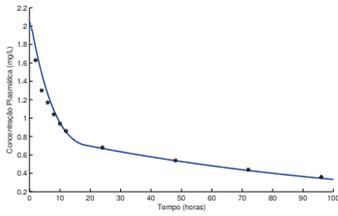


Figura 3.23: Curva TSK e os dados extraídos de [29].

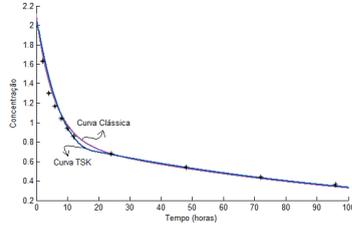


Figura 3.24: Curvas via EDO e via TSK.

índice R é um parâmetro que indica a extensão de acúmulo do fármaco no corpo após administrar sucessivas doses. Tal índice é obtido através da razão entre as áreas sob a curva referente à dose dada, após atingir o estado estacionário, e a curva da primeira dose.

Considerando T o intervalo entre as doses; n o número de doses repetidas e $[T_n, T_{n+1}]$ o intervalo da n -ésima dose repetida, a área sob a curva para doses múltiplas é dada por:

$$A = \int_{T_n}^{T_{n+1}} \left[\sum_{i=0}^n C(t - iT) \right] dt, \quad (3.5.34)$$

em que $nT \leq t < (n + 1)T$ e $C(t - iT)$ refere-se à curva que descreve a concentração no sangue na n -ésima dose repetida.

Quando $R = 1$ não há acúmulo de fármaco no organismo, pois o medicamento é todo eliminado antes da administração subsequente. Para $R > 1$ há acúmulo de fármaco no organismo e R aumenta conforme reduzimos o intervalo de dosagem.

A partir da equação (3.5.34), das curvas EDO e TSK obtêm-se para cada modelagem os valores R e C_{max} . Nas simulações, considera-se o intervalo entre as doses igual a meia-vida de eliminação, a saber, $T = 75h$.

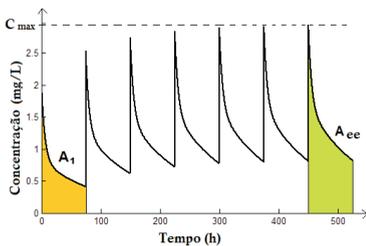


Figura 3.25: Curva via EDO.

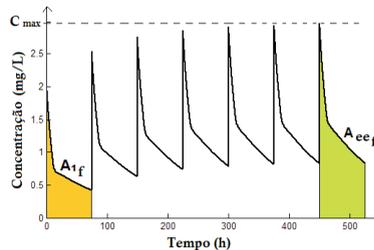


Figura 3.26: Curva via TSK.

Informações obtidas a partir das simulações representadas nas Figuras

3.25 e 3.26: via EDO $C_{\max} = 2,93$ e $R = \frac{A_{ee}}{A_1} = \frac{96,19}{51,93} = 1,85$ e via TSK $C_{\max_f} = 2,94$ e $R_f = \frac{A_{ee_f}}{A_{1_f}} = \frac{96,93}{52,02} = 1,86$.

Através de representações gráficas (veja Figuras 3.25 e 3.26), de R e C_{\max} , pode-se constatar que as duas modelagens são semelhantes e ambas fornecem a mesma interpretação clínica.

3.5.3 Comentários Finais

Na modelagem fuzzy, o estudo da cinética consiste praticamente através das retas na escala semilog e do conhecimento de um especialista da área para modelar cada fase com as funções de pertinência. Ao comparar com a modelagem clássica, as representações gráficas (veja Figuras 3.24, 3.25 e 3.26) mostram a semelhança entre ambas modelagens. Comprovando desta forma, que ambas modelagens são eficientes para modelar a cinética do fármaco no corpo. As vantagens do modelo TSK sobre clássico residem na redução do número de constantes e parâmetros; não exige conhecimento algum de teoria de equações diferenciais ordinárias; descreve os processos de distribuição e eliminação por meio de conjuntos fuzzy (funções de pertinência) de forma intuitiva. Por se tratar de um modelo linguístico, a nosso ver, esse procedimento facilita a modelagem do fenômeno uma vez que o especialista participa diretamente da construção do modelo matemático.

O próximo capítulo é dedicado ao estudo de sistemas dinâmicos em que a formulação é dada por um sistema baseado em regras fuzzy.

Exercícios

1. Determine a relação fuzzy (D) dos graus de pertinência dos pacientes com as doenças utilizando as Tabelas 3.1 e 3.4.
2. Problema Inverso: Determine a relação fuzzy (X) dos graus de pertinência dos sintomas com as doenças utilizando as Tabelas 3.2 e 3.3.

Capítulo 4

Aplicações via Sistemas p-fuzzy

4.1 Introdução

Nos modelos (3.3.2) e (3.4.30), os SBRF são utilizados para avaliar algum parâmetro de uma equação diferencial clássica. Por exemplo, o modelo da evolução da AIDS (3.3.2) é descrito através de uma equação diferencial clássica. Com intuito de incorporar informações médicas importantes (carga viral, nível do linfócito $T CD4+$), um SBRF é utilizado para avaliar a taxa de transferência da população HIV assintomática para sintomática. De forma análoga, a taxa de decaimento do fármaco (equação (3.4.30)) incorpora vários parâmetros importantes no estudo de eliminação de fármacos. Tal incorporação é modelada por um SBRF.

Neste capítulo, novamente os SBRF são utilizados só que na modelagem da própria variável de estado, como apresentado a seguir.

A denominação “sistemas p-fuzzy” vem do fato que a evolução do sistema é governado por uma função parcialmente desconhecida, modelada por um SBRF juntamente com um método de defuzzificação apropriado. Como foi visto anteriormente, um SBRF acoplado a um método de defuzzificação “produz” implicitamente uma função. Pois bem, essa função é utilizada para modelar a evolução do fenômeno em estudo. A seguir destacam-se os dois casos, tal como se faz em modelagem clássica.

- Caso discreto:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

em que x_n é variável de estado e $f(x)$ obtida a partir da saída de um SBRF para a entrada x . Por exemplo, $f(x) = x + F(x)$ em que $F(x)$ é a saída defuzzificada do SBRF. Neste caso, a solução do sistema (4.1.1) é dada da seguinte forma:

$$x_{n+1} = x_n + F(x_n), \quad (4.1.2)$$

tal como é feito na literatura clássica.

- Caso contínuo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1.3)$$

em que x é variável de estado. Como no caso discreto, com $f(\cdot)$ em mãos, uma solução de (4.1.3) é dada por um método numérico para EDO, como por exemplo tipo Euler (ou Runge-Kutta de ordem maior que um)

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n), \quad (4.1.4)$$

em que h é o passo do método numérico. Na formulação integral, a solução em $[t_n, t_{n+1}] = [t_n, t_n + h]$ de (4.1.3) é dada por:

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(s))ds. \quad (4.1.5)$$

Infelizmente, como não é conhecido $f(x_{n+1})$, não podem ser utilizados os métodos de Simpson nem de trapézios. No entanto, os métodos de passo múltiplo explícito [14, 51] resolvem essa situação. Nesse texto é utilizado o método explícito de passo 2:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[3f(x_n) - f(x_{n-1})], \quad (4.1.6)$$

em que $f(x)$ é saída defuzzificada de SBRF para entrada x . A solução via formulação integral pode ser obtida através de métodos explícitos de mais passos em que as condições iniciais são obtidas de alguma forma, como através do método de Euler.

A metodologia dos sistemas p-fuzzy pode ser aplicada nas mais diversas áreas do conhecimento. Neste capítulo, tal metodologia é voltada para fenômenos biológicos tais como o modelo de Malthus, epidemiologia com aplicação na dinâmica de HIV e dinâmica populacional com o modelo presa-predador.

Na exposição a seguir, tanto nos sistemas p-fuzzy de transferência da população HIV assintomática para sintomática via método de inferência de Mamdani e via Takagi-Sugeno, como no sistema p-fuzzy presa-predador do tipo contínuo via método de inferência de Mamdani, as soluções são determinadas pelo método de Euler. Já as soluções dos outros sistemas p-fuzzy contínuos são obtidas a partir da formulação integral dada pela fórmula (4.1.6).

As seções ilustram sistemas p-fuzzy desenvolvidos via abordagens: o método de inferência de Mamdani e o método de Takagi-Sugeno. Neste último, a rede neuro-fuzzy ANFIS é aplicada para obter o SBRF conveniente para o modelo.

4.2 Sistema p-fuzzy de Malthus

A proposta de utilização da matemática para estabelecer um modelo para o crescimento de uma população humana começou com o economista inglês T.R. Malthus (1798). Malthus afirma que ‘a capacidade de reprodução do homem é superior à capacidade da terra produzir meios para sua subsistência e, a inibição do crescimento populacional é devida à disponibilidade de alimentos. A população quando não obstaculizada, aumenta a uma razão geométrica. Os meios de subsistência aumentam apenas a uma razão aritmética. Pela lei de nossa natureza, que torna o alimento necessário à vida do homem, os efeitos dessas duas diferentes capacidades devem ser mantidos constantes’.

Atualmente, em dinâmica populacional, o que se convencionou chamar de modelo de Malthus assume que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante, e desta forma, a população humana deveria crescer sem inibição. A formulação deste modelo em termos de uma equação diferencial não foi feita por Malthus, apesar de ser muito simples, mesmo para época em que foi postulado [9].

O modelo contínuo de Malthus é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P(t), \quad (4.2.7)$$

cuja solução é $P(t) = P_0 e^{\alpha t}$, em que $P(t)$ é a população no instante t , $P(0) = P_0$ e α é a taxa de crescimento da população.

4.2.1 Sistema p-fuzzy com o Método de Inferência de Mamdani para Modelo Malthusiano

O modelo p-fuzzy é construído a partir de um SBRF, sendo a entrada, a população (P), e a saída, a variação da população ($\frac{dP}{dt}$). As funções de pertinência são apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.2, o método de inferência utilizado é o Método de Mamdani e o de defuzzificação é o Centro de Gravidade. A base de regras fuzzy utilizada é:

- Se população é *muito baixa* então $\frac{dP}{dt}$ *muito baixa*;
- Se população é *baixa* então $\frac{dP}{dt}$ é *baixa*;
- Se população é *média* então $\frac{dP}{dt}$ é *média*;
- Se população é *alta* então $\frac{dP}{dt}$ é *alta*.

Em cada instante t , o valor de $P(t)$ é dado pela fórmula:

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dP}{dt}(s) ds. \tag{4.2.8}$$

Para estimar a trajetória dada por (4.2.8), a $\int_{t_0}^t \frac{dP}{dt}(s) ds$ é calculada. A fórmula (4.1.6) é utilizada para obter a solução desse sistema p-fuzzy e (4.1.6) vem a ser:

$$P_{n+1} = P_n + \frac{h}{2}(3out(P_n) - out(P_{n-1})), \tag{4.2.9}$$

em que $t_n = t_0 + nh$, $h = 0,1$ e $out(\cdot)$ é a saída do SBRF correspondente entrada P , considerando a saída do primeiro valor da entrada igual a zero. O mesmo raciocínio é repetido obtendo a população no tempo ($P(t)$) como ilustrada na Figura 4.3.

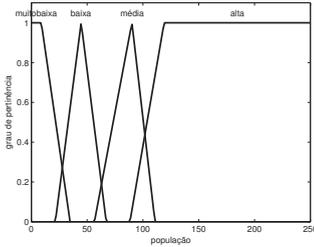


Figura 4.1: Funções de pertinência da população.

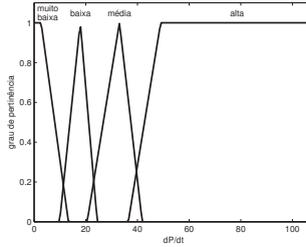


Figura 4.2: Funções de pertinência da variação da população.

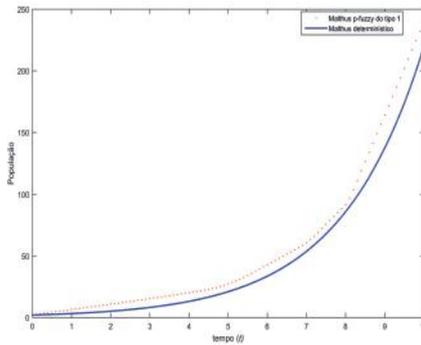


Figura 4.3: Solução do modelo p-fuzzy contínuo com $P_0 = 2$, $\alpha = 0,47$ e $h = 0,1$.

4.2.2 Sistema p-fuzzy com o Método de Inferência de Takagi-Sugeno para Modelo Malthusiano

Nesta subseção, a modelagem matemática do sistema p-fuzzy é baseada no princípio malthusiano [35] para o crescimento populacional:

(P) “a variação de uma população é proporcional à população em cada instante”.

Este princípio determina que a variação da população cresce com o crescimento da população. Para o exemplo aqui apresentado são consideradas quatro características para o modelo p-fuzzy de Malthus:

- a constante de proporcionalidade é 0,47;
- a população inicial é de dois indivíduos;
- a população total no instante 10 é 250;
- a saída do SBRF é a taxa de variação da população.

Um treinamento ANFIS é feito no intervalo $D = [2, 250]$ como o domínio da variável de entrada e a variável de saída definida em $0, 47D$. O sistema é construído com a variável de entrada linguística, população P , e a saída $\frac{dP}{dt}$. Os termos linguísticos para a população são: baixa, média baixa, média alta, e alta, representadas na Figura 4.4 por funções de pertinência triangulares.

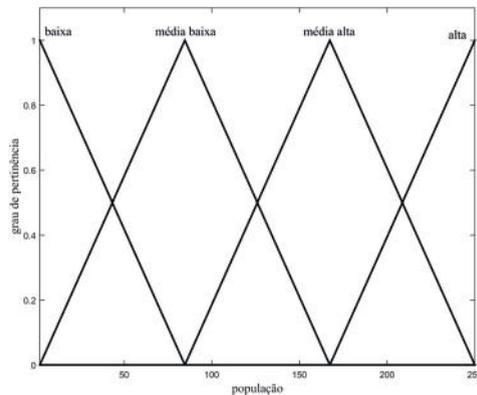


Figura 4.4: Funções de pertinência para a variável de entrada P .

A variável de saída é uma função linear da forma $f(P) = mP + n$, em que os parâmetros m e n são determinados pelo ANFIS. A partir do princípio (P), uma base de regras (com 4 regras) obtida é dada por:

- Se P é *baixa* então $\frac{dP}{dt} = 0,47P + 3,85 \cdot 10^{-5}$;
- Se P é *média baixa* então $\frac{dP}{dt} = 0,47P + 0,00163$;
- Se P é *média alta* então $\frac{dP}{dt} = 0,47P + 0,003221$;
- Se P é *alta* então $\frac{dP}{dt} = 0,47P + 0,04812$.

O processo é iniciado com população inicial de 2 indivíduos. Em seguida, a fórmula (4.2.9) é aplicada para obter o próximo valor da população e assim, sucessivamente até $t = 10$. A solução do sistema p-fuzzy é apresentada na Figura 4.5.

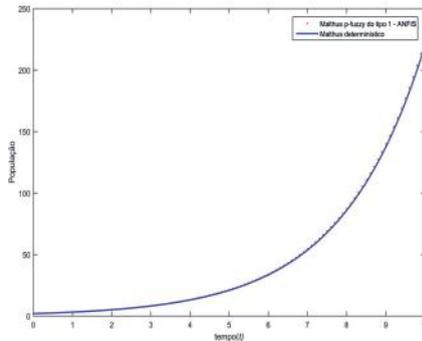


Figura 4.5: Solução do modelo p-fuzzy contínuo através da ANFIS com $P_0 = 2$ e $h = 0,1$.

As estudantes Mariana Fernandes dos Santos Villela e Karla Barbosa de Freitas do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia desenvolveram o trabalho da Subseção 4.3.1 que foi apresentado no XIV Congresso Latino-Americano de Biomatemática [58].

4.3 Sistema p-fuzzy de Transferência da População HIV Assintomática para Sintomática

O objetivo deste trabalho é utilizar um sistema baseado em regras fuzzy para elaborar um modelo da conversão de uma população HIV assintomática para uma sintomática, sem tratamento com antiretrovirais. Este tipo de modelo é denominado p-fuzzy, isto é, parcialmente fuzzy [7]. O modelo estudado é baseado no modelo clássico proposto por Anderson et al. (1986) [4], o qual

estabelece que a taxa de conversão (γ) da infecção para a AIDS está em função do tempo. Na história natural do HIV, seria a transferência entre a fase assintomática e sintomática com $x + y = 1$; este modelo é descrito a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\gamma(t)x & x(0) &= 1 \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma(t)x = \gamma(t)(1 - y) & y(0) &= 0, \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

em que x representa a fração de indivíduos infectados, mas que ainda não desenvolveram a doença, enquanto y representa a fração de indivíduos infectados que já desenvolveram a doença.

O parâmetro $\gamma(t)$, que é a taxa de transferência de indivíduos infectados para indivíduos infectados que desenvolveram AIDS, é considerado como uma função linear do tempo $\gamma(t) = bt$, em que b é uma constante positiva. Assim, $\frac{dx}{dt} = -bt x$. Resolvendo esta equação obtém-se a solução:

$$x(t) = e^{(-\frac{bt^2}{2})} \quad y(t) = 1 - e^{(-\frac{bt^2}{2})}. \tag{4.3.11}$$

Peterman et al. [47] apresentam dados de 194 casos de transmissão de AIDS associados a transfusões de sangue, os valores aproximados de t_i , $i = 1, \dots, 11$ e $\frac{dy}{dt}(t_i)$ são mostrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Aproximações dos dados de Peterman et al. t_i , $i = 1, \dots, 11$, anos após infecção.

t_i	0,6	1,2	1,5	2,1	2,6	3,1	3,6	4	4,5	5	5,5
$\frac{dy}{dt}(t_i)$	0,048	0,078	0,172	0,115	0,155	0,088	0,155	0,038	0,08	0,018	0,04

Os dados de Peterman et al. [47] foram ajustados por meio do método dos mínimos quadrados [14, 51] para encontrar o valor do parâmetro b , resultando em $b = 0,237$ por ano. Portanto, obtendo a solução do modelo de Anderson et al..

4.3.1 Sistema p-fuzzy com o Método de Inferência de Mamdani para uma População HIV

O modelo p-fuzzy é construído a partir de um sistema baseado em regras fuzzy, em que a entrada é a fração da população sintomática (y) e a saída a variação da população sintomática $\left(\frac{dy}{dt}\right)$. As funções de pertinência são apresentadas nas Figuras 4.6 e 4.7, o método de inferência utilizado é o Método de Mamdani e o de defuzzificação é o Centro de Gravidade. A base de regras fuzzy utilizada é:

- Se a população é *baixa* então a variação $\frac{dy}{dt}$ é *média positiva*;
- Se a população é *média baixa* então a variação $\frac{dy}{dt}$ é *média positiva*;
- Se a população é *média* então a variação $\frac{dy}{dt}$ é *alta positiva*;
- Se a população é *alta* então a variação $\frac{dy}{dt}$ é *baixa*;
- Se a população é *altíssima* então a variação $\frac{dy}{dt}$ é *baixa negativa*;
- Se a população é *média alta* então a variação $\frac{dy}{dt}$ é *baixa positiva*.

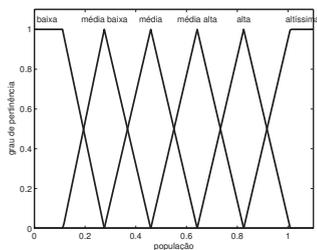


Figura 4.6: Funções de pertinência da população.

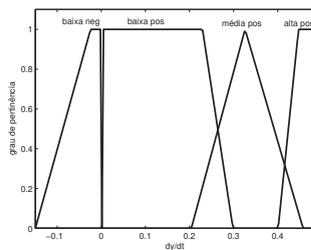


Figura 4.7: Funções de pertinência da variação da população.

As simulações numéricas apresentadas nas Figuras 4.8 e 4.9 são realizadas a partir da fração inicial da população sintomática $y_0 = 0,001$ e $h = 0,01$, através do método do Euler (4.1.4) dado por:

$$y_{n+1} = y_n + h \text{out}(y_n), \quad (4.3.12)$$

em que $\text{out}(y_n)$ é o valor da saída do SBRF correspondente ao valor da entrada y_n e $t_n = t_0 + nh$. O processo é repetido para 800 iterações obtendo-se o comportamento de uma população HIV sintomática. A população assintomática ($x(t)$) é calculada através da equação $x(t) = 1 - y(t)$.

As Figuras 4.8 e 4.9 mostram que as curvas obtidas pelo modelo p-fuzzy estão próximas dos dados de Peterman (1985) [47], que foram apresentados no modelo clássico proposto por Anderson et al.(1986) [4] para população sintomática.

Assim, através de um SBRF é modelado o comportamento da população HIV assintomática e sintomática.

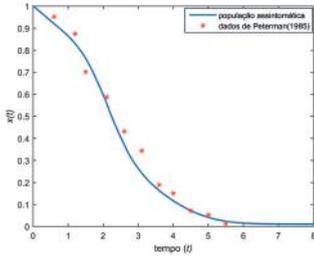


Figura 4.8: Evolução no tempo da população HIV assintomática.

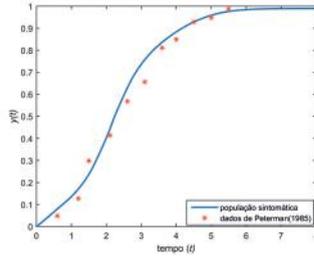


Figura 4.9: Evolução no tempo da população HIV sintomática.

4.3.2 Sistema p-fuzzy com o Método de Inferência de Takagi-Sugeno para População HIV

O modelo p-fuzzy é construído considerando para o treinamento do ANFIS, $y(t) = 1 - e^{(-\frac{0,237t^2}{2})}$ e $\frac{dy}{dt} = 0,237te^{(-\frac{0,237t^2}{2})}$, para t variando de 0 a 8. O treinamento é realizado com cinco funções de pertinência trapezoidais, gerando as funções mostradas na Figura 4.10.

A base de regras fuzzy utilizada é:

- Se a população é *baixa* então $\frac{dy}{dt} = 3,932y + 0,0001347$;
- Se a população é *média baixa* então $\frac{dy}{dt} = 0,5052y + 0,1541$;
- Se a população é *média* então $\frac{dy}{dt} = 0,06435y + 0,2488$;
- Se a população é *média alta* então $\frac{dy}{dt} = 0,5241y + 0,5906$;
- Se a população é *alta* então $\frac{dy}{dt} = -1,068y + 1,071$.

As simulações numéricas apresentadas nas Figuras 4.11 e 4.12 são realizadas com método de Euler (4.3.12), a partir da fração inicial da população sintomática $y(t_0)$. Repetindo o processo para 800 iterações obtém-se o comportamento de uma população HIV sintomática. A população assintomática $x(t)$ é calculada através da equação $x(t) = 1 - y(t)$.

Os dois exemplos de sistemas p-fuzzy ilustram o grande potencial da modelagem de sistemas dinâmicos por meio da teoria dos conjuntos fuzzy. Mais especificamente, o potencial em modelar equações diferenciais em que a taxa de variação das variáveis de estado são modeladas por meio de uma base de regras fuzzy.

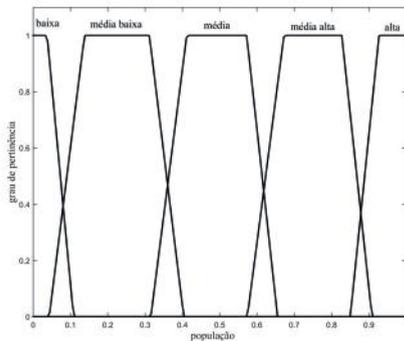


Figura 4.10: Funções de pertinência para a variável de entrada y .

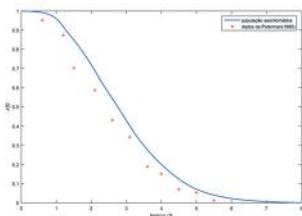


Figura 4.11: Evolução no tempo da população HIV assintomática.

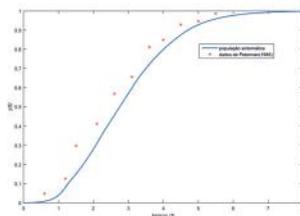


Figura 4.12: Evolução no tempo da população HIV sintomática.

4.4 Modelo Presa-Predador Fuzzy

O modelo presa-predador clássico de Lotka-Volterra pressupõe que tanto presas como os predadores estão distribuídos uniformemente num habitat comum onde todos os predadores têm a mesma chance de encontrar e comer cada presa. Isto significa que não existe distinção entre os predadores, isto é, todos os predadores são identificados com o mesmo atributo de predação e, da mesma forma podemos dizer que as presas são idênticas, isto é, não existe distinção entre as presas.

4.4.1 Exemplo Realístico de Presa-Predador: Lebres e Lincês na Baía de Hudson

Por alguma razão funcionários da Hudson's Bay Company registraram o número de lebres e lincês que ficavam presos em suas armadilhas. Por poder aceitar-se que o número de animais capturados é proporcional as suas populações, pesquisadores conseguiram uma estatística populacional para ambas

espécies de animais por um período de mais de 50 anos [49].

O interessante é que as lebres são a base alimentar dos linces, pois são sua comida favorita. A relação entre estas duas espécies foi primeiramente constatada por caçadores de pele. A Hudson's Bay Company no Canadá manteve registros detalhados do número de peles trazidos a cada ano de 1850 até a década de 30. Em 1924, o ecologista Charles Elton analisou estes dados, que podem ser observado na Figura 4.13.

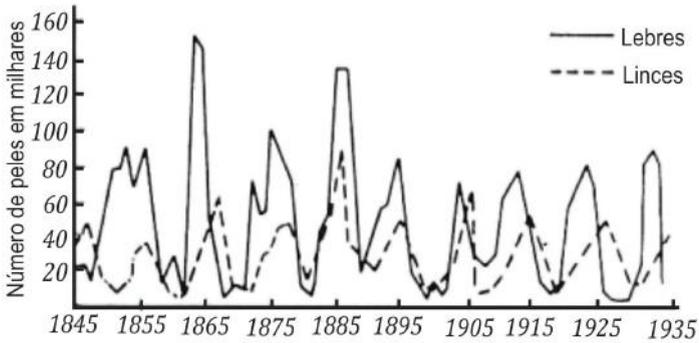


Figura 4.13: Populações de lebres e linces em função do tempo [40].

Como podemos observar, existe uma oscilação bem regular nos números de ambas espécies:

- O período da oscilação é de aproximadamente 10 anos.
- A amplitude da oscilação é enorme: o número de ambas espécies muda dobrando de 50 para mais de 100, durante o ciclo. No modelo fuzzy podemos constatar este comportamento irregular das espécies, enquanto o modelo clássico apresenta curvas regulares e o plano de fase é um “ciclo” perfeito, estes modelos serão apresentados nas próximas seções.
- Existem outros ciclos presa-predador na floresta boreal, como por exemplo: populações de pequenas presas mamíferas estão no ciclo de 4 anos, juntamente com seus maiores predadores:
 - Presas: arganazes (ratos silvestres) e pequenos roedores.
 - Predadores: raposas árticas, falcões e corujas da neve.

O gráfico do plano de fase de um período de 30 anos, iniciado em 1875, obtidos a partir das populações, é apresentado na Figura 4.14.

4.4.2 Modelo Clássico

Para formular a interação entre presas e predadores foi usado o modelo determinístico, que se tornou clássico, dado pelo sistema de equações diferenciais:

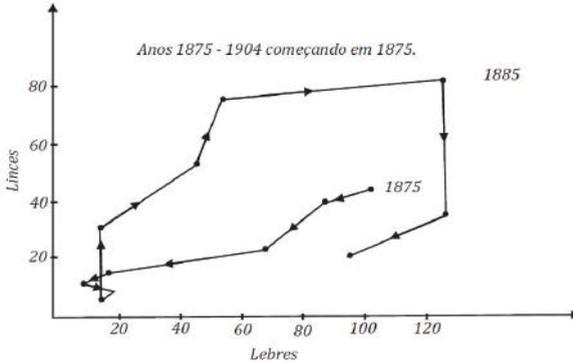


Figura 4.14: Plano de fases de lebres e linces real [40].

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -by + \beta xy.\end{aligned}\tag{4.4.13}$$

Neste modelo, as variáveis de estado x e y são, respectivamente, a quantidade de presas e de predadores em cada instante t . Os parâmetros são: a : taxa de crescimento relativo das presas, α : taxa de predação (probabilidade de um predador matar a presa em cada encontro entre eles), b taxa de mortalidade de predadores na ausência de presas e β taxa de “conversão” de presas em predadores.

Resolvendo a equação diferencial com os parâmetros $a = 0,1$, $\alpha = 0,01$, $b = 0,05$ e $\beta = 0,001$, obtêm-se o gráfico da Figura 4.15 e o plano de fase, veja Figura 4.16.

4.4.3 Sistema p-fuzzy com Método de Inferência de Mamdani para Modelo Presa-Predador

O estudo a seguir foi desenvolvido inicialmente em [45, 46], o qual incorpora alguma heterogeneidade nas populações envolvidas. No caso apresentado, o comportamento das presas e predadores são hipoteticamente diferenciado a partir da faixa etária e segue a abordagem discreta (4.1.2). Assim, o objetivo é estudar o comportamento das presas e dos predadores de forma mais complexa, isto é, com populações diferenciadas, usando apenas um SBRF para o qual as variáveis de estado são as potencialidades das presas, para serem predadas, e a dos predadores predarem, que estão diretamente ligadas com suas respectivas idades.

A presa pode ser caracterizada pela sua idade, isto é, um filhote pode ser mais facilmente predado que seus pais. Ainda, um animal velho ou doente

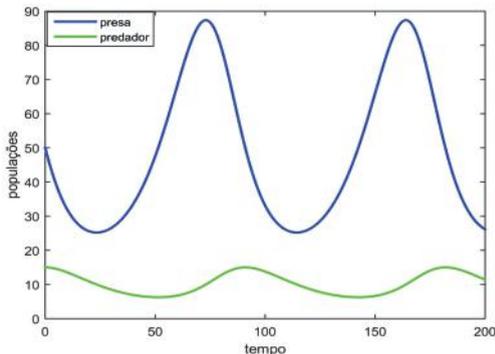


Figura 4.15: Solução do sistema de equações diferenciais.

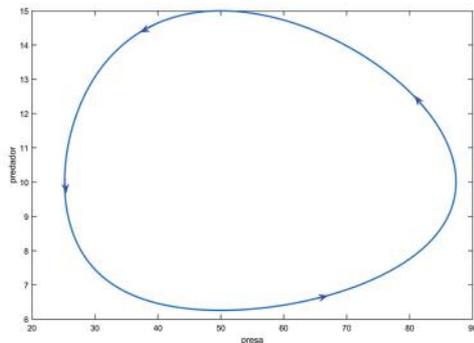


Figura 4.16: Plano de fase.

pode ser preferido na escolha de um predador. Desta forma, caracteriza-se o conjunto das presas pelo grau de serem predadas, sendo tal grau determinado pela sua idade. Uma presa pode ser caracterizada pelas funções de pertinência (4.4.14), veja Figura 4.17.

$$u_x(a) = \begin{cases} r_1, & \text{se } 0 \leq a \leq a_1 \\ r_2, & \text{se } a_1 < a \leq a_2 \\ r_3, & \text{se } a_2 < a \end{cases} \quad (4.4.14)$$

Os predadores também podem ser caracterizados pela idade. Um filhote é pouco predador no sentido que a caça é realizada por seus pais, que estão na idade adulta e são os predadores mais eficientes. Os indivíduos velhos predam menos que os adultos, assim, as funções de pertinência são definidas em (4.4.15), veja Figura 4.18.

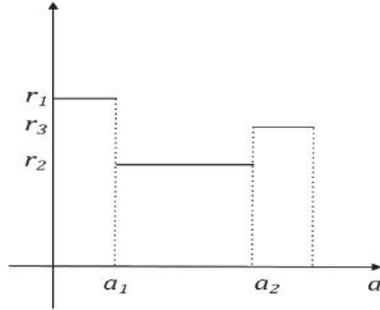


Figura 4.17: Funções de pertinência das presas.

$$u_y(b) = \begin{cases} s_1, & \text{se } 0 \leq b \leq b_1 \\ s_2, & \text{se } b_1 < b \leq b_2 \\ s_3, & \text{se } b_2 < b \end{cases} \quad (4.4.15)$$

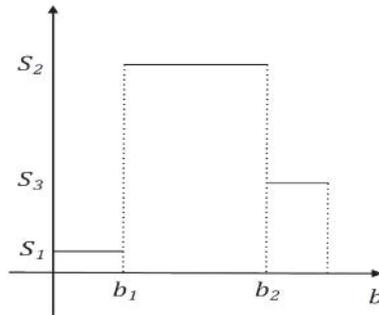


Figura 4.18: Funções de pertinência dos predadores.

Uma população x de presas tem como característica principal sua *potencialidade* como *presa*, definida por (4.4.16), no caso discreto e (4.4.17) no caso contínuo, a seguir:

$$P_x = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}; \quad (4.4.16)$$

$$P_x = \int_0^{x_{\max}} x u_x dx. \quad (4.4.17)$$

A potencialidade de uma população de predadores é definida de maneira análoga.

Por exemplo, suponha uma família de 18 predadores onde 5 são filhotes,

10 são adultos e 3 são velhos e estabeleça que o grau de predação de um filhote seja 0,2; do adulto seja 0,9 e do velho 0,3. Neste caso, tem-se:

$$P_y = \sum_{i=1}^n y_i u_{y_i} = 5 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,9 + 3 \cdot 0,3 = 10,9. \quad (4.4.18)$$

É fácil verificar que populações de mesmo tamanho podem ter diferentes potencialidades. Em casos mais gerais, onde se tem interações de diversas espécies, uma dada população pode ter potencialidades de predação e de presa ao mesmo tempo. O modelo que é proposto para a interação presa-predador é baseado simplesmente em regras dadas por variáveis linguísticas.

Na base de regras fuzzy adotada é assumido como antecedentes potencialidades das presas P_x , veja Figura 4.19 e potencialidades dos predadores P_y , veja Figura 4.20 e como consequentes ΔP_x e ΔP_y , veja Figuras 4.21 e 4.22, respectivamente. Os termos linguísticos para P_x e P_y são *baixa*, *média* e *alta*. Para a ΔP_x e ΔP_y os termos linguísticos são *alta negativa* (A^-), *média negativa* (M^-), *baixa negativa* (B^-), *alta positiva* (A^+), *média positiva* (M^+) e *baixa positiva* (B^+). A seguir a base de regras fuzzy utilizada é apresentada:

- Se P_x é *baixa* e P_y é *baixa* então ΔP_x é M^+ e ΔP_y é M^- ;
- Se P_x é *média* e P_y é *baixa* então ΔP_x é A^+ e ΔP_y é B^+ ;
- Se P_x é *alta* e P_y é *baixa* então ΔP_x é M^+ e ΔP_y é M^+ ;
- Se P_x é *baixa* e P_y é *média* então ΔP_x é B^+ e ΔP_y é A^- ;
- Se P_x é *alta* e P_y é *média* então ΔP_x é B^- e ΔP_y é A^+ ;
- Se P_x é *baixa* e P_y é *alta* então ΔP_x é M^- e ΔP_y é M^- ;
- Se P_x é *média* e P_y é *alta* então ΔP_x é A^- e ΔP_y é B^- ;
- Se P_x é *alta* e P_y é *alta* então ΔP_x é M^- e ΔP_y é M^+ .

A partir das potencialidades das presas e dos predadores calculadas conforme as equações (4.4.16) e (4.4.18), respectivamente, e utilizando o SBRF apresentado, com o método de inferência de Mamdani os valores de ΔP_x e ΔP_y são determinados.

A estimativa das trajetórias $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ são dadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta P_x(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta P_y(x_n, y_n), \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

em que $\Delta P_x(x_n, y_n)$ e $\Delta P_y(x_n, y_n)$ são os valores das saídas do SBRF correspondentes aos valores das entradas x_n, y_n ; $t_n = t_0 + n$. Note que as equações em (4.4.19) são do tipo discreto (4.1.2). A primeira iteração é obtida a partir dos valores $x_0 = 30$ e $y_0 = 9$. O mesmo raciocínio é repetido nas iterações seguintes obtendo o comportamento das potencialidades das presas e dos predadores no tempo e o plano de fase destas potencialidades, como mostram as Figuras 4.23 e 4.24, respectivamente.

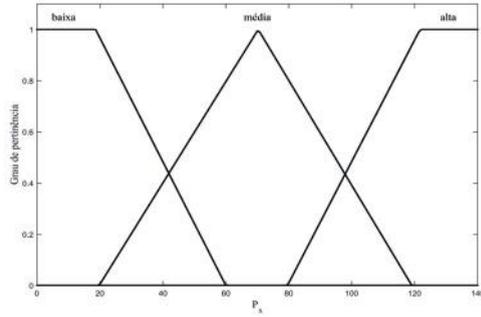


Figura 4.19: Funções de pertinência da potencialidade das presas (P_x).

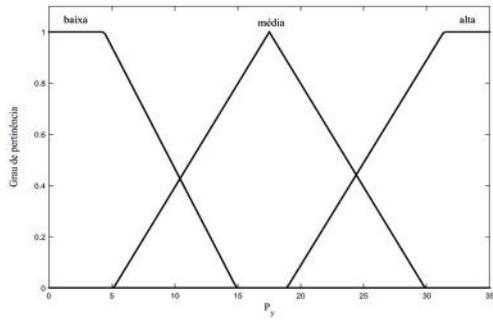


Figura 4.20: Funções de pertinência da potencialidade dos predadores P_y .

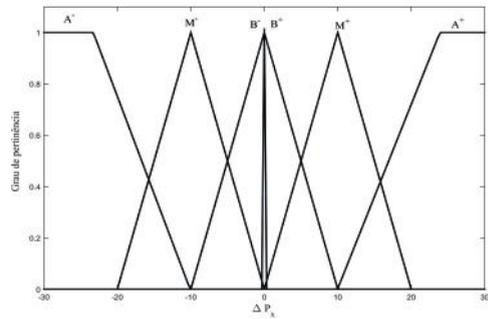


Figura 4.21: Funções de pertinência da variação de P_x (ΔP_x).

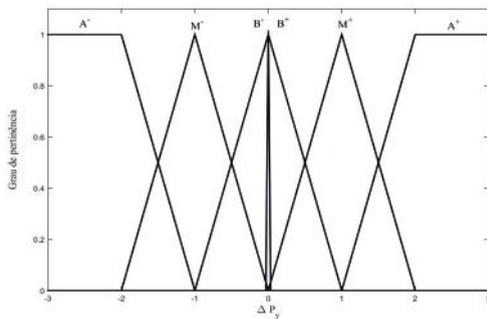


Figura 4.22: Funções de pertinência da variação de P_y (ΔP_y).

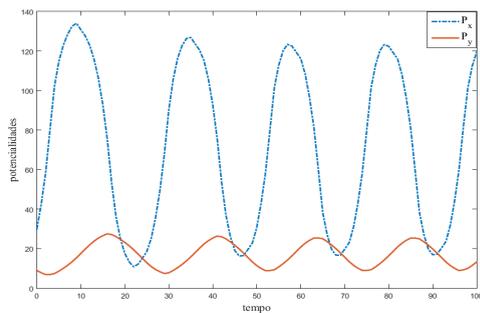


Figura 4.23: Comportamento das potencialidades das populações de presas e predadores.

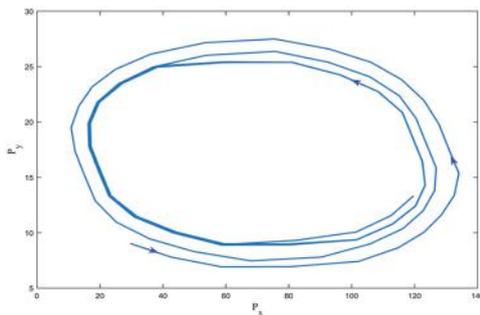


Figura 4.24: Plano de fase.

Ressalta-se que se as populações fossem homogêneas (isto é, não há diferenças entre presas e nem entre predadores, como é feito nos casos clássicos) nada mudaria na base de regras fuzzy, a não ser os nomes números de presas (predadores) ao invés de potencialidade de presas (predadores).

Na abordagem anterior a solução para um sistema presa-predador do tipo discreto via metodologia p-fuzzy foi apresentada.

A seguir é estudado um sistema p-fuzzy do tipo contínuo para o sistema presa-predador de Lotka-Volterra. A estratégia é utilizar um método do tipo Euler para determinar uma solução do sistema.

Embora não seja necessário, a base de regras escolhida é para variação específica $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$, conforme [7].

Assim, nesta abordagem as variáveis de entrada são: quantidade de presas (x) e quantidade de predadores (y). As variáveis de saída são o crescimento específico (ou variação relativa) das presas ($\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$) e crescimento específico (ou variação relativa) dos predadores ($\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$). A justificativa para adotar os crescimentos específicos como saída é que, a partir do sistema de EDO de Lotka-Volterra, $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ só depende de y e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ só depende de x . Assim, fixado um valor para y , o crescimento específico da presa é fixo, já que depende apenas do y (B_1 , por exemplo), conforme indicado na Figura 4.29. Em [56] o leitor pode consultar essa metodologia para o modelo econômico de Goodwin.

Os termos linguísticos da variável de entrada (x) são: *baixa* (A_1), *média baixa* (A_2), *média alta* (A_3) e *alta* (A_4) e da variável (y) são: *baixa* (B_1), *média baixa* (B_2), *média alta* (B_3) e *alta* (B_4). Nas Figuras 4.25 e 4.26 são apresentadas as funções de pertinência das quantidades das presas e dos predadores, respectivamente.

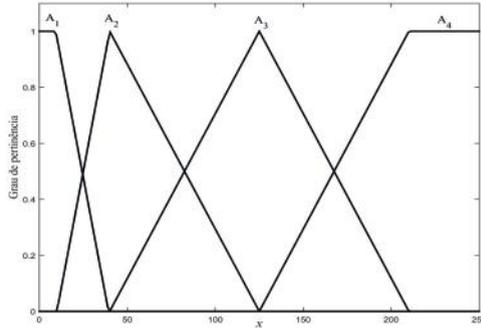


Figura 4.25: Funções de pertinência da quantidade das presas.

Os termos linguísticos das variáveis de saída (crescimentos específicos $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$) são: *baixo negativo* (N_1), *alto negativo* (N_2), *baixo positivo* (P_1) e *alto positivo* (P_2). Nas Figuras 4.27 e 4.28 são apresentadas as funções de

pertinência dos crescimentos específicos das presas e dos predadores, respectivamente.

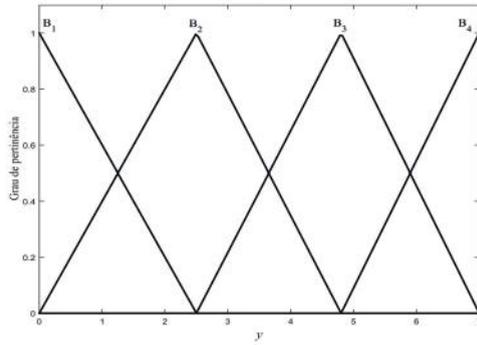


Figura 4.26: Funções de pertinência da quantidade dos predadores.

A base de regras fuzzy é construída observando a magnitude e os sentidos das setas horizontais de $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ e verticais que representam $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$, como são apresentadas na Figura 4.29.

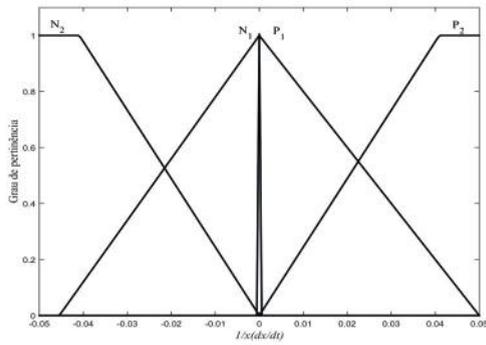


Figura 4.27: Funções de pertinência da variação relativa da quantidade das presas.

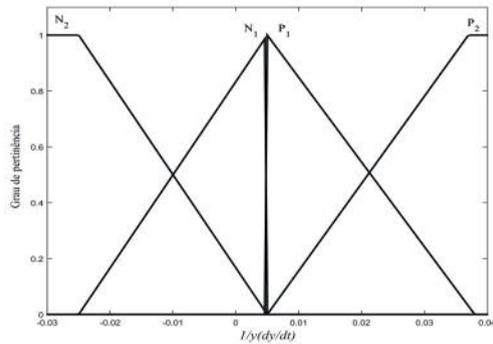


Figura 4.28: Funções de pertinência da variação relativa da quantidade dos predadores.

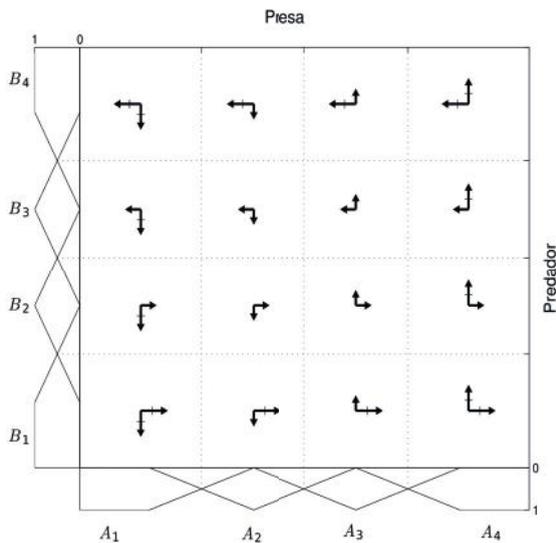


Figura 4.29: Representação gráfica das regras fuzzy na forma de vetores direções [7].

As regras fuzzy são dadas por:

- Se x é A_1 e y é B_1 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é N_2 ;

- Se x é A_2 e y é B_1 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é N_1 ;
- Se x é A_3 e y é B_1 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é P_1 ;
- Se x é A_4 e y é B_1 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é P_2 ;
- Se x é A_1 e y é B_2 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é N_2 ;
- Se x é A_2 e y é B_2 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é N_1 ;
- Se x é A_3 e y é B_2 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é P_1 ;
- Se x é A_4 e y é B_2 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é P_2 ;
- Se x é A_1 e y é B_3 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é N_2 ;
- Se x é A_2 e y é B_3 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é N_1 ;
- Se x é A_3 e y é B_3 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é P_1 ;
- Se x é A_4 e y é B_3 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é P_2 ;
- Se x é A_1 e y é B_4 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é N_2 ;
- Se x é A_2 e y é B_4 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é N_1 ;
- Se x é A_3 e y é B_4 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é P_1 ;
- Se x é A_4 e y é B_4 então $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é P_2 .

Utilizando o método de inferência de Mamdani e o método de defuzzificação dado pelo Centro de Gravidade, obtém-se os valores de $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$.

A estimativa das trajetórias $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ são calculadas por um método do tipo de Euler (4.1.4) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hx_n out_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hy_n out_2(x_n, y_n), \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

em que $out_1(x_n, y_n)$ e $out_2(x_n, y_n)$ são os valores das saídas do SBRF com relação aos crescimentos específicos das presas e dos predadores, respectivamente, correspondentes aos valores das entradas x_n , y_n e $t_n = t_0 + nh$.

As simulações das trajetórias produzidas pelo sistema p-fuzzy seguem os passos:

- Para começar o processo, é considerado $x_0 = 100$, $y_0 = 3$, $h = 0,1$ e $t_0 = 0$;
- Os dados iniciais $x_0 = 100$ e $y_0 = 3$ são introduzidos no SBRF;
- As saídas fornecidas pelo SBRF fornecem os valores $out_1(x_0, y_0)$ e $out_2(x_0, y_0)$,
- Por (4.4.21), determina-se x_1 e y_1 ;
- x_1 e y_1 são os novos valores de entrada do SBRF e assim sucessivamente.

Na Figura 4.30 são apresentadas as trajetórias obtidas pelo sistema p-fuzzy das quantidades das presas e dos predadores em função do tempo, respectivamente.

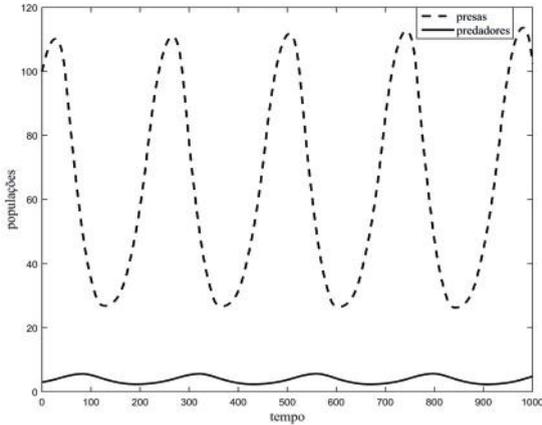


Figura 4.30: Quantidade de presas e predadores em função do tempo para $x_0 = 100$ e $y_0 = 3$.

Na Figura 4.31 é exibido o plano de fase da presa e do predador obtido pelo sistema p-fuzzy.

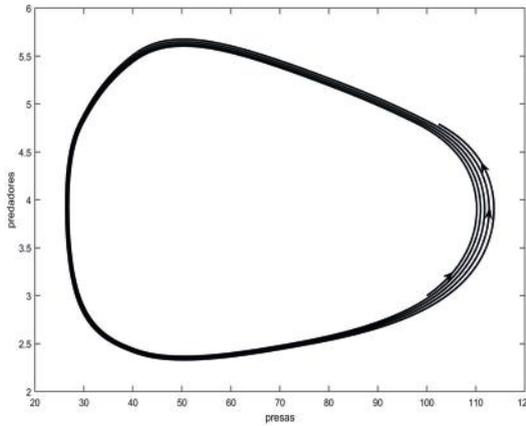


Figura 4.31: Plano de fase.

4.4.4 Sistema p-fuzzy com Método de Inferência de Takagi-Sugeno para Modelo Presa-Predador

Neste modelo são construídos dois SBRF considerando os valores das entradas $x = [0, 400]$ e $y = [0, 100]$. Cada intervalo é dividido em 100 pontos, e o treinamento é realizado para o produto cartesiano dos valores obtidos nestes intervalos [16]. No treinamento do primeiro SBRF os valores da variável de saída são dados por $\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy$. No treinamento do segundo SBRF, os valores da saída são dados por $\frac{dx}{dt} = -cy + \beta xy$ com os parâmetros $a = 0, 1$, $\alpha = 0, 01$, $b = 0, 05$ e $\beta = 0, 001$. Os treinamentos da rede neuro-fuzzy são realizados com cinco funções de pertinência triangulares para as variáveis de entrada, exibidas nas Figuras 4.32 e 4.33.

A base de regras dos SBRF é dada por:

- Se x é *pequena* e y é *pequena* então $\frac{dx}{dt} = 0, 1x + 2, 517 \cdot 10^{-10}y + 3, 164 \cdot 10^{-9}$
e $\frac{dy}{dt} = -2, 11 \cdot 10^{-11}x - 0, 05y - 2, 248 \cdot 10^{-10}$;
- Se x é *pequena* e y é *média* então $\frac{dx}{dt} = -0, 5878x + 2, 42 \cdot 10^{-10}y - 4, 89 \cdot 10^{-8}$
e $\frac{dy}{dt} = 0, 05595x - 0, 05y - 0, 0001082$;
- Se x é *pequena* e y é *grande* então $\frac{dx}{dt} = -1, 276x + 1, 355 \cdot 10^{-10}y + 4, 936 \cdot 10^{-9}$
e $\frac{dy}{dt} = 0, 1119x - 0, 05y - 0, 0002165$;
- Se x é *pequena* e y é *muito grande* então $\frac{dx}{dt} = -1, 964x - 4, 678 \cdot 10^{-11}y +$

- $1,301 \cdot 10^{-8}$ e $\frac{dy}{dt} = 0,1678x - 0,05y - 0,0003247$;
- Se x é *média* e y é *pequena* então $\frac{dx}{dt} = 0,1x - 0,6385y + 0,0002143$ e $\frac{dy}{dt} = -3,718 \cdot 10^{-11}x + 0,02681y + 4,044 \cdot 10^{-9}$;
 - Se x é *média* e y é *média* então $\frac{dx}{dt} = -0,5878x - 0,6385y - 0,001259$ e $\frac{dy}{dt} = 0,05595x + 0,02681y + 5,805 \cdot 10^{-5}$;
 - Se x é *média* e y é *grande* então $\frac{dx}{dt} = -1,276x - 0,6385y - 0,002734$ e $\frac{dy}{dt} = 0,1119x + 0,02681y + 0,0001161$;
 - Se x é *média* e y é *muito grande* então $\frac{dx}{dt} = -1,964x - 0,6385y - 0,004207$ e $\frac{dy}{dt} = 0,1678x + 0,02681y + 0,0001741$;
 - Se x é *grande* e y é *pequena* então $\frac{dx}{dt} = 0,1x - 1,277y + 0,0004284$ e $\frac{dy}{dt} = -6,934 \cdot 10^{-11}x + 0,1036y + 1,925 \cdot 10^{-8}$;
 - Se x é *grande* e y é *média* então $\frac{dx}{dt} = -0,5878x - 1,277y - 0,002519$ e $\frac{dy}{dt} = 0,05595x + 0,1036y + 0,0002243$;
 - Se x é *grande* e y é *grande* então $\frac{dx}{dt} = -1,276x - 1,277y - 0,005469$ e $\frac{dy}{dt} = 0,1119x + 0,1036y + 0,0004487$;
 - Se x é *grande* e y é *muito grande* então $\frac{dx}{dt} = -1,964x - 1,277y - 0,008414$ e $\frac{dy}{dt} = 0,1678x + 0,1036y + 0,000673$;
 - Se x é *muito grande* e y é *pequena* então $\frac{dx}{dt} = 0,1x - 1,915y + 0,0006429$ e $\frac{dy}{dt} = 4,401 \cdot 10^{-11}x + 0,1804y - 1,417 \cdot 10^{-8}$;
 - Se x é *muito grande* e y é *média* então $\frac{dx}{dt} = -0,5878x - 1,915y - 0,003779$ e $\frac{dy}{dt} = 0,05595x + 0,1804y + 0,0003906$;
 - Se x é *muito grande* e y é *grande* então $\frac{dx}{dt} = -1,276x - 1,915y - 0,0082$ e $\frac{dy}{dt} = 0,1119x + 0,1804y + 0,0007812$;
 - Se x é *muito grande* e y é *muito grande* então $\frac{dx}{dt} = -1,964x - 1,915y - 0,01262$ e $\frac{dy}{dt} = 0,1678x + 0,1804y + 0,001172$.

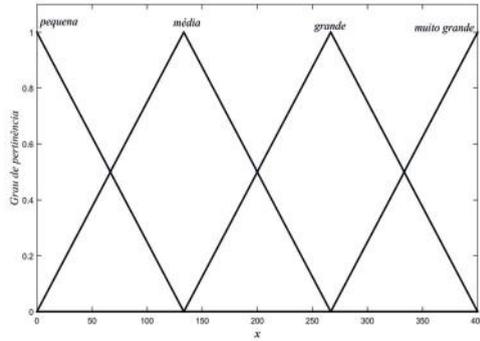


Figura 4.32: Funções de pertinência da quantidade das presas.

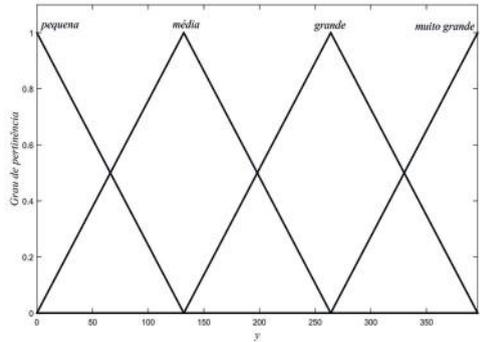


Figura 4.33: Funções de pertinência da quantidade dos predadores.

A formulação integral também é utilizada neste sistema p-fuzzy. A estimativa das trajetórias $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ são obtidas pela fórmula (4.1.6) que vem a ser:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}(3out_1(x_n, y_n) - out_1(x_{n-1}, y_{n-1})) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(3out_2(x_n, y_n) - out_2(x_{n-1}, y_{n-1})), \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

em que $out_1(x_n, y_n)$ e $out_2(x_n, y_n)$ são os valores das saídas do SBRF, respectivamente, correspondentes aos valores das entradas $x_n, y_n, t_n = t_0 + nh$ com $h = 0,04$, os valores das saídas para os primeiros valores das entradas são assumidos iguais a zero. Considerando inicialmente $x_0 = 50$ e $y_0 = 15$, determina-se x_1 e y_1 , e assim, sucessivamente. As trajetórias até $t = 400$ são apresentadas nas Figuras 4.34 e 4.35.

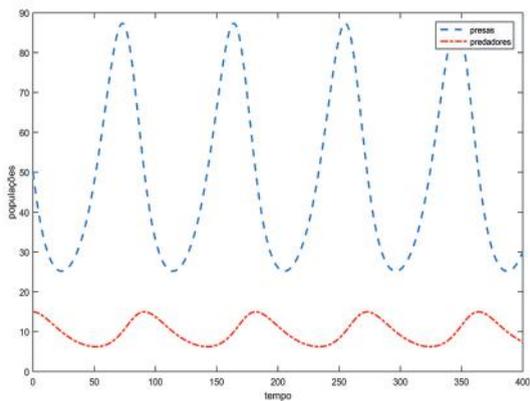


Figura 4.34: Quantidade de presas e predadores em função do tempo para $x_0 = 50$ e $y_0 = 15$.

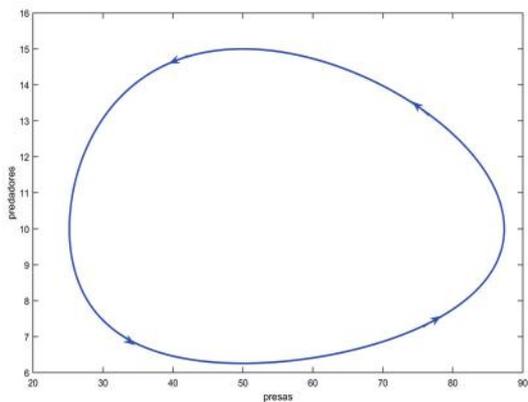


Figura 4.35: Plano de fase.

4.4.5 Algumas Considerações Finais

Os gráficos das Figuras 4.23 e 4.24 apresentam similaridade com os do modelo de Lotka-Volterra clássico, veja Figuras 4.15 e 4.16. Já as Figuras 4.23 e 4.24 do modelo fuzzy têm irregularidade visível, pelo fato de termos considerado o grau de predação heterogêneo das espécies. Estes chegam mais próximos da realidade que os gráficos de Lotka-Volterra comparados aos gráficos das Figuras 4.13 e 4.14. Os gráficos das Figuras 4.30 e 4.31 são construídos considerando a base de regras relacionada com o campo de direções do modelo; a trajetória obtida para cada contingente populacional tem comportamento qualitativo compatível com o modelo clássico de Lotka-Volterra. O leitor com interesse nesse tipo de modelo pode consultar [45]. Na última abordagem do sistema p-fuzzy, em que o SBRF é obtido pelo ANFIS, também produz trajetórias populacionais compatíveis com o modelo clássico de Lotka-Volterra.

A metodologia via sistemas p-fuzzy para EDO pode ser utilizada para Equações Diferenciais Parciais (EDP). Em [16] trajetórias de sistemas p-fuzzy de EDP são determinadas utilizando a rede neuro-fuzzy ANFIS. Note que aplicar a rede neuro-fuzzy é interessante quando os dados são conhecidos e estão relacionados com as derivadas de uma ou mais variáveis, assim não é necessário utilizar as expressões dessas derivadas [17].

Outra abordagem estudada em [18, 19] são os sistemas p-fuzzy modificados, isto é, quando as funções de pertinência são alteradas por uma potência e/ou sistemas p-fuzzy são modificados no tempo. Neste caso, as funções de pertinência são alteradas a cada iteração no tempo. Ressalta-se também que os sistemas p-fuzzy modificados descreveram uma melhor aproximação às soluções determinísticas para alguns modelos de dinâmica populacional, em relação aos sistemas p-fuzzy sem modificações, para critérios estabelecidos. Ressalta-se também que sistemas p-fuzzy podem ser aplicados para conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar [28]. Os conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar tratam as incertezas de forma mais geral, quando comparados com conjuntos fuzzy do tipo 1. A diferença crucial entre os dois conceitos matemáticos é que o conjunto fuzzy do tipo 1 tem um único grau de pertinência, enquanto um conjunto fuzzy do tipo 2 calcula o grau de pertinência em dois estágios, através da pertinência primária e da função de pertinência secundária. Quando a secundária é constante igual a 1 é denominado conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar; caso contrário é um conjunto fuzzy do tipo 2 geral.

Exercícios

1. O modelo clássico de Verhulst é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = r \left(1 - \frac{P}{P_\infty} \right) P, \quad (4.4.22)$$

em que $P(t)$ é a população no instante t , $r > 0$ e P_∞ é o valor limite da população. Via Euler, construa as soluções dos sistemas p-fuzzy com

as duas metodologias:

- (a) p-fuzzy via método de inferência de Mamdani;
 - (b) p-fuzzy via método de inferência de Takagi-Sugeno utilizando a rede neuro-fuzzy ANFIS para obter o SBRF.
2. (a) Refaça o exercício 1 via método explícito de passo 2 (fórmula (4.1.6)).
 - (b) Desenvolva uma fórmula explícita de passo 3 (que envolva x_n , x_{n-1} e x_{n-2}) e refaça o exercício 1.
 - (c) Compare as soluções obtidas no exercício 1 e nos itens (a) e (b).
3. Projeto: Competição entre Espécies

Quando duas ou mais espécies vivem em proximidade e dividem as mesmas exigências básicas, usualmente competem por recursos, habitat, ou território. Algumas vezes somente a mais forte prevalece, conduzindo o competidor mais fraco para extinção. Uma espécie vence porque seus membros são mais eficientes para encontrar e explorar recursos, o que leva para um crescimento da população. Indiretamente isto significa que a população de competidores encontra menos dos mesmos recursos e não pode crescer até sua capacidade máxima [15]. O modelo de Lotka-Volterra para competição de espécies é dado pelas equações:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \frac{k_1 - N_1 - \beta_{12} N_2}{k_1} \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \frac{k_2 - N_2 - \beta_{21} N_1}{k_2},\end{aligned}\tag{4.4.23}$$

em que N_1 e N_2 são as densidades das populações das espécies 1 e 2. Construir um sistema p-fuzzy para competição entre espécies via método de inferência de Mamdani.

Bibliografia

- [1] ABC equipe. *Obesidade*. Online. Acessado em 27/12/2022, <https://www.abcdasaude.com.br/endocrinologia/obesidade/>.
- [2] ALFARO, K. E. I. *Aplicações da Extensão de Zadeh na Dinâmica do HIV com Retardo Fuzzy sob Tratamento Antirretroviral*. Dissertação (Mestrado) — FAMAT, UFU, Uberlândia, 2019.
- [3] AMENDOLA, M.; SOUZA, A. L.; BARROS, L. C. *Manual do uso da teoria dos conjuntos fuzzy no Matlab 6.5*. Online. Acessado em 27/12/2022, http://www.ime.unicamp.br/~laeciocb/manual_fuzzy_matlab.pdf.
- [4] ANDERSON, R. M. et al. A preliminary study of the transmission dynamics of the human immunodeficiency virus (HIV), the causative agent of AIDS. *Journal of Mathematics Applied in Medicine & Biology*, n. 3, p. 229–263, 1986.
- [5] BANDO, F. M. *Sistemas fuzzy e aproximação universal*. Dissertação (Mestrado) — IMECC, Unicamp, 2002.
- [6] BARROS, L. C. *Modelos Determinísticos com Parâmetros Subjetivos*. Tese (Doutorado) — IMECC, Unicamp, 1992.
- [7] BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. 3a revisada e ampliada. ed. Campinas: Coleção IMECC - Textos Didáticos, 2021. ISBN 978-85-87185-17-4.
- [8] BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; LEITE, M. L. The epidemiological models SI with fuzzy parameter of transmission. *Computers and Mathematics with Applications*, n. 45, p. 1619–1628, 2003.
- [9] BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*. 1a. ed. São Paulo: Contexto, 2002. ISBN 85-7244-207-3.
- [10] BASSANEZI, R. C.; FERREIRA, W. C. *Equações Diferenciais com Aplicações*. 1a. ed. São Paulo: Harbra, 1988.
- [11] BASSANEZI, R. C.; ROMAN, H. E. *Relaciones Fuzzy: Optimizacion de Diagnostico Medico*. IMECC-Unicamp, Campinas, 1989.

- [12] BEDE, B. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy logic*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013.
- [13] BORGES, J. C.; JAFELICE, R. S. M. O estudo da taxa de infecção do linfócito T do tipo CD4+ pelo HIV através da teoria fuzzy. In: *XII Semana da Matemática e II Semana da Estatística*. Uberlândia: UFU, 2012. p. 49–52.
- [14] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. EUA: Brooks/Cole Publishing Company, 2011.
- [15] EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*. 1a. ed. EUA: Birkhäuser Mathematics Series, McGraw-Hill, 1988. ISBN 0-07-554950-6.
- [16] FERREIRA, D. P. L. *Sistema p-Fuzzy Aplicado às Equações Diferenciais Parciais*. Dissertação (Mestrado) — FAMAT, UFU, Uberlândia, 2011.
- [17] FERREIRA, D. P. L.; JAFELICE, R. S. M.; SERQUEIRA, E. O. Using fuzzy system in the study of luminescence and potency of neodymium ions. *Applied Optics*, v. 51, p. 6745–6752, 2012.
- [18] FERREIRA, T. F. *Sistemas p-fuzzy Modificados para Dinâmicas Populacionais: modelagens e simulações*. Dissertação (Mestrado) — FAMAT, UFU, Uberlândia, 2012.
- [19] FERREIRA, T. F.; JAFELICE, R. S. M. Sistemas p-fuzzy modificados para o modelo de controle de pragas. *Revista Biomatemática*, v. 22, p. 61–75, 2012.
- [20] FONSECA, C. A. G. *Estrutura ANFIS Modificada para Identificação e Controle de Plantas com Ampla Faixa de Operação e não Linearidade Acentuada*. 116 p. Dissertação (Mestrado) — UFRGN, 2012.
- [21] FREITAS, F. A. *Aplicação da Teoria dos Conjuntos Fuzzy no Estudo da Impedância Eletromecânica*. Dissertação (Mestrado) — FAMAT, UFU, Uberlândia, 2021.
- [22] HARDMAN, J.; GILMAN, A. *As Bases Farmacológicas da Terapêutica*. 9a. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1994.
- [23] JAFELICE, R. M. *Modelagem Fuzzy para Dinâmica de Transferência de Soropositivos para HIV em Doença Plenamente Manifesta*. Tese (Doutorado) — FEEC, Unicamp, Campinas, 2003.
- [24] JAFELICE, R. M. et al. Advances in logic, artificial intelligence and robotics. In: _____. *LAPTEC 2002*. Amsterdam, Holanda: IOS Press Ohmsha, 2002. (Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, v. 85), cap. Fuzzy rules in asymptomatic HIV virus infected individuals model, p. 208–215. ISBN 1-58603-292-5.

- [25] JAFELICE, R. M. et al. Fuzzy modeling in asymptomatic HIV virus infected population. *Bulletin of Mathematical Biology*, n. 66, p. 1597–1620, 2004.
- [26] JAFELICE, R. M. et al. Methodology to determine the evolution of asymptomatic HIV population using fuzzy set theory. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, n. 13, p. 39–58, 2005.
- [27] JAFELICE, R. M. et al. Dinâmica do HIV com retardo fuzzy baseado em autômato celular. *Revista Biomatemática*, v. 21, p. 177–192, 2011.
- [28] JAFELICE, R. S. M.; BERTONE, A. M. A. *Biological Models via Interval Type-2 Fuzzy Sets*. 1. ed. Heidelberg: SBMAC SpringerBriefs, 2020.
- [29] JAMILI, F. *Clinical pharmacokinetics of selected classes of drugs: Pharmacokinetic Compartments*. Online. Acessado em 2010, <http://www.pharmacy.ualberta.ca/pharm415pharmaco.htm>.
- [30] JANG, J.-S. R. Adaptive-network-based fuzzy inference system. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 3, n. 23, 1993.
- [31] KANDEL, A. *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications*. EUA: Addison-Wesley Publishing Company, 1986. ISBN 0-201-11752-5.
- [32] KLIR, G. J.; YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications*. EUA: Prentice-Hall PTR, 1995. ISBN 0-13-101171-5.
- [33] LOPES, W. A.; JAFELICE, R. M. Fuzzy modeling in the elimination of drugs. In: *Proceedings of the 2005 International Symposium on Mathematical and Computational Biology - BIOMAT 2005*. Rio de Janeiro: e-papers, 2005. p. 339–355. ISBN 85-7650-064-7.
- [34] LOPES, W. A.; JAFELICE, R. M. Modelagem fuzzy na saúde. *FAMAT em Revista*, n. 5, p. 85–125, 2005.
- [35] MALTHUS, T. R. *An Essay on the Principle of Population*. England: J. Johnson, London, 1798.
- [36] MASSAD, E. et al. *Métodos Quantitativos em Medicina*. 1a. ed. Barueri, SP: Manole, 2004. ISBN 85-204-1412-5.
- [37] MASSAD, E. et al. *Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond*. 1a. ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v. 232). ISBN 978-3-540-69092-4.
- [38] MENEGOTTO, J. *Aplicação da Teoria dos Conjuntos Fuzzy em Modelos Farmacocinéticos Multicompartimentais*. Dissertação (Mestrado) — Unicamp, Campinas, 2011.

- [39] MENEGOTTO, J.; BARROS, L. C. Aplicação de sistemas fuzzy em modelos farmacocinéticos multicompartmentais. *Biomatemática*, n. 21, p. 23–46, 2011.
- [40] MURRAY, J. D. *Mathematical Biology: An Introduction*. 3a. ed. New York: Springer-Verlag, 2001. ISBN 0-387-95223-3.
- [41] NEGNEVITSKY, M. *Artificial Intelligence: A Guide to Intelligent Systems*. 2. ed. England: Addison-Wesley, 2005. 282 p.
- [42] NGUYEN, H. T.; WALKER, E. A. *A First Course in Fuzzy Logic*. 2a. ed. EUA: Chapman e Hall/CRC, 2000. ISBN 0-8493-1659-6.
- [43] ORTEGA, N. R. S. *Aplicação da Teoria de Lógica Fuzzy a Problemas da Biomedicina*. Tese (Doutorado) — IF, USP, São Paulo, 2001.
- [44] PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. 1a. ed. Cambridge, EUA: MIT Press, 1998. ISBN 0-262-16171-0.
- [45] PEIXOTO, M. S. *Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: um estudo da dispersão da morte súbita dos citros em São Paulo*. Tese (Doutorado) — IMECC, Unicamp, Campinas, 2005.
- [46] PEIXOTO, M. S.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. Predator-prey fuzzy model. *Ecological Modelling*, v. 214, p. 39–44, 2008.
- [47] PETERMAN, T. A.; DROTMAN, D. P.; CURRAN, J. W. Epidemiology of the acquired immunodeficiency syndrome AIDS. *Epidemiology Reviews*, v. 7, p. 7–21, 1985.
- [48] RALESCU, D.; OGURA, Y.; LI, S. Set defuzzification e Choquet integral. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness e Knowledge-Based Systems*, n. 9, p. 1–12, 2001.
- [49] RENNING, C. Collective behaviour: Emergent dynamics in populations of interacting agents. In: *Seminar Artificial Life*. : ., 1999/2000.
- [50] RIBACIONKA, F. *Sistemas computacionais baseados em lógica fuzzy*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Mackenzie, São Paulo, 1999.
- [51] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2^a. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2000.
- [52] SANCHEZ, E. Solutions in composite fuzzy relation equations: application to medical diagnosis in brouwerian logic. In: *Fuzzy Automata and Decision Processes*. Amsterdam: North-Holland, 1997. p. 221–234.
- [53] SANCHEZ, E.; BARTOLIN, R. Fuzzy inference and medical diagnosis, a case study. *Biomedical Fuzzy Systems Bulletin*, n. 1, p. 4–21, 1990.

- [54] SAÚDE, M. *AIDS*. Online. Acessado em 2003, <http://www.aids.gov.br>.
- [55] SODRE, E. A.; MOTA, W. S.; ALENCAR, B. S. Sistema híbrido neuro-fuzzy para análise de segurança em tempo real de sistemas de potência. *Congresso Brasileiro de Redes Neurais*, v. 8, 2016.
- [56] SÁNCHEZ, D. E. et al. Goodwin economic cycle via p-fuzzy system. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, v. 38, n. 4, p. 4079–4090, 2020.
- [57] VALLE, L. B. S. et al. *Farmacologia integrada e farmacologia básica*. São Paulo: Atheneu, 1988.
- [58] VILLELA, M. F. S.; FREITAS, K. B.; JAFELICE, R. S. M. Modelo p-fuzzy de transferência da população HIV assintomática para sintomática. In: *Anais do XIV do Congresso Latino-Americano de Biomatemática*. Campinas: Unicamp, 2007. p. 39.
- [59] VILLELA, M. F. S.; SANTOS, P. B.; JAFELICE, R. S. M. Diagnóstico médico fuzzy de doenças infantis. *FAMAT em Revista*, n. 9, p. 329–346, 2007.
- [60] VILLELA, M. F. S.; SANTOS, P. B.; JAFELICE, R. S. M. Diagnóstico médico fuzzy de doenças infantis. In: *Anais da 7^a Semana da Matemática*. Uberlândia: UFU, 2007. p. 94–95.
- [61] WHO. *Coronavirus disease (COVID-19) pandemic*. Online. Acessado em 24/01/2023, <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>.
- [62] ZANINI, A. C.; OLGA, S. *Farmacologia Aplicada*. 5a. ed. São Paulo: Atheneu, 1998.

Índice

- ANFIS, 51, 97
- Base de regras, 36, 67, 82
- Centro de Gravidade, 39
- Clearance de Creatinina, 82
- Conjunto fuzzy, 2
 - complementar, 9
 - intersecção, 9
 - união, 9
- Coronavírus, 49
- Defuzzificação, 39
- Diagnóstico médico, 59
- Diferença limitada, 14
- Eliminação de fármaco, 79
- Equações dif. ordinárias, 66, 105
- Esperança fuzzy, 28, 71, 76
- Evolução AIDS, 63
- Funções de pertinência, 3, 41, 43, 46, 67, 96, 106
- Fuzzificação, 36
- HIV, 21, 54, 66, 99
- Intersecção drástica, 14
- Intersecção padrão, 14
- Linfócito $T CD4+$, 21, 64
- Malthus, 95
- Medida fuzzy, 27
- Meia-vida fármaco, 80
- Método de Mamdani, 37
- Método de Takagi-Sugeno, 38, 87
- Níveis conjunto fuzzy, 14
- Número fuzzy, 16
- p-fuzzy, 95, 99, 105, 116
- pH sérico, 82
- Presa-Predador, 103
- Produto algébrico, 14
- Qualidade da água, 45
- Regras fuzzy, 34
- Relação fuzzy, 32
 - composição, 32
- Risco de obesidade, 42
- S-norma triangular, 12
- Sistema baseado regras fuzzy, 35
- Soma algébrica, 12
- Soma limitada, 12
- T-norma triangular, 12
- Taxa de transferência, 67, 76
- União drástica, 12
- União padrão, 12
- Variáveis linguísticas, 34, 40, 66
- Vitalidade das violetas, 39
- Volume urinário, 81