

Volume 59, 2023

### Corpo Editorial

**Sandra Mara Cardoso Malta (Editor Chefe)**

Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC  
Petrópolis, RJ, Brasil

**Eduardo V. O. Teixeira (Editor Executivo)**

University of Central Florida - UCF  
Orlando, FL, EUA

**Lilian Markenzon**

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ  
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

**Marcelo Sobottka**

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC  
Florianópolis, SC, Brasil

**Paulo F. de Arruda Mancera**

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho- UNESP  
Botucatu, SP, Brasil

**Sandra Augusta Santos**

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP  
Campinas, SP, Brasil

**Tânia Schmitt**

Universidade de Brasília - UnB  
Brasília, DF, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex, com as figuras em .eps, .pdf e etc.** e ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo. O idioma pode ser Português ou Espanhol.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página  
<http://https://proceedings.science/notas-sbmac>

# PROBLEMAS INVERSOS EM TOMOGRAFIAS

Adriano De Cezaro  
adrianocezaro@furg.br  
Fabiana Travessini De Cezaro  
fabianacezaro@furg.br

Instituto de Matemática Estatística e Física  
Universidade Federal do Rio Grande - FURG



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil

2023

Coordenação Editorial: Mateus Bernardes

Coordenação Editorial da Série: Sandra M. C. Malta

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2023 by Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali e Rogério da Silva. Direitos reservados, 2023 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP**  
**Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner**

De Cezaro, A.

PROBLEMAS INVERSOS EM TOMOGRAFIAS - São Carlos, SP :  
SBMAC, 2023, 114 p., 21,5 cm - (Notas em Matemática  
Aplicada; v. 59)

ISBN 978-65-86388-21-3 e-ISBN 978-65-86388-20-6

1. Tomografias 2. Problemas Inversos 3. Aplicações  
I. De Cezaro, A. II. Travessini De Cezaro, F.  
IV. Título. V. Série

CDD - 51

Os nossos filhos João Pedro e Augusto!  
JP (6 anos): "Tomografia é tipo aquelas fotos dos meus  
dentinhas tiradas por aquelas máquinas super tecnológicas?  
Ou são as fotos do Guto na barriga da mamãe?"  
"Será que dá para ver nosso cérebro funcionando?"

*Dedico*









# Conteúdo

Prefácio	xiii
<b>1 Uma Introdução aos Problemas Inversos</b>	<b>1</b>
1.1 Alguns Exemplos (didáticos) de Problemas Inversos . . .	4
1.1.1 Resolução de Sistemas Lineares . . . . .	4
1.1.2 O Problema Inverso da Diferenciação . . . . .	7
1.2 Problemas Inversos em Tomografias . . . . .	8
1.2.1 Tomografia Computadorizada . . . . .	9
1.2.2 Tomografia por Emissão - SPECT e PET . . . . .	15
1.2.3 Tomografia por Difração . . . . .	17
1.2.4 Tomografia por Fluorescência Óptica . . . . .	19
1.2.5 Tomografia por Impedância Elétrica - EIT . . . . .	20
1.3 Alguns Fatos Históricos . . . . .	22
1.4 Exercícios . . . . .	25
<b>2 Fundamentação Teórica e Resultados Complementares</b>	<b>27</b>
2.1 Transformada de Fourier . . . . .	27
2.2 Completitude do Produto de Funções Harmônicas . . . . .	28
2.3 Completitude do Produto de Soluções Quase-exponenciais	30
2.4 Sistemas de Equações Lineares . . . . .	33
2.4.1 Pseudo-Inversa de Operadores Lineares . . . . .	34
2.4.2 A Decomposição em Valores Singulares . . . . .	38
2.5 Exercícios . . . . .	41
<b>3 Transformada de Radon e a Tomografia Computadorizada</b>	<b>45</b>
3.1 Propriedades da Transformada de Radon . . . . .	45
3.2 Fórmula de Inversão para Tomografia Computadorizada	47
3.3 Exercícios . . . . .	49
<b>4 Transformada de Radon Atenuada e SPECT</b>	<b>51</b>
4.1 O Problema de Riemann-Hilbert . . . . .	51
4.2 Fórmula de Inversão para Tomografia SPECT . . . . .	52
4.3 Exercícios . . . . .	58

<b>5</b>	<b>Tomografias por Difração e Aproximações de Born</b>	<b>59</b>
5.1	Espalhamento Inversos em Uma Dimensão . . . . .	59
5.1.1	Aproximação de Born . . . . .	60
5.2	Espalhamento Inverso em Dimensão Dois ou Três . . . . .	60
5.2.1	Aproximação de Born . . . . .	60
5.2.2	Fórmula de Reconstrução . . . . .	61
5.3	Exercícios . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Tomografia por Fluorescência Óptica</b>	<b>65</b>
6.1	Uma Fórmula de Inversão Utilizando Séries de Neumann	65
6.2	Exercícios . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Tomografia por Impedância Elétrica - EIT</b>	<b>69</b>
7.1	Transformação na Equação de Helmholtz . . . . .	70
7.2	Identificabilidade para a Equação de Helmholtz . . . . .	72
7.3	Identificabilidade para o Problema de EIT . . . . .	72
7.4	Resultados de Estabilidade para problema de EIT . . . . .	73
7.5	Exercícios . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Regularização para Problemas Inversos: Teoria Linear</b>	<b>77</b>
8.1	O Conceito de Regularização . . . . .	77
8.2	Resultados de Convergência . . . . .	79
8.2.1	Escolha <i>a priori</i> do Parâmetro de Regularização .	81
8.2.2	Escolha <i>a posteriori</i> do Parâmetro de Regularização	83
8.3	Regularização por Truncamento . . . . .	83
8.4	Exercícios . . . . .	84
<b>9</b>	<b>Regularização de Tikhonov: Teoria Linear</b>	<b>87</b>
9.1	Convêrgencia . . . . .	87
9.2	Semi-Convergência . . . . .	89
9.2.1	Taxas de convergência . . . . .	91
9.3	Regularização de Tikhonov e a Inversa Generalizada . . .	91
9.4	Regularização de Tikhonov para Tomografia Computadorizada . . . . .	92
9.5	Exercícios . . . . .	92
<b>10</b>	<b>Regularização por Métodos Iterativos: Teoria Linear</b>	<b>95</b>
10.1	Método de Landweber . . . . .	96
10.1.1	Convergência . . . . .	96
10.2	Método de Máxima Descida e a Inversa Generalizada . .	100
10.3	Métodos tipo Kaczmarz . . . . .	104
10.3.1	Método ART . . . . .	104
10.3.2	Método de Landweber-Kaczmarz . . . . .	105
10.4	Aplicação: Tomografia Computadorizada . . . . .	106

10.5 Exercícios . . . . . 107



# Prefácio

Estas notas, em sua segunda versão, buscam apresentar de maneira introdutória, resultados de unicidade e estabilidade para a identificação de parâmetros de interesse em termos das medidas feitas de forma indireta, em modelos provenientes de algumas modalidades de tomografias.

Tomografia é uma palavra que deriva do Grego Antigo, onde "tomos" significa seção e "grapho" significa descrever. Como veremos, são os parâmetros nos modelos de tomografias que descrevem distintas propriedades das seções de um objeto de interesse. Mas o fundamental em tal descrição está no fato de que os parâmetros de interesse são desconhecidos, e devem ser identificados a partir de medições (dados) que são feitas na borda exterior do objeto e de forma indireta (não invasiva ou não-destrutiva) - que é a essência dos problemas inversos-, provenientes de um determinado fenômeno físico (onda ou raio) que interage com o meio de interesse. Tais modalidades de tomografias possuem aplicações de relevância fundamental em diversas áreas da ciência, como em imagens médicas, arqueologia, biologia, astrofísica, geofísica, oceanografia, física do plasma, ciências dos materiais, entre outras.

Esta edição difere da primeira versão [14] em vários aspectos. Em particular, a organização e o conteúdo de alguns dos capítulos foram modificados e uma nova modalidade de tomografia (por impedância elétrica) foi acrescentada. No Capítulo 1 são introduzidos formalmente o que são os problemas inversos em termos de uma aplicação genérica  $\mathcal{M}$ , que associa as quantidades de interesse (os parâmetros) as medidas, em cada uma das modalidades de tomografias apresentadas. Desta forma, as questões fundamentais de unicidade e estabilidade dos parâmetros nas modalidades de tomografias apresentadas, se reduzem a estabelecer propriedades de injetividade e estimativas de estabilidade para a aplicação  $\mathcal{M}$ , em espaços de funções adequados. Também são apresentados alguns exemplos simples de problemas inversos, para os quais, a importância dos resultados de unicidade e estabilidade ficam evidentes (e didáticos). Em particular, os fenômenos associados aos problemas inversos "simples" que são apresentados reaparecem em algumas das modalidades de tomografias apresentadas nestas notas. No Capítulo 2 são apresentados alguns aportes teóricos e resultados complementares

a teoria desenvolvida nestas notas, de forma a deixá-la o mais autocontida possível. Do Capítulos 3 ao Capítulo 7, são tratados os resultados de identificabilidade e estabilidade e quando possível, são estabelecidos fórmulas de reconstrução para os problemas de tomografia propostos. Em particular, os resultados apresentados no Capítulo 7 para tomografia por impedância elétrica (EIT) são novo em comparação com a versão anterior destas notas (veja [14]). Os Capítulos 8-10 são dedicados a teoria de regularização para problemas inversos e como esta teoria pode ser aplicada as modalidades de tomografias apresentadas anteriormente.

Por se tratar de um texto introdutório, as demonstrações de alguns resultados foram reduzidas a casos particulares, cujo caso geral pode ser encontrado na bibliografia sugerida. A escolha e distribuição dos temas abordados buscam dar um equilíbrio entre as aplicações em tomografia e a teoria matemática necessária para resolver estes problemas. Os autores acreditam que o assunto da forma em que está apresentado no manuscrito coloca o leitor a par do desenvolvimento da teoria e aplicações dos problemas inversos, além de fornecer diversas informações sobre temas de pesquisa atuais nesta área.

Rio Grande, 08 de Junho de 2023.

Adriano De Cezaro  
Fabiana Travessini De Cezaro



# Capítulo 1

## Uma Introdução aos Problemas Inversos

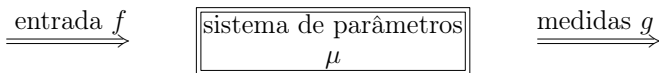
Na tentativa de descrever fenômenos da natureza com sistemas matemáticos, usamos o princípio de que as quantidades envolvidas estão relacionadas entre si por *leis da natureza*. Tal relação envolve as variáveis espaciais/temporais entre outras, e quantidades que chamamos de parâmetros.

Se o sistema é um modelo matemático, então, conhecidos os parâmetros, podemos prever o resultado de qualquer medida. Em outras palavras, estamos assumindo que exista uma aplicação

$$\mathcal{M} : X \rightarrow Y, \quad (1.0.1)$$

entre o conjunto de todos os dados de entrada e parâmetros  $X = X_1 \times X_2$  no conjunto de todas as possíveis medidas (observações)  $Y$ . Por simplicidade, assumiremos que  $X_1, X_2$  e  $Y$  são espaços de Hilbert. No entanto, boa parte dos resultados apresentados nestas notas podem ser generalizados (com as suas devidas complicações) em espaços de Banach, e.g., [43, 44, 46, 16].

Sintetizando as ideias acima, podemos assumir que o fenômeno da natureza a ser estudado é modelado por um processo que envolve três quantidades principais do modelo<sup>1</sup>



O processo esquemático acima pode ser descrito pela aplicação (1.0.1) como

$$X \ni (f, \mu) \mapsto \mathcal{M}(\mu)f = g \in Y. \quad (1.0.2)$$

---

<sup>1</sup>As quantidades  $f, \mu, g$  podem depender, eventualmente, das variáveis espaciais/temporais  $(x, y, t)$ , etc.



Com a formulação acima como hipótese, podemos agora apresentar uma resposta (que não precisa ser a única), de forma mais clara, para a seguinte pergunta: O que são os tais "problemas inversos?"<sup>2</sup>. Ou ainda, a pergunta pode ser: "inversos do quê?"

Para responder as perguntas acima, introduziremos o que entendemos ser o "*Problema Direto*".

*O problema direto:* Dados  $(f, \mu) \in X$  e conhecida a aplicação  $\mathcal{M}$ , determinar  $g$ . Daremos alguns exemplos mais precisos no decorrer destas notas.

*O problema inverso:* Esse pode aparecer de duas formas:

1. *O problema de reconstrução:* Conhecidos os parâmetros  $\mu \in X_2$  e a aplicação  $\mathcal{M}$ , determinar  $f \in X_1$  a partir de medidas de  $g$ .
2. *O problema de identificação.* Dado  $f$  e a aplicação  $\mathcal{M}$ , determinar os parâmetros  $\mu$  a partir de medidas (observações) de  $g$ .

Assim, a grosso modo, os *Problemas Inversos* estão relacionados com a determinação de **causas** (entradas ou parâmetros  $(f, \mu)$ ) através da observação (ou medida) dos **efeitos**  $g$ .

Em termos práticos,  $g$  dificilmente é obtido de forma precisa, pois sua obtenção é feita através de medidas. Assim, costumamos denotar as medições obtidas por  $g^\delta$ , das quais assumimos conhecer o nível de **ruído**  $\delta$ , de forma a satisfazer

$$\|g - g^\delta\| \leq \delta. \quad (1.0.3)$$

Uma característica importante que diferencia um *problema direto* de um *problema inverso* é que o segundo é *mal-posto* no sentido de Hadamard, [24]. Um problema é dito *bem-posto* no sentido de Hadamard se satisfaz as condições de existência, unicidade e dependência contínua dos dados e dos parâmetros que chamaremos de estabilidade. Caso um dos requerimentos acima não seja satisfeito, o problema é dito mal-posto.

Matematicamente, a questão de existência de soluções significa que tanto  $g$  quanto as medições  $g^\delta$  pertencerem a imagem da aplicação  $\mathcal{M}$ . Na prática, pode acontecer que  $g^\delta$  não satisfaça tal premissa. Neste caso, podemos, por exemplo, aumentar o conjunto de soluções, admitindo soluções generalizadas para o problema ou, melhor ainda, projetar  $g^\delta$  na imagem da aplicação  $\mathcal{M}$ . Em relação a unicidade significa que a aplicação  $\mathcal{M}$  não é injetiva<sup>3</sup>. A ausência de unicidade significa que estão faltando informações no modelo. Podemos adicionar propriedades, impor mais condições ao operador, ou ainda, podemos escolher uma entre as várias soluções (que tenham as características esperadas a-priori), a qual melhor corresponde ao modelo. Estabelecida a unicidade (de alguma forma), então a aplicação  $\mathcal{M}$  possui uma aplicação

<sup>2</sup>Para J.B. Keller [28], dois problemas são o inverso um do outro, se a formulação de um envolve o conhecimento (mesmo que parcial) do outro.

<sup>3</sup>Lembrando que injetividade significa:  $\mathcal{M}(\mu_1)f_1 = \mathcal{M}(\mu_2)f_2$  implica em  $(f_1, \mu_2) = (f_2, \mu_1)$ .

inversa  $\mathcal{M}^{-1}$ , que aplica de maneira única elementos da imagem de  $\mathcal{M}$  em  $X$ . Essa operação inversa é que será implementada numericamente para a solução do problema inverso de interesse. A violação da estabilidade é a de maior importância do ponto de vista prático, haja visto que este fato pode levar a sérias complicações para obtermos uma solução aproximada. Tais complicações não podem ser compensadas por "truques matemáticos". Uma maneira de inferir o quanto estável é o problema inverso de interesse é dado pelas estimativas de estabilidade, dadas por

$$\|(f_1, \mu_1) - (f_2, \mu_2)\| \leq \omega(\|\mathcal{M}(\mu_1)f_1 - \mathcal{M}(\mu_2)f_2\|), \quad (1.0.4)$$

onde  $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma função crescente, com  $\omega(0) = 0$ , que determina o módulo de continuidade da aplicação inversa  $\mathcal{M}^{-1}$ . Na maioria dos casos em aplicações reais, os dados não são obtidos exatamente e somente uma versão sujeita a ruído  $g^\delta$  é acessível (veja a equação (1.0.3)). Assim, a falta de estabilidade ( $\omega$  cresce muito rápido com o nível de ruído  $\delta$ ) implica que, em geral, que o ruído nos dados é amplificado, tornando qualquer método de inversão direta inadequado para a obtenção de uma solução do problema inverso de interesse. Para evitarmos estes desastres, precisamos de métodos adequados para obter soluções estáveis para o problema inverso, chamados de métodos de regularização, que serão estudados no Capítulo 8.

Do ponto de vista das aplicações, existem pelo menos duas motivações distintas para estudar "Problemas Inversos". A primeira é movida pela curiosidade humana de conhecer estados físicos passados ou parâmetros em um sistema físico que descreve certos modelos. A segunda é prever os fenômenos futuros influenciados pelos estados atuais. Ambas motivações são modeladas por equações matemáticas da forma (1.0.2).

Associado ao estudo e solução de problemas inversos estão fatores relevantes no desenvolvimento socioeconômico. Por exemplo, problemas inversos em imagens médicas influenciam em:

- **fatores sociais:** técnicas de detecção de tumores implicam em prolongar a vida das pessoas.
- **fatores econômicos:** detecção de tumores implica em tratamentos mais eficazes contra o câncer, diminuindo os custos dos mesmos. Ainda, prolonga a vida ativa das pessoas que, conseqüentemente, geram mais riquezas.
- **desenvolvimento tecnológico:** desenvolvimento de novos métodos e máquinas de tomografia para a obtenção de imagens médicas.

No que segue destas notas, trataremos de algumas técnicas de tomografias (não de todas), bem como da teoria necessária para a obtenção de soluções para o problema inverso associado. Existe uma vasta lista de referências sobre tomografias, das quais, algumas que foram amplamente utilizadas na escrita destas notas são [37, 14, 9, 18, 8, 33, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 13, 10, 16].

## 1.1 Alguns Exemplos (didáticos) de Problemas Inversos

Nesta seção, ilustraremos de maneira bem simples, com alguns exemplos, o quanto mal posto pode ser um problema inverso. Estes servirão de motivação para estudarmos mais a fundo algumas técnicas de tomografia nos capítulos seguintes.

### 1.1.1 Resolução de Sistemas Lineares

Nesta subseção apresentaremos o problema de mal-condicionamento de sistemas lineares e a relação de mal-condicionamento com os autovalores associados.

**Exemplo 1.1.** *Esse exemplo é puramente fictício, i.e., dificilmente será um exemplo digno de uma aplicação prática da vida real, mas simula perfeitamente a característica de má-colocação dos problemas inversos.*

Seja a matriz (aplicação)  $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 10^s & -2 \\ 0 & 10^{-s} \end{pmatrix}$ , o vetor  $g = \begin{pmatrix} -2 \\ 10^{-s} \end{pmatrix}$ , dado e  $s \in \mathbb{N}$ . Então, existe um único  $f \in \mathbb{R}^2$  solução do sistema  $\mathcal{M}f = g$ , a saber,  $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Mas será que o problema é bem posto, ou melhor, bem condicionado?

Considere o dado perturbado  $g^\delta = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Note que  $\|g - g^\delta\| = 10^{-s}$ .

Mas, a solução perturbada  $f^\delta = \frac{1}{1,004} \begin{pmatrix} -2 \cdot 10^s \\ 0 \end{pmatrix}$ . Ou seja, o erro cometido na solução é relativamente grande comparado ao erro nos dados (para  $s$  grande). Essa é uma característica comum aos problemas inversos. Neste caso, isto se deve ao mal condicionamento do problema.

O exemplo acima nos dá uma breve ideia dos problemas apresentados pelo mal condicionamento da matriz  $\mathcal{M}^{-1}$ . Outros percalços a se enfrentar na solução de problemas inversos estão relacionados com a natureza dos dados. É comum que os dados não estejam na imagem do operador (ao menos, não temos garantias que os dados perturbados estejam). O próximo exemplo sintetiza essa ideia. Assim, mesmo que o problema possua solução (se for considerado com dados exatos), dada a natureza ruidosa dos dados obtidos, pode tornar-se um problema indeterminado.

**Exemplo 1.2.** *Seja  $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  e o dado  $g = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Então,*

*existe uma solução  $f = (1, 1, 1)^T$  para o problema  $\mathcal{M}f = g$ . Mas, se os dados são providos de ruídos, i.e., se temos em mãos somente dados perturbados, como por exemplo  $g^\delta = (2; -1; 5; 0,000001)^T$ , neste caso, não existe  $f \in \mathbb{R}^3$*

tal que  $\mathcal{M}f = g^\delta$ . Ou seja,  $g^\delta$  não está na imagem do operador  $\mathcal{M}$ . Com isso, não temos uma solução (no sentido de solução que estamos acostumados) para o problema com ruídos.

O fenômeno de má-colocação do problema apresentado nos Exemplos 1.1-1.2 serão detalhados de maneira generalizada no que segue. Para tal, evocaremos o Teorema Espectral [30], para operadores lineares, compactos e injetivos  $\mathcal{M} : X \rightarrow Y$  (em que  $X$  e  $Y$  são espaços de Hilbert), para os quais temos que

$$\mathcal{M}^{-1}g = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_j} \langle g, h_j \rangle e_j, \quad g \in \text{Im}(\mathcal{M}), \quad (1.1.5)$$

onde os conjuntos  $\{e_j\}$  e  $\{h_j\}$  formam bases ortogonais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

**Observação 1.1.** Note que, se  $m$  é grande (ou seja, se a dimensão do problema é grande), então  $\sigma_m$  se aproxima de zero (e.g., [30]). Isso significa que  $\frac{1}{\sigma_m}$  é grande. Portanto, pequenas perturbações na direção de um autovetor associado ao autovalor  $\sigma_m$  implicam numa grande variação na solução. Exatamente como acontece nos Exemplos 1.1-1.2 apresentados anteriormente.

De fato, considere o problema inverso (em dimensão  $n$ ) de recuperar  $f$  na equação matricial

$$\mathcal{M}f = g^\delta,$$

para um dado com ruídos  $g^\delta = (g_1, \dots, g_n + \frac{1}{n})$ . Assim, o erro nos dados é da ordem de  $\frac{1}{n}$ .

Suponha que a matriz  $\mathcal{M}$  tenha sua decomposição espectral dada por (2.4.27) onde os valores singulares são  $\sigma_j = \mathcal{O}(\frac{1}{j})^4$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Logo,  $\mathcal{M}$  é inversível.

Da equação (2.4.27), temos que a solução com ruídos é dada por

$$f^\delta = \mathcal{M}^{-1}g^\delta = V\Sigma^{-1}U^T g^\delta.$$

onde as matrizes  $U$  e  $V$  (unitárias) são as matrizes dos auto-espaços. Portanto, temos a seguinte estimativa para a solução

$$\begin{aligned} \|f - f^\delta\|^2 &= \|V\Sigma^{-1}U^T(g - g^\delta)\|^2 = \sum_{j=1}^n (\mathcal{O}(j)(g_j - g_j^\delta))^2 \\ &= \left(\frac{\mathcal{O}(n)}{n}\right)^2 = (\mathcal{O}(1))^2. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Note que o erro na solução é muito grande, se  $(\mathcal{O}(1))^2$  for grande.

Vamos agora a um critério de solvabilidade de equações lineares governadas por operadores compactos. Muitos autores referem-se a este resultado como sendo o **Critério de Picard**, [7, 8, 17].

---

<sup>4</sup> $\mathcal{O}(a)$  significa que  $\frac{\mathcal{O}(a)}{a} = \text{constante}$ .

**Teorema 1.1.** *Seja  $\mathcal{M}$  um operador compacto e  $(\sigma_j, e_j, h_j)$  um sistema singular de  $\mathcal{M}$ . Dado  $g \in Y$ , as seguintes condições são equivalentes:*

- a)  $g \in \text{Im}(\mathcal{M})$ ,  
 b)  $g \in \overline{\text{Im}(\mathcal{M})}$ ;  $\sum_{j=0} \sigma_j^{-2} |\langle g, h_j \rangle|^2 < \infty$ .

Demonstração: Daremos uma ideia da prova.

a)  $\Rightarrow$  b) De  $g \in \text{Im}(\mathcal{M}) \subset \overline{\text{Im}(\mathcal{M})}$ . Seja  $f \in X$  tal que  $\mathcal{M}f = g$ . Segue do Teorema Espectral [30] que  $\mathcal{M}^*h_j = \sigma_j e_j$ . Assim, usando a desigualdade de Bessel,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0} \sigma_j^{-2} |\langle g, h_j \rangle|^2 &= \sum_{j=0} \sigma_j^{-2} |\langle \mathcal{M}f, h_j \rangle|^2 = \sum_{j=0} \sigma_j^{-2} |\langle f, \mathcal{M}^*h_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{j=0} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \sum_{j=0} \|f\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

b)  $\Rightarrow$  a) Defina  $f_n := \sum_{j=0}^n \sigma_j^{-1} \langle g, h_j \rangle e_j$ . Portanto, para  $m, n \in \mathbb{N}$  temos:

$$\|f_n - f_m\|^2 = \sum_{j=n+1}^m \sigma_j^{-2} |\langle g, h_j \rangle|^2$$

e, portanto,  $\{f_n\}$  é uma sequência de Cauchy, cujo limite denotaremos por  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Pela continuidade de  $\mathcal{M}$  e definição de  $f_n$ , segue que

$$\mathcal{M}f = \sum_{j=0} \langle g, h_j \rangle h_j \quad \text{e} \quad \|\mathcal{M}f\| \leq \|g\|.$$

Defina  $z := g - \sum_{j=0} \langle g, h_j \rangle h_j$ . Segue facilmente que

$$\|z\|^2 = \|g\|^2 - \sum_{j=0} |\langle g, h_j \rangle|^2; \quad \langle z, h_j \rangle = 0, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \mathcal{M}^*z = 0.$$

Portanto, como  $g \in \overline{\text{Im}(\mathcal{M})} = \mathcal{N}(\mathcal{M}^*)^\perp$ , temos

$$\langle z, g \rangle = \|g\|^2 - \sum_{j=0} |\langle g, h_j \rangle|^2 = \|z\|^2.$$

Logo,  $g = \sum_{j=0} \langle g, h_j \rangle h_j = \mathcal{M}f$ . ■

**Observação 1.2.** *Note que o Teorema de Picard 1.1 sugere que uma tentativa de solução para a equação  $\mathcal{M}f = g$  é*

$$f = \sum_{j=0} \sigma_j^{-1} \langle g, h_j \rangle e_j. \quad (1.1.7)$$

Suponha que temos somente o dado perturbado  $g^\delta = g + \delta h_k$ . Substituindo na equação (1.1.7), obtemos como solução perturbada  $f^\delta = f + \delta \sigma_k^{-1} e_k$ . Assim,

$$\|f - f^\delta\|^2 = \left\| \frac{\delta}{\sigma_k} e_k \right\|^2 = \frac{\delta^2}{\sigma_k^2}. \quad (1.1.8)$$

Como  $\sigma_j \rightarrow 0$ , segue que a estimativa (1.1.8) pode ser muito ruim, mostrando o efeito de mal-condicionamento causado pelos valores singulares de um operador compacto.

Problemas inversos, da natureza dos apresentados acima, são comuns em algumas aplicações da vida real.

### 1.1.2 O Problema Inverso da Diferenciação

Nesta seção apresentaremos o problema inverso da diferenciação, o qual é uma forma de motivar a necessidade de estudos detalhados da teoria de problemas inversos.

Sejam  $g, g^\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas satisfazendo

$$\|g(t) - g^\delta(t)\|_\infty \leq \delta, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Gostaríamos de reconstruir a derivada  $f = g'$  de  $g$ . Uma das estratégias (pelo menos do ponto de vista numérico) é considerar aproximações por diferenças simétricas, isto é, para qualquer  $\tau \in (0, 1)$ ,

$$f^{\delta, h}(\tau) := \frac{g^\delta(\tau + h) - g^\delta(\tau - h)}{2h}.$$

Intuitivamente, quando  $h$  tende a zero,  $f^{\delta, h}(\tau)$  deveria se aproximar de  $f$ . No entanto, um simples argumento com a desigualdade triangular fornece

$$\begin{aligned} \|f^{\delta, h}(\tau) - f(\tau)\|_\infty &\leq \left\| \frac{g(\tau + h) - g(\tau - h)}{2h} - f(\tau) \right\|_\infty \\ &\quad + \left\| \frac{(g^\delta - g)(\tau + h) - (g^\delta - g)(\tau - h)}{2h} \right\|_\infty. \end{aligned}$$

Suponhamos que

$$\|f'(t)\|_\infty = \|g''(t)\|_\infty \leq E, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Substituindo o limitante na desigualdade acima, obtemos a estimativa de erro

$$\|f^{\delta, h}(\tau) - f(\tau)\|_\infty \leq hE + \frac{\delta}{h}. \quad (1.1.9)$$

A equação (1.1.9) é típica em problemas inversos e reaparecerá novamente em nossas notas. O que é importante, por agora, é entender o que ela quer nos dizer. Temos dois termos nessa estimativa de erro: um devido a aproximação da aplicação inversa ( $hE$ ) e o outro devido ao erro de medida ( $\frac{\delta}{h}$ ). Observe

que, quanto mais refinarmos a aproximação (quanto mais próximo de zero tomarmos  $h$ ) mais precisamente estamos calculando a derivada  $g'$ . Por outro lado, como os dados estão corrompidos por erros, (1.1.9) nos ensina que, se  $h$  for tomado muito pequeno, então  $f^{\delta,h}$  pode estar longe da solução verdadeira.

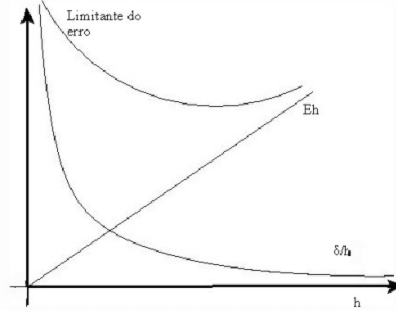


Figura 1.1: Estimativa fundamental.

O melhor que podemos fazer é escolher  $h$  de forma a balancear o lado direito de (1.1.9). A Figura 1.1 ilustra a escolha de  $h(\delta)$ . Ou seja, tomarmos

$$h(\delta) := E^{-\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}}.$$

## 1.2 Problemas Inversos em Tomografias

Tomografia<sup>5</sup> é a maneira de obter imagens de seções do um objeto de interesse, a partir de medidas indiretas de algum tipo de onda penetrante (raio) que interage com este objeto. Em outras palavras, tais problemas consistem em recuperar a forma ou a densidade e a localização de um objeto imerso em uma região a partir de medidas (parciais) sobre a fronteira da região (de forma não invasiva) de algum tipo de onda que atravessa o meio. As medidas, na maioria dos casos, são adquiridas por um número reduzido de experimentos. Assim, uma característica comum destes tipos de problemas é a falta de informações e, conseqüentemente, ruído nos dados. Este método de obtenção de imagens encontra aplicações em ciência médicas (radiologia), geofísica, ciências dos materiais, astrofísica, entre outros [18, 34, 33, 42, 4, 9, 10, 39, 38].

Existem vários tipos de tomografias, cujas imagens obtidas dependem da física do problema estudado. Neste manuscrito, estudaremos o problema inverso associado a Tomografia Computadorizada, Tomografia por Emissão,

<sup>5</sup>Tomografia é derivada do Grego Antigo e significa tomos "seção" e grafia "escrever", ou neste contexto, "descrever"

por Difração, por Fluorescência Óptica e por Impedância Elétrica. Outros tipos de tomografia são estudados de maneira mais detalhada, por exemplo, em [18, 34, 33, 42, 4, 9, 10, 39, 38] e referências.

### 1.2.1 Tomografia Computadorizada

A Tomografia Computadorizada (TC) é um método de obtenção de diagnósticos baseados em imagens internas de uma região a partir de medições das intensidades de feixes de raios-X que passam por esse objeto.

TC é baseada nos mesmos princípios da radiografia convencional, pois, os tecidos com diferentes composições absorvem a radiação emitida pelo raio-X de forma diferente. Ao serem atravessados por raios-X, tecidos mais densos, por exemplo como o fígado, ou com elementos mais pesados, como o cálcio presente nos ossos, absorvem mais radiação que tecidos menos densos, como o pulmão, que está cheio de ar. Assim, um processo de TC indica a quantidade de radiação absorvida por cada parte do corpo analisada (radio-densidade) e traduz essas variações numa escala de cinza produzindo uma imagem. Cada pixel da imagem corresponde à média da absorção dos tecidos na região escaneada pelo processo.

**Descrição do Problema:** Uma maneira intuitiva de compreender o processo de reconstrução de imagens usando TC é considerar o caso em que possuímos apenas um feixe de raio-X (onda penetrante), com intensidade inicial emitida  $f_0$ , o qual percorre o objeto  $\Omega$ , em uma direção fixa  $\theta$  em linha reta, denotada por  $L := L(f_0, \theta)$ . Fisicamente, qualquer raio que passe por um obstáculo é atenuado, resultando em uma intensidade de radiação  $g$ , medida pelo detector que está do lado oposto à fonte de emissão com relação a um obstáculo homogêneo imerso em  $\Omega$ . Assumindo que a radiação absorvida é decorrente da existência de um coeficiente de absorção  $\mu(x)$ ,  $x \in \Omega$ .

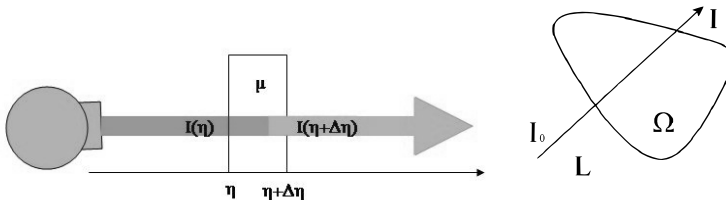


Figura 1.2: Atenuação do raio-X. Nesta notação  $I(\eta) = g(x)$  e  $I(\eta + \Delta\eta) = g(x + \Delta x)$ , na dedução que segue.

Figura 1.3: Raio-X. Nesta figura  $I_0 = f_0$  e  $I = g(x + \Delta x)$  ao longo da reta  $L$ .

Com esse modelo simples (ilustrado pelas Figuras 1.2 e 1.3), a atenuação total de um feixe de raio-X monocromático pode ser calculada da seguinte forma: a intensidade de radiação  $g$ , após percorrer a distância  $\Delta x$  através de



um objeto, é dada por

$$g(x + \Delta x) = g(x) - \mu(x)g(x)\Delta x. \quad (1.2.10)$$

Se reescrevermos a equação (1.2.10), temos que

$$\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = -\mu(x)g(x). \quad (1.2.11)$$

Suponhamos que  $\Delta x$  seja infinitesimal, isto é, se fizermos  $\Delta x \rightarrow 0$  em (1.2.11), obtemos a equação diferencial ordinária

$$\frac{dg(x)}{dx} = -\mu(x)g(x). \quad (1.2.12)$$

Para determinarmos  $g$ , integramos (1.2.12) ao longo da reta  $L$  (método de separação de variáveis) e obtemos que

$$g(x) = f_0 \exp\left(-\int_L \mu(x)dx\right), \quad (1.2.13)$$

onde  $L$  é o comprimento do feixe. O coeficiente de absorção  $\mu(x)$  compreende os efeitos de absorção e de espalhamento do raio-X que é emitido.

A equação (1.2.13) é conhecida como **lei de Beer** e nos ensina que a intensidade de raio-X é atenuada exponencialmente ao longo de  $L$ , [10], onde consideramos os efeitos de espalhamento desprezíveis. A quantidade

$$g(L(x)) = -\ln\left(\frac{g}{f_0}\right) = \int_L \mu(x)dx, \quad (1.2.14)$$

mede a variação da intensidade de raio-X, ou seja, a atenuação do raio-X durante o processo, onde  $L(x)$  representa a parametrização da ao longo da reta  $L$ . Denominaremos  $g(L(x))$  em (1.2.14) de projeção ou projeção integral.

Na prática, as projeções  $g(L(x))$ , dadas pela equação (1.2.14), podem ser medidas somente sobre uma quantidade finita de retas  $L$ .

Para obter informações suficientes para reconstruir uma imagem bidimensional, o feixe de raio-X é movimentado de forma paralela a distribuição linear dos detectores. De forma sequencial, o conjunto de detectores é rotacionado por um ângulo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , de forma que todo o objeto de interesse seja escaneado. O processo é representado pela Figura 1.4.

Assim, para um ângulo  $\theta$  fixo e para uma posição em particular da fonte de raio-X, o processo é descrito pela projeção integral (1.2.14). Desta maneira, é razoável reescrevermos a equação (1.2.14) em função da posição da fonte de raio-X - ou da localização do correspondente detector  $\xi$  - e do ângulo de de projeção  $\theta$ . Assim, consideraremos o sistema de coordenada  $(\xi, \eta)$ , o qual gira juntamente com o raio-X e a fonte de detectores, ao invés do sistema de coordenadas fixo  $(x, y)$ . A Figura 1.4-(D) mostra a correspondência entre os dois sistemas<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>A Figura 1.4 foi retirada de [10]

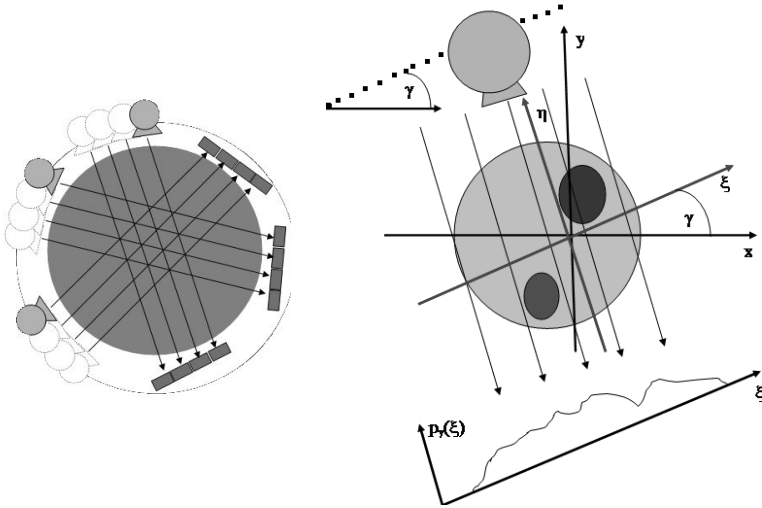


Figura 1.4: Tomografia por raios-X paralela (E). Mudança de variáveis (D).

No novo sistema de variáveis, a equação (1.2.14) fica escrita como

$$g_{\theta}(\xi) = \int_L \mu(\xi, \eta) d\eta. \quad (1.2.15)$$

A equação (1.2.15) é uma integral de linha ao longo do segmento de reta  $L$ . Ela descreve a posição  $\xi$  da fonte de raio-X e do respectivo detector com um ângulo de projeção  $\theta$  em relação ao plano de coordenadas  $(x, y)$ .

Na prática, os valores do coeficiente de atenuação devem ser dados como uma função das coordenadas fixas  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Para descrever a relação entre os sistemas de coordenadas  $(\xi, \eta)$  e  $(x, y)$ , definimos<sup>7</sup> o vetor  $\boldsymbol{\theta} = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{S}^1$  e seja  $\boldsymbol{\theta}^{\perp}$  o vetor unitário ortogonal a  $\boldsymbol{\theta}$ . Com essa notação, temos que

$$\xi = x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \quad \eta = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta). \quad (1.2.16)$$

Substituindo (1.2.16) em  $\mu(\xi, \eta)$ , obtemos o coeficiente de atenuação nas variáveis  $\mathbf{x} = (x, y)$  definido por

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), -x \sin(\theta) + y \cos(\theta)). \quad (1.2.17)$$

Assim, do ponto de vista físico, os coeficientes de atenuação  $\mu(\mathbf{x})$  e  $\mu(\xi, \eta)$  são os mesmos.

**Exercício 1.1.** *Mostre que qualquer ponto  $\mathbf{x} = (x, y)$  do plano cartesiano que está a uma distância  $s = \sqrt{x^2 + y^2}$  da origem pode ser parametrizado como  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^{\perp} = s$ , onde  $\boldsymbol{\theta} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Veja a Figura 1.5.*

<sup>7</sup> $\mathbb{S}^{n-1}$  denota a esfera unitária em  $\mathbb{R}^n$ , para  $n \geq 2$ .

Se considerarmos  $f_0 = 1$  (normalizado) na equação (1.2.14) e parametrizando a reta  $L$  de acordo com o Exercício 1.1, obtemos

$$g_\theta(\xi) = \mathcal{M}(\mu)f_0 := \mathcal{R}\mu(\theta, s) = \int_{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp = s} \mu dl = \int_{\mathbb{R}} \mu(s\boldsymbol{\theta}^\perp + t\boldsymbol{\theta}) dt. \quad (1.2.18)$$

O operador  $\mathcal{R}$  é chamada de **Transformada de Radon** bi-dimensional de  $\mu$ . Esta é uma aplicação que leva funções de  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  em funções de  $(\boldsymbol{\theta}, s) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ .

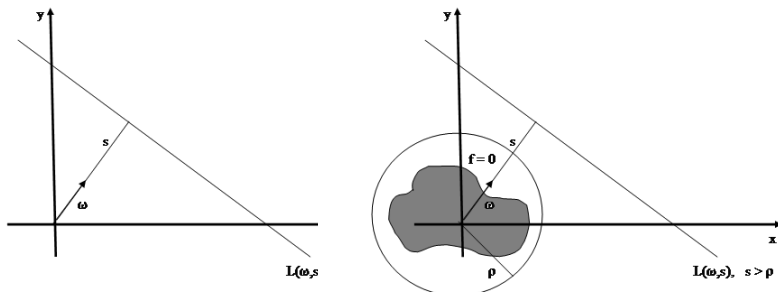


Figura 1.5: Parametrização da reta  $L$  que é perpendicular a  $w$  a uma distância  $s$  da origem (D) e Se  $\mu(x, y) = 0$ , quando  $|(x, y)| > \rho$ , então  $\mathcal{R}\mu(w, s) = 0$  quando  $s > \rho$ .

O **problema inverso** associado a tomografia é: Encontrar uma aproximação apropriada para a distribuição de densidade  $\mu$  através da medida dos outputs de várias seções transversais em diferentes ângulos da região  $\Omega$ . Ou seja, a solução do problema inverso de reconstruir a densidade  $\mu$  consiste em inverter o operador  $\mathcal{R}$  (em um espaço de funções adequado).

Segue uma pergunta importante: É possível determinar o coeficiente de absorção  $\mu$  a partir de sua integral de linha (1.2.18) ao longo da reta  $L$ ? Esta pergunta é exatamente a mesma feita por *Johann Radon* em seu famoso trabalho de 1917, [41]. A tentativa de respondê-la, nos leva a várias outras perguntas:

1.  $\mathcal{R}$  é injetiva?
2. Qual é a imagem de  $\mathcal{R}$ ?
3. É possível encontrar uma fórmula para a inversa de  $\mathcal{R}$ ?
4. Se  $\mathcal{R}\mu(\theta, s) = 0$  para  $|s| > \rho$  e para toda direção  $\boldsymbol{\theta} = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) \in \mathbb{S}^1$ , é verdade que  $\mu(x, y) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  com  $|x| > \rho$ ? Veja Figura 1.5.

Do ponto de vista prático, é impossível obtermos medidas sobre todas as retas que passam por  $\Omega$ . Deste fato, surge uma outra pergunta: Quantas medidas são necessárias para obtermos uma boa aproximação?. Esta, talvez,

seja a mais difícil. Abaixo apresentaremos uma abordagem discreta da TC onde aparecerá, naturalmente, tal questão. Para mais detalhes consulte [38, 39].

### Tomografia Computadorizada: Caso Discreto

Nesta seção, faremos uma breve discussão do aspecto prático da TC e da Transformada de Radon. Como comentado anteriormente, do ponto de vista prático, é impossível obter a integral de linha de  $\mu$  em todas as direções. Na verdade, o conjunto de informações obtidas num processo de tomografia são valores da Transformada de Radon medidos por  $N$  detectores.

As limitações físicas do processo de medição implicam em uma discretização da imagem tomográfica. O tamanho e o número  $N$  de pixels, dentro do campo de visão que devem ser reconstruídos, consistem de um vetor de variáveis desconhecidas  $\mu_j$  para  $j = \{1, \dots, N\}$ . Os  $\mu_j$  são os coeficientes de atenuação. A Figura 1.6 mostra, esquematicamente, uma imagem tomográfica a ser reconstituída<sup>8</sup>.

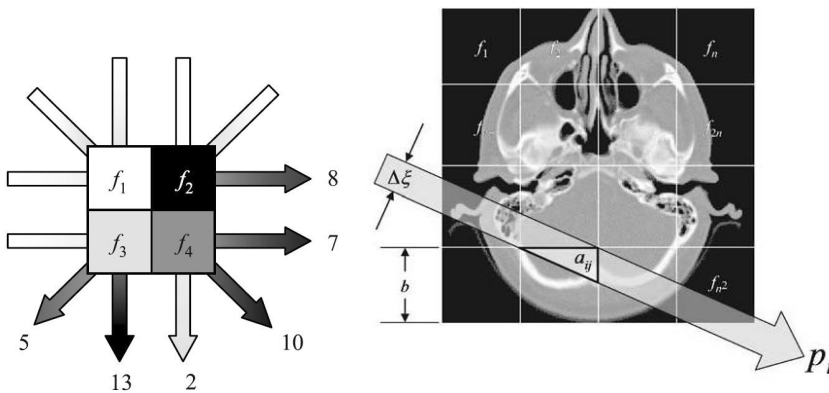


Figura 1.6: Tomografia discreta (D) e feixe de raio-X (E). Nas figuras,  $f_i = \mu_i$  e os valores  $p_i = g_i$  na notação texto.

Na Figura 1.6 os valores  $g_i$  representam as medições realizadas nos  $N$  detectores. Em outras palavras, os valores  $g_i$  são valores da Transformada de Radon, para cada um dos raios que atravessam o objeto a ser imageado. Na Figura 1.6, a imagem que está a direita traz alguns valores das medidas  $g_i$ , para uma quantidade de 6 detectores.

Fisicamente, cada feixe de raio-X possui uma espessura. Quando o feixe de raio-X passa pela região  $\Omega$ , temos que levar em conta quanto do pixel a ser reconstruído é afetado pelo feixe. Para este propósito, são introduzidos

<sup>8</sup>A Figura 1.6 foi retirada de [10].

pesos que refletem a relação entre a área iluminada pelo feixe de raio-X com relação a área total do pixel. A Figura 1.6 ilustra a situação.

Para um feixe de espessura  $\Delta\xi$ , o peso  $a_{ij}$  é determinado pela relação

$$a_{ij} = \frac{\text{área iluminada do pixel } j \text{ pelo raio } i}{\text{área total do pixel } j}. \quad (1.2.19)$$

Assim, para um conjunto de  $\mu_j$ ,  $j = \{1, \dots, N\}$ , densidades a serem determinadas e dado um conjunto de  $i = \{1, \dots, M\}$  raios-X medidos, com intensidade  $g_i$ , obtemos um sistema de  $M$  equações lineares com  $N$  coeficientes

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \mu_j = g_i \quad i = \{1, \dots, M\}. \quad (1.2.20)$$

Escrevendo na forma matricial, temos que:

$$\mathcal{M}(\mu)\mathbf{1} = g, \quad (1.2.21)$$

onde  $\mathcal{M} = (a_{ij})_{M \times N}$  pode ser considerada como a **caixa preta da máquina de tomografia** e  $\mathbf{1}$  é o vetor de mesma dimensão de  $\mathcal{M}$ , com todas as coordenadas iguais a 1.

Fazendo uma comparação direta entre (1.2.18) e (1.2.21) obtemos (para  $f = \mathbf{1}$ ):

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M} & \mu & = & g \\ \updownarrow & \updownarrow & = & \updownarrow \\ \mathcal{R} & \mu(\theta, s) & = & \int_{L(\theta, s)} \mu dl \end{array}$$

As das dificuldades de reconstrução no modelo discreto são:

- O sistema (1.2.21) possui solução exata somente com condições ideais. Para dados reais, a presença de ruído implica em obter apenas soluções aproximadas do sistema (1.2.21), mesmo quando  $M = N$ . No caso em que  $M > N$ , isto é, que temos mais informações (medidas) que o número de densidades a serem determinadas, possivelmente, obtemos reconstruções melhores da densidade.
- Tipicamente, a matriz  $\mathcal{M}$  é singular e, em geral, não-quadrada. Isto indica que o problema é mal-posto.
- $\mathcal{M}$  não possui uma estrutura simples. Assim, mesmo que  $\mathcal{M}$  seja não singular, é difícil determinar uma maneira de resolver o sistema (1.2.21) de forma eficaz e com pouco custo computacional.
- Nos problemas práticos, a dimensão de  $\mathcal{M}$  é muito grande, assim, métodos diretos de inversão são inapropriados, pois são computacionalmente muito intensos e custosos.

### 1.2.2 Tomografia por Emissão - SPECT e PET

A operacionalização das tomografias por emissão, que temos interesse nestas notas, basicamente consiste na injeção de um radio-isótopo (popularmente conhecido como contraste) no ser vivo (em geral, na circulação sanguínea). O marcador é quimicamente incorporado a uma molécula biologicamente ativa. Há um período de espera para que as moléculas se concentrem nos tecidos de interesse. O raio-isótopo sofre decaimento por emissão de pósitrons (um anti-elétron). Esta radiação se propaga através do meio. Parte desta radiação é absorvida neste processo. O que ultrapassa a fronteira do domínio é medida numa máquina de tomografia.

Da mesma forma que em Tomografia Computadorizada, o problema inverso em Tomografia por Emissão tem por objetivo reconstruir a densidade  $f$  do meio através das medições das radiações no exterior do domínio.

Exemplos de Tomografia por Emissão são SPECT (Single Photon Emission Computer Tomography) e PET (Positron Emission Tomography). A diferença entre estas tomografias está, essencialmente, ligada ao tipo de emissão. No processo de SPECT é emitido um único raio gama que é medido diretamente pela máquina de tomografia, enquanto em PET, o marcador emite um pósitron que se aniquila com um elétron a poucos milímetros da fonte de emissão, produzindo um par de raios gama a serem emitidos em direções opostas. O escaner em PET detecta a emissão "coincidente" de ambos os raios gama. Isto produz mais informações que o processo de SPECT. Por outro lado, os aparelhos de SPECT são muito mais baratos que os de PET.

#### Tomografia por Emissão de um Fóton Simples - SPECT

Para o modelo de SPECT, denotaremos por  $u(\mathbf{x}, \theta)$  a densidade do fóton irradiado e por  $f(\mathbf{x})$  a densidade da fonte de radiação dos fótons. Suponhamos que a absorção de fótons pelo meio (pelos tecidos do corpo humano no caso de aplicações médicas) sejam modeladas pelo coeficiente  $\mu(\mathbf{x})$ . O coeficiente  $\mu(\mathbf{x})$  pode ser obtido, por exemplo, através de um método de TC como na Subsecção 1.2.1. Assim, neste manuscrito, assumiremos que  $a(\mathbf{x})$  é conhecido.

A densidade  $u(\mathbf{x}, \theta)$  satisfaz a seguinte equação do transporte

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, \theta) + \mu(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \theta) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1, \quad (1.2.22)$$

onde  $\boldsymbol{\theta} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  determina a orientação, para  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Assumiremos que  $f(\mathbf{x})$  possui suporte compacto e que não existe fontes de radiação que venham do infinito, o que dá uma condição de fronteira para a EDP (1.2.22)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u(\mathbf{x} - s\boldsymbol{\theta}, \theta) = 0. \quad (1.2.23)$$

Definimos a seguinte simetriação

$$\mathcal{A}\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mu(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\theta}) - \mu(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\theta})] dt.$$

Disto segue que

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \mathcal{A}\mu(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}). \quad (1.2.24)$$

Assim,  $e^{\mathcal{A}\mu(\mathbf{x})}$  é um fator integrante para a EDP (1.2.22), no sentido que

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \left( e^{\mathcal{A}\mu(\mathbf{x})} u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \right) = e^{\mathcal{A}\mu(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}). \quad (1.2.25)$$

Portanto,

$$e^{\mathcal{A}\mu(\mathbf{x})} u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \int_0^\infty e^{\mathcal{A}\mu(\mathbf{x})} f(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) dt \quad (1.2.26)$$

é a única solução da EDP (1.2.22), [19].

Como  $\mathbf{x} = s\boldsymbol{\theta}^\perp + t\boldsymbol{\theta}$  e denotando  $\mathcal{A}\mu(s\boldsymbol{\theta}^\perp + t\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}\mu$  segue da equação (1.2.26) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathcal{A}\mu} u(s\boldsymbol{\theta}^\perp + t\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^\infty (e^{\mathcal{A}\mu} f)(s\boldsymbol{\theta}^\perp + t\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) dt. \quad (1.2.27)$$

Note que  $u(s\boldsymbol{\theta}^\perp + t\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})$  é a radiação fora do domínio e, portanto, mensurável. Ainda,  $e^{\mathcal{A}\mu}$  envolve o coeficiente de atenuação  $\mu(s\boldsymbol{\theta}^\perp + t\boldsymbol{\theta})$  que assumimos conhecido. Assim, o lado esquerdo da equação (1.2.27) é conhecido.

O **problema inverso** no modelo de SPECT é recuperar  $f$  no lado direito da equação (1.2.27).

Definimos a **Transformada de Radon Atenuada**

$$\mathcal{M}(\mu)f := (\mathcal{R}_\mu f)(\boldsymbol{\theta}, s) = \int_{-\infty}^\infty (e^{\mathcal{A}\mu} f)(s\boldsymbol{\theta}^\perp + t\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) dt, \quad (1.2.28)$$

onde  $\mathcal{R}$  é a Transformada de Radon definida em (1.2.18).

**Observação 1.3.** *Note que, se  $\mu(\mathbf{x}) = 0$ , a equação (1.2.28) é a Transformada de Radon de  $f(\mathbf{x})$ , como definido em (1.2.18). Se  $\mu(\mathbf{x})$  é constante, os mesmos argumentos para obter uma fórmula de inversão são bem conhecidos [4].*

Existem duas técnicas independentes para a obtenção de uma fórmula de inversão da Transformada de Radon (1.2.28). Estas são o método de funções  $A$ -analíticas, [4], e o método baseado na extensão da equação do transporte no plano complexo e na solução do problema de Riemann-Hilbert [4]. No Capítulo 4 apresentaremos a última das técnicas.

## Tomografia por Emissão de Pósitrons - PET

Na Tomografia de Emissão de Pósitrons (PET) a fonte de radiação emite partículas em direções opostas que são medidas em detectores opostos. Essa é a principal diferença entre PET e SPECT. Assim, a PET é modelada pela

equação do transporte (1.2.22) com condições do fronteira dadas por (1.2.23), com o limite sendo tomado em  $\pm\infty$ .

Portanto, a obtenção de um modelo matemático para PET segue os mesmos passos apresentados para SPECT, onde deve ser usado a simetriação

$$\tilde{\mathcal{A}}\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\mu(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\theta}) - \mu(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\theta})] dt,$$

ao invés de  $\mathcal{A}$ . Os detalhes são deixados para o leitor (consulte [39]).

O **problema inverso** no modelo de PET é recuperar  $f$  no lado direito da equação (1.2.27) onde  $\mathcal{A}\mu(\mathbf{x})$  deve ser substituído por  $\tilde{\mathcal{A}}\mu(\mathbf{x})$ .

Como já dissemos, em PET as fontes ejetam um par de partículas em direções opostas. Nesse processo, as medidas só são realizadas quando ambas as partículas chegam ao mesmo tempo nos detectores em lados opostos. Assim, muita informação contida no processo de PET é perdida, ou ainda, não é levada em consideração. Devido ao pequeno número de eventos mensurados os processos de PET podem e devem, por natureza, ser considerados estocásticos. Deste modo, recentemente, muitos modelos estocásticos tem sido usados em tomografias por emissão em substituição aos métodos que usam transformadas integrais como a Transformada de Radon. Tais métodos são puramente discretos. Para mais detalhes veja [38, 39].

### 1.2.3 Tomografia por Difração

Tomografias por Difração são baseadas em ondas acústicas ou microondas. Estas ondas são caracterizadas por ter um comprimento de onda suficientemente pequeno de forma que possa capturar as formas de interesse dos objetos, mas também grande o suficiente tal que o limite das grandes frequências ópticas (onde ondas são substituídas por partículas) não são válidas. Exemplos de tais tomografias são ultrassom e tomografias por microondas. Estas ondas não seguem ao longo de raios e dependem da estrutura interna dos objetos a serem imageados.

Na tomografia por difração o modelo é caracterizado por problemas de espalhamento inverso para a equação da onda. Este problema é extremamente não-linear. No entanto, nestas notas utilizaremos métodos de aproximação para a obtenção de soluções o que torna o problema mais simples. Tais aproximações são conhecidas como aproximações de Born ou de Rytov.

#### Formulação do Problema

Considere a equação da onda

$$\frac{1}{v(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1.2.29)$$

para  $n = 2, 3$  e com condições iniciais e de contorno apropriadas. As condições iniciais e de contorno serão enunciadas mais tarde. Em (1.2.29),  $v(\mathbf{x})$  é



a velocidade que é desconhecida. Neste manuscrito, por simplicidade, assumiremos que  $v(\mathbf{x}) = c$  fora do objeto a ser imageado, onde  $c$  é uma constante positiva. Ainda, assumiremos que  $U = 0$  para  $t < 0$ .

Passando para o domínio da frequência, ou seja, definindo

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\mathbb{R}} U(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt, \quad (1.2.30)$$

como a Transformada de Fourier no tempo de  $U$ , temos que  $u$  satisfaz a seguinte equação de Helmholtz

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{v(\mathbf{x})^2} \right) u(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (1.2.31)$$

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, \omega) - i \frac{\omega}{c} u(\mathbf{x}, \omega) = o\left(|\mathbf{x}|^{-(n-1)/2}\right).$$

A segunda equação em (1.2.31) é a condição de radiação. Esta condição garante que não existe energia vindo do infinito (existe somente ondas de radiação viajando para o infinito). A notação  $o(t)$  significa que  $o(t)/t \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Deste modo, temos de (1.2.31) que o decaimento é maior que  $|\mathbf{x}|^{-1/2}$  em dimensão dois e maior que  $|\mathbf{x}|^{-1}$  em dimensão três.

Para simplificar o problema faremos a seguinte hipótese sobre  $v$  na equação (1.2.31)

$$\frac{1}{v^2(\mathbf{x})} = \frac{1}{c^2}(1 + \mu(\mathbf{x})), \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (1.2.32)$$

Substituindo na equação de Helmholtz temos

$$(\Delta + k^2) u(\mathbf{x}, \omega) = -\mu(\mathbf{x})k^2 u(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (1.2.33)$$

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, \omega) - ik u(\mathbf{x}, \omega) = o\left(|\mathbf{x}|^{-(n-1)/2}\right).$$

Considere a onda plana

$$u_{in}(\mathbf{x}, \omega; \boldsymbol{\theta}) = e^{ik\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{n-1}. \quad (1.2.34)$$

Notemos que  $u_{in}$  satisfaz a equação de Helmholtz homogênea

$$(\Delta + k^2) u_{in}(\mathbf{x}, \omega; \boldsymbol{\theta}) = 0. \quad (1.2.35)$$

No entanto, é fácil ver que  $u_{in}$  em (1.2.34) não satisfaz a condição de radiação na equação (1.2.33). Na verdade,  $u_{in}$  satisfaz a condição de radiação na direção  $\boldsymbol{\theta}$  mas não na direção  $-\boldsymbol{\theta}$ .

O **problema direto** consiste em: dada a onda plana vinda do infinito, encontrar a solução  $u_s(\mathbf{x}, \omega)$  que modela a resposta do sistema. Assim,  $u_s$  não deve carregar informação do infinito e, portanto, deve satisfazer a condição de radiação na equação (1.2.33), que é ilustrada na Figura 1.7.

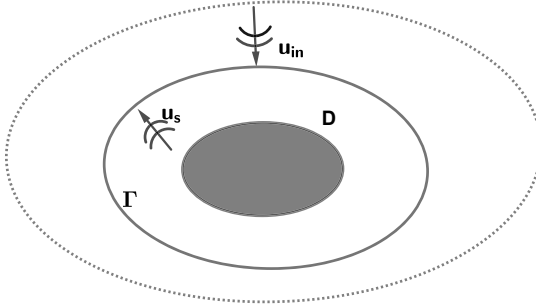


Figura 1.7: Ilustração de Tomografia por Difração.

O campo total  $u = u_{in} + u_s$  deve satisfazer a equação de Helmholtz como no modelo físico. Em outras palavras, queremos resolver o seguinte problema de espalhamento

$$\begin{aligned}
 (\Delta + k^2) u_s(\mathbf{x}, \omega) &= -\mu(\mathbf{x})k^2(u_s + u_{in})(\mathbf{x}, \omega) & (1.2.36) \\
 \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u_s(\mathbf{x}, \omega) - ik u_s(\mathbf{x}, \omega) &= o\left(|\mathbf{x}|^{-(n-1)/2}\right).
 \end{aligned}$$

Sob hipóteses adequadas sobre  $\mu(x)$ , a equação (1.2.36) possui uma única solução, [19].

O **problema inverso** consiste em reconstruir  $\mu(x)$  por meio de medidas de  $u_s$  no infinito e em todas as possíveis direções  $x$  e para todas as possíveis ondas  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ . O problema inverso é também conhecido como *problema de espalhamento inverso*. Trataremos da chamada aproximação de Born como um método para obter soluções aproximadas deste problema inverso no Capítulo 5.

### 1.2.4 Tomografia por Fluorescência Óptica

Tomografia óptica é uma forma obtenção de imagens de um objeto a partir de luz transmitida e espalhada através de um objeto. Partículas fluorescentes são injetados em um corpo e emitem (perto de infra-vermelhos) luz sob certas condições. A luz emitida é medida na fronteira do domínio.

O modelo de tomografia por fluorescência óptica que estudaremos trata-se de um modelo simplificado, no qual vamos supor que a propagação do fóton é bidimensional. Assim, o **problema direto** no modelo de tomografia de fluorescência óptica é obter  $u(\mathbf{x}, \theta)$  solução da equação de transporte

bidimensional

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, \theta) + \mu(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \theta) = Ku(\mathbf{x}, \theta) + f(\mathbf{x}), \quad (1.2.37)$$

com fonte dependendo do coeficiente de espalhamento  $\sigma_s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp) = \sigma_s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')$  e condição de fronteira dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\theta}, \theta) = 0, \quad (1.2.38)$$

onde  $\mu(\mathbf{x})$  e  $f(\mathbf{x})$  são conhecidos e

$$Ku(\mathbf{x}, \theta) = \int_{\mathbb{S}^1} \sigma_s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp, \theta') u(\mathbf{x}, \theta') d\theta', \quad (1.2.39)$$

é o operador de espalhamento.

O que é medido no modelo de tomografia por fluorescência óptica é a quantidade

$$g(\theta, s) = \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-A\mu} u](s\boldsymbol{\theta}^\perp + t\boldsymbol{\theta}). \quad (1.2.40)$$

O **problema inverso** no modelo de tomografia por fluorescência óptica é reconstruir a densidade  $f(\mathbf{x})$  de partículas fluorescentes a partir das medidas como em (1.2.40). Como as aplicações de moléculas fluorescentes em humanos ainda são limitadas, a maior parte do trabalho em tomografia de fluorescência tem sido no campo da pesquisa pré-clínica do câncer, ou ainda aplicação na indústria como um sensor de espessura e da estrutura interna de semicondutores.

Obteremos uma fórmula de inversão para o modelo de tomografia por fluorescência óptica no Capítulo 6.

### 1.2.5 Tomografia por Impedância Elétrica - EIT

A *tomografia por impedância elétrica - EIT* é um método de reconstruir propriedades da condutividade elétrica de algum objeto condutor, sabendo-se o valor de algumas medidas elétricas tomadas sobre a fronteira desse objeto. Do ponto de vista de aplicações, objetos diferentes imersos em uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , possuem condutividades elétricas diferentes (tecidos afetados por tumores são, em geral, mais densos que tecidos normais do corpo humano) e, assim, absorvem mais corrente que outras partes.

#### Formulação Física do modelo de EIT

Fisicamente, este modelo é descrito pelo sistema de equações de Maxwell para ondas eletromagnéticas de frequência  $\omega$ , dadas por

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -i\omega\gamma \vec{H} \\ \text{rot} \vec{H} &= (\mu + i\omega\varepsilon) \vec{E}, \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

onde  $\vec{E}, \vec{H}$  são campos de vetores elétricos e magnéticos,  $\mu, \varepsilon$  e  $\gamma$  são a condutividade, a permissibilidade elétrica e a permissibilidade magnética do meio, respectivamente.

No corpo humano, a permissibilidade magnética  $\gamma$  é muito pequena e pode ser considerada nula. Assim, obtemos de (1.2.41) que

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (1.2.42)$$

Usando os exercícios 7.1 e 7.2 substituídos na equação (1.2.41), temos que a condutividade satisfaz o problema de Dirichlet

$$\nabla \cdot ((\mu + i\omega\varepsilon)\nabla u) = 0, \quad \text{em } \Omega \quad (1.2.43)$$

com condições de Dirichlet<sup>9</sup> no bordo dado por

$$u|_{\partial\Omega} = f, \quad \text{na } \partial\Omega. \quad (1.2.44)$$

### O Problema Direto e Inverso em EIT

O **problema direto** consiste em: dado  $\Omega$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^N$ , que possui materiais com condutividade elétrica  $a(x) := (\mu(x) + i\omega(x)\varepsilon)$  tal que  $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$ , com fronteira  $\partial\Omega \in C^1$  por partes, solucionar o *problema de Dirichlet*, i.e., encontrar a solução  $u$  do problema (1.2.43)-(1.2.44).

Para o problema direto temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.2.** *Suponha que  $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  e que a condutividade  $\mu(x) > \mu_0$ . Então existe uma única função  $u \in H^1(\Omega)$  solução do problema (1.2.43)-(1.2.44).*

Demonstração: A demonstração usa técnicas de equações diferenciais parciais elípticas. Em especial de um teorema conhecido como Teorema de Lax-Milgram. Os detalhes podem ser encontrados em [19]. ■

Em muitos problemas importantes  $\varepsilon$  pode ser considerado nulo e assim, o problema se reduz a determinar o coeficiente real  $\mu(x)$ . Por isso, tal problema recebe o nome de condutividade inversa. Assumiremos que  $\mu(x)$  é constante nas proximidades da  $\partial\Omega$ .

O **problema inverso** é: reconstituir a condutividade elétrica  $\mu(x)$ , usando o conjunto de valores da voltagem  $f$  (dados de Dirichlet) aplicada à fronteira de  $\Omega$  e os correspondentes valores da corrente  $g := \mu \frac{\partial u}{\partial \eta}$  medidos na  $\partial\Omega$  (dados de Neumann).

Uma observação importante, do ponto de vista prático e também matemático da aplicabilidade do processo de EIT é que tecidos diferentes do corpo humano possuem condutividade diferente e, em geral, constantes. Por exemplo, a condutividade de músculos, pulmões, ossos e sangue são respectivamente, 8.0, 1.0, 0.06 e 6.7. Assim, o processo de determinar a condutividade

<sup>9</sup>Fisicamente, as condições de bordo do tipo Dirichlet representam voltagem, enquanto as condições do tipo Neumann representam corrente.

de uma região é equivalente a determinar a forma desta região. Matematicamente, isto pode ser descrito como determinar a função característica do conjunto que representa esta região. Métodos de regularização para tais problemas receberam atenção substancial nos últimos anos com o nome de Métodos Level Sets. Detalhes podem ser encontrados na dissertação [12].

O operador que aplica dados de Dirichlet e retorna dados de Neumann é dito de operador Dirichlet-para-Neumann (DpN) e será denotado por  $\Lambda_\mu$ . Isto é:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mu) &:= \Lambda_\mu : H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Omega) \\ f &\longmapsto \mathcal{M}(\mu)f := \Lambda_\mu(f) := g = \mu \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (1.2.45)$$

O operador que aplica dados de Neumann e retorna dados de Dirichlet é dito Neumann-para-Dirichlet (NpD). Em um certo sentido, um é o inverso do outro. Detalhes podem ser encontrados em [26].

Na prática, é impossível medir os dados sobre toda a fronteira de  $\Omega$ . Assim, o problema de reconstrução deve ser encarado com o conhecimento de uma quantidade limitada de dados, obtida por medidas sob a fronteira de  $\Omega$ . A figura<sup>10</sup> 1.8 mostra um exemplo real de tomografia por EIT

No Capítulo 7, responderemos as seguintes perguntas:

1. Quantos dados necessitamos conhecer, i.e., se o parâmetro  $\mu$  em (1.2.43) é unicamente determinado pelo conhecimento de alguns pares de dados  $(f, \Lambda_\mu(f) = g)$  sobre a fronteira ou pelo operador (DpN)?
2. O problema inverso é mal posto no sentido de Hadamard?

A resposta destas perguntas possuem resultados interessantes tanto do ponto de vista matemático, como do ponto de vista de aplicações.

### 1.3 Alguns Fatos Históricos

Um dos primeiros relatos do que entendemos agora por problemas inversos surgiu a cerca de dois milênios atrás de uma fonte nada provável. No livro VII do diálogo “*República*”, Platão (427 – 347 a.c.) propôs o filosófico problema de reconstruir a “realidade” através da observação da imagem de objetos, cujas sombras eram projetadas na penumbra de uma caverna. Com a ideia de discutir aspectos filosóficos das fontes de conhecimento humano, Platão, também acabou introduzindo o primeiro exemplo de problemas inversos que se tem relatos, [40].

Um dos primeiros problemas inversos na ciência aplicada foi proposto por Eratóstenes (284-202 a.c.). O problema consistia em determinar o diâmetro da terra através de medições feitas em duas cidades distintas. Para tal,

---

<sup>10</sup>Figuras retiradas de Wikipedia

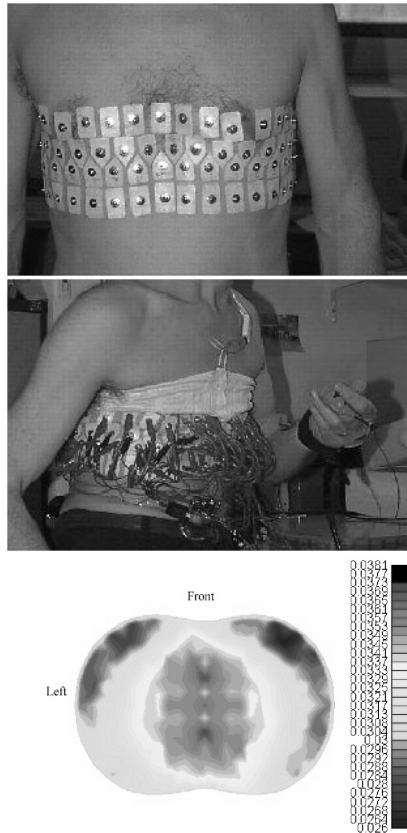


Figura 1.8: Protótipo e dados obtidos para tomografia por EIT.

eram conhecidas a distância entre as cidades, as suas latitudes e o ângulo que a sombra de um marco vertical (em cada uma destas cidades) fazia com a direção do sol, [23]. O problema inverso de determinar a órbita de um cometa a partir de dados de sua órbita anterior foi estudada por Gauss em 1800. Ele fez uso do método dos mínimos quadrados para reconstruir a órbita do cometa.

A área dos problemas inversos foi introduzida pelo físico Soviético-Armênio, Viktor Ambartsumian [2]. Estudando a relação entre níveis atômicos de energia e propriedades da equação de Helmholtz, Ambartsumian formulou a seguinte pergunta: dada uma família de autovalores, é possível encontrar a família de autovetores correspondentes? Na verdade, Ambartsumian estava estudando o que veio a se chamar de problema inverso de Sturm-Liouville, [29, 17]. O trabalho de Ambartsumian foi descoberto por matemáticos su-

ecos que deram o ponta-pé inicial para a pesquisa científica em problemas inversos, [2].

### **TC:**

Desde o descobrimento do raio-X em 1895 por Wilhelm Conrad Röntgen, muitos estudos foram feitos para entender propriedades particulares deste tipo de radiação, sua interação e interferência ao atravessar objetos. Destes estudos, novos procedimentos físicos, químicos e matemáticos foram desenvolvidos e uma quantidade significativa de respostas foram obtidas. No entanto, alguns pontos ainda permaneceram em aberto na tentativa de entender o fenômeno por completo. Estes pontos ainda são alvos de estudos de pesquisadores.

No início do século de 1900, o raidologista Italiano Alessandro Vallebona propôs um método para representar uma fatia simples de um objeto em um filme radiográfico. Este método ficou conhecido como Tomografia.

A solução matemática do *problema inverso* associado a Tomografia Computadorizada foi publicada pelo matemático Johann Radon em 1917, [41]. Dada a sua complexidade técnica e tendo em vista que a publicação foi em Alemão, os resultados só foram reconhecidos na metade do século XX.

Em 1961, a solução deste problema foi aplicado pela primeira vez para uma sequência de projeções de raios-X de um objeto medido por diferentes direções. Allen MacLeod Cormack (1924 - 1998) e Sir Godfrey Hounsfield (1919 - 2004) foram os pioneiros em aplicações médicas da Tomografia computadorizada. Em 1979 receberam o Prêmio Nobel de Medicina pelos trabalhos na área.

A primeira máquina de tomografia foi construída no *THORN EMI Central Research Laboratories* em 1972, na Inglaterra. Esta foi construída por Godfrey Newbold Hounsfield. Há rumores não confirmados de que uma grande parte da pesquisa foi suportada graças à contribuição da banda The Beatles, sendo considerada um dos seus maiores legados, a par com a sua música, [35]. Um apanhado histórico muito interessante sobre a evolução do processo de Tomografia Computadorizada pode ser encontrado em [38, 39] e referências.

### **SPECT**

O desenvolvimento de tomografias como SPECT e PET só foram possíveis depois do desenvolvimento de tomografias que envolviam raio-X (como TC). Um apanhado histórico interessante deste desenvolvimento pode ser encontrado em [25].

### **EIT**

Como aplicações em imagens, a EIT é atribuída a John G. Webster em 1978. No entanto, o primeiro sistema prático a obter imagens por EIT deve-se ao trabalho de David C. Barber and Brian H. Brown em 1984 [5]. Do ponto de vista matemático, o primeiro trabalho nessa área deve-se a Alberto Calderón publicado em 1980 no jornal da Sociedade Brasileira de Matemática sob o título *On an inverse boundary value problem* [11]. Este trabalho motivou o desenvolvimento desta área específica dos problemas inversos. Normalmente

o problema inverso em EIT é chamado de *Problema de Calderón* nos livros e artigos da área [26].

Nos últimos anos, os problemas inversos têm conquistado uma grande quantidade de pesquisadores adeptos. Esta área de pesquisa trata de problemas como os formulados por Platão, Eratóstenes, Ambartsumian, entre outros, e que estão presentes em todos os processos de tomografias, cuja abordagem exige o desenvolvimento de métodos matemáticos. O súbito crescimento é devido, certamente, ao grande número de aplicações nas outras ciências. Por exemplo, problemas inversos aparecem naturalmente na geofísica, nas explorações sísmicas para detecção de depósito de petróleo [32, 47], nas ciências médicas e tomografias com ênfase na reconstrução de imagens e diagnósticos não-invasivos, ultrassonografia [38, 39], na engenharia com testes não-destrutivos em componentes de semi-condutores e nanotecnologia, [9, 17, 8]. Além da relevância das aplicações, a formulação e solução de tais problemas envolvem o conhecimento de vários campos da matemática, das ciências aplicadas e o envolvimento de profissionais dessas áreas.

## 1.4 Exercícios

**Exercício 1.2.** Com base na figura 1.6 determine a matriz  $\mathcal{M}$  associada. Para o vetor de intensidades  $g$ , determine uma solução  $f$  para o sistema (1.2.21), onde  $\mathcal{M}$  é a matriz obtida analisando a Figura 1.6.

**Exercício 1.3.** Com base no exercício acima, compare a solução

$$f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$$

e a Figura 1.6. O que você tem a dizer?

**Exercício 1.4.** Use o método das características para mostrar que existe uma única solução para a EDP (1.2.22) com condição de fronteira (1.2.23).

**Exercício 1.5.** Verifique a equação (1.2.24).

**Exercício 1.6.** Mostre que  $e^{-\mathcal{A}\mu(\mathbf{x})}$  é um fator integrante para a EDP (1.2.23), no sentido que satisfaz (1.2.25).

**Exercício 1.7.** Mostre que a equação (1.2.30) satisfaz a equação de Helmholtz dada por (1.2.31).

**Exercício 1.8.** Mostre que a mudança de variável (1.2.32) satisfaz a equação (1.2.33).

**Exercício 1.9.** Mostre que  $u_{in}$  satisfaz a equação de Helmholtz (1.2.33), mas não satisfaz a condição de radiação.

**Exercício 1.10.** Use (1.2.35) para verificar que  $u = u_{in} + u_s$  satisfaz a equação (1.2.36).





## Capítulo 2

# Fundamentação Teórica e Resultados Complementares

Neste capítulo, apresentaremos algumas ferramentas que serão amplamente utilizadas nestas notas para estabelecer os resultados de identificabilidade e estabilidade dos problemas inversos em tomografias, bem como para estabelecer a teoria de regularização para problemas inversos.

### 2.1 Transformada de Fourier

Nesta seção veremos alguns fatos importantes da Transformada de Fourier e a relação desta importante ferramenta com os problemas inversos. Para que este manuscrito seja o mais autocontido, iniciaremos esta seção introduzindo alguns espaços de funções fundamentais para o entendimento do que segue.

Uma função mensurável a valores reais  $f$  é dita pertencer a  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , com  $1 \leq p < \infty$  se

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty. \quad (2.1.1)$$

Neste caso, (2.1.1) define a norma no espaço de funções  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , [19].

Em particular, o espaço  $L^2(\mathbb{R}^n)$  é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx. \quad (2.1.2)$$

Para as funções  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , definimos a **Transformada de Fourier de  $f$**  por

$$\hat{f}(k) = (\mathcal{F}f)(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} f(x) dx, \quad (2.1.3)$$

cujas **inversa** é dada por

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \quad (2.1.4)$$

**Teorema 2.1.** *A Transformada de Fourier  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  é uma isometria.*

Demonstração: É fácil ver que a Transformada de Fourier e sua inversa são operadores lineares. A identidade de Parseval, [19], implica que

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = (2\pi)^n \langle f, g \rangle, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (2.1.5)$$

De (2.1.5) segue que

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{n/2} \|f\|_{L^2},$$

o que conclui a demonstração. ■

O teorema abaixo diz que os problemas inversos que têm na sua formulação a dependência da Transformada de Fourier são bem-postos no sentido de Hadamard.

**Teorema 2.2.** *A Transformada de Fourier  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  é um operador bem posto.*

Demonstração: **Existência e unicidade:** Seguem diretamente do Teorema 2.1 que garante que a Transformada de Fourier é uma isometria.

**Estabilidade:** Sejam  $f, f^\delta \in L^2(\mathbb{R}^n)$  tais que  $\widehat{f^\delta}(k) = \hat{f}(k) + \hat{g}(k)$  com  $\|\hat{g}\|_{L^2} \leq (2\pi)^{n/2} \delta$ . Da identidade de Parseval (2.1.5) e da linearidade da Transformada de Fourier segue que

$$\|f - f^\delta\|_{L^2} = \|\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} - \widehat{f^\delta})\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2} \|\hat{g}\|_{L^2} \leq \delta. \quad \blacksquare$$

## 2.2 Completitude do Produto de Funções Harmônicas

Nesta seção estudaremos a densidade de alguns subespaços de funções de  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ . Um dos motivos de estudar tais propriedades é que elas tem um papel essencial na demonstração de unicidade para o problema de EIT na Seção 1.2.5.

Nesta seção, nosso objetivo é provar que o conjunto

$$\{u_1 \cdot u_2 : \Delta u_1 = 0 = \Delta u_2\}, \quad (2.2.6)$$

onde  $\Delta$  é o operador Laplaciano, é denso em  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ . Para tal temos que provar alguns lemas auxiliares.

**Lema 2.1.** *Defina a função*

$$u(x) = e^{ix \star \xi}, \quad \text{para algum } \xi \in \mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, \quad (2.2.7)$$

onde o produto  $x \star y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$  (Note que  $\cdot \star \cdot$  **não** é o produto interno canônico de  $\mathbb{C}^n$ , que é definido por  $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$ ). Então,

$$\Delta u = 0 \iff \xi \star \xi = 0. \quad (2.2.8)$$

Demonstração: Note que

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = - \sum_{k=1}^n (\xi_k)^2 e^{ix \star \xi}.$$

Como  $|e^{ix \star \xi}|$  nunca se anula, a afirmação está provada. ■

**Lema 2.2.** *Para qualquer  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , existem  $\xi^1, \xi^2 \in \mathbb{C}^n$  tais que:*

$$\xi^1 + \xi^2 = \eta, \quad \xi^j \star \xi^j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.2.9)$$

Se  $n \geq 3$ , então para qualquer  $C > 0$ , existem  $\xi^1, \xi^2 \in \mathbb{C}^n$  satisfazendo (2.2.9) e ainda

$$\|Im(\xi^j)\|_{\mathbb{R}^n} \geq C, \quad j = 1, 2. \quad (2.2.10)$$

Demonstração: Considere o seguinte Ansatz

$$\xi^1 = \alpha + i\beta, \quad \xi^2 = \eta - \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n.$$

É fácil ver que este Ansatz satisfaz a primeira parte de (2.2.9). Para verificar a segunda parte, note que é equivalente a provar que

$$\begin{aligned} 0 &= Re(\xi^1 \star x^1) = \|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \|\beta\|_{\mathbb{R}^n}^2, & 0 &= Im(\xi^1 \star x^1) = \alpha \cdot \beta. \\ 0 &= Re(\xi^2 \star x^2) = \|\eta - \alpha\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \|\beta\|_{\mathbb{R}^n}^2, & 0 &= Im(\xi^2 \star x^2) = (\eta - \alpha) \cdot \beta. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

**Caso  $\eta = 0$ :** Basta tomar  $\alpha = (C, 0, \dots, 0)^T$  e  $\beta = (0, C, \dots, 0)^T$ . (note que o requerimento adicional neste caso especial também é verificado para  $n = 2$ .)

**Caso  $\eta \neq 0$ :** Defina  $\rho_1 = \frac{1}{\|\eta\|_{\mathbb{C}^n}} \eta$ . Por processo de Gram-Schmidt, construa a base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$ . Portanto podemos escrever  $\alpha$  e  $\beta$  em tal base, como

$$\alpha = \alpha_1 \frac{1}{\|\eta\|_{\mathbb{C}^n}} \eta + \sum_{k=2}^n \alpha_k \rho_k, \quad \beta = \beta_1 \frac{1}{\|\eta\|_{\mathbb{C}^n}} \eta + \sum_{k=2}^n \beta_k \rho_k.$$

Como normas e produtos internos são invariantes por transformações ortogonais, temos que (2.2.11) se escreve como

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^n \beta_k^2, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k = 0, \quad (2.2.12)$$

$$(\|\eta\| - \alpha_1)^2 + \sum_{k=k}^n \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^n \beta_k^2, \quad (\|\eta\| - \alpha_1)\beta_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k \beta_k = 0,$$

Para o caso de  $n = 2$ , tome  $\alpha_1 = \beta_2 = \|\eta\|/2$  e  $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ . Com esta escolha é fácil ver que os requisitos do lema são satisfeitos.

Para o caso  $n \geq 3$ , podemos usar os graus de liberdade para obter os requisitos adicionais do lema. Defina  $\alpha_1 = \|\eta\|/2$ ,  $\alpha_3 = C$ ,  $\alpha_j = 0$  para  $j \in \{2, 4, \dots, n\}$ ,  $\beta_2 = \sqrt{C^2 + (\|\eta\|/2)^2}$  e  $\beta_j = 0$  para  $j \neq 2$ . ■

**Teorema 2.3.** *Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado do  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Então o conjunto de funções que satisfaz (2.2.6) é denso em  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ .*

Demonstração: Suponha que (2.2.6) não é denso em  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ . Então, pelo Teorema de Hahn-Banach [30], existe uma função ortonormal  $f \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$  que é ortogonal ao conjunto (2.2.6). Em outras palavras

$$\int_{\Omega} f \overline{u^1 u^2} dx = 0, \quad \forall u^1, u^2 \text{ satisfazendo (2.2.6)}. \quad (2.2.13)$$

Seja  $\eta \in \mathbb{R}^n$  arbitrário e fixo. Escolha  $\xi^1, \xi^2$  como no Lema 2.2, tal que (2.2.9) seja satisfeita. Pelo Lema 2.1 temos que  $w^j(x) = e^{ix \star \xi^j}$  para  $j = 1, 2$  são harmônicas. Substituindo na equação 2.2.13 temos que

$$0 = \int_{\Omega} f(x) \overline{e^{ix \star \xi^1} e^{ix \star \xi^2}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\Omega} f(x) e^{-ix \cdot \eta} dx. \quad (2.2.14)$$

Como  $\eta$  é arbitrário, temos que  $\hat{f} = 0$  (onde estendemos  $f$  igual a zero fora de  $\Omega$ ). Portanto, pela injetividade de Transformada de Fourier,  $f = 0$ . Uma Contradição. ■

## 2.3 Completitude do Produto de Soluções Quase-exponenciais

Nesta seção, apresentaremos um resultado de densidade modificado com relação a Seção 2.2, no sentido que o operador de Laplace será substituído pelo operador de Helmholtz. Uma segunda modificação é que as funções exponenciais definidas no Lemma 2.1 serão substituídas por função quase exponenciais da forma

$$v(x) = e^{ix \star \xi} (1 + w(x)), \quad w \text{ pequeno e } \xi \star \xi = 0. \quad (2.3.15)$$

Note que,

$$\begin{aligned} \Delta v(x) + b(x)v(x) &= -\xi \star \xi e^{ix \star \xi} (1 + w(x)) + 2i\xi \cdot \nabla w(x) e^{ix \star \xi} + \\ &\quad + \Delta w e^{ix \star \xi} + b(x) e^{ix \star \xi} (1 + w(x)) \\ &= e^{ix \star \xi} (\Delta w(x) + 2i\xi \cdot \nabla w(x) + b(x)(1 + w(x))). \end{aligned}$$

Portanto,  $v$  é uma solução da equação de Helmholtz se e só se

$$(\Delta w(x) + 2i\xi \cdot \nabla w(x) + b(x)(1 + w(x))) = 0. \quad (2.3.16)$$

O próximo resultado é análogo ao Lemma (2.2).

**Lema 2.3.** *Sejam  $b^1, b^2 \in L^\infty(\Omega)$  e  $C \geq 2 \max_{j=1,2} \|b^j\|_{L^\infty(\Omega)}$ , onde  $C$  é a mesma constante do Lema 2.2. Então, para qualquer  $\eta \in \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ), existem soluções  $v_C^j$  da forma (2.3.15) da equação de Helmholtz  $\Delta v + b^j v = 0$  que satisfaz*

$$\begin{aligned} \xi_C^1 + \xi_C^2 &= \eta, \quad \xi_C^j \star \xi_C^j = 0, \quad \|\xi_C^j\| \geq C, \\ \|w_C^j\|_{L^2(\Omega)} &\longrightarrow 0, \quad \text{para } C \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Demonstração: Seja  $C$  a constante fixa, satisfazendo as hipóteses do Lema. A partir de agora vamos omitir o índice  $C$  na demonstração. Pelo Lema 2.2, existem  $\xi^j$  satisfazendo os requisitos do Lema. Para  $j = 1, 2$  defina os operadores diferenciais com coeficientes constantes

$$A^j = \Delta + 2i\xi^j \star \nabla.$$

Então, defina

$$P^j(\zeta) = -\zeta \star \zeta + 2i\xi^j \star \zeta,$$

e

$$(\psi^j(\zeta))^2 = \underbrace{|-\zeta \star \zeta + 2\xi^j \star \zeta|^2}_{|\alpha|=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^n |-2\zeta_k + 2\xi_k^j|^2}_{|\alpha|=1} + \underbrace{4n}_{|\alpha|=2}.$$

Assim, para  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (\psi^j(x))^2 &= \sum_{k=1}^n \underbrace{\left( (-x_k^2 + \operatorname{Re}(\xi_k^j)x_k)^2 + (\operatorname{Im}(\xi_k^j)x_k)^2 \right)}_{|\alpha|=0} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left( (-2x_k + 2\operatorname{Re}(\xi_k^j))^2 + (\operatorname{Im}(\xi_k^j))^2 \right)}_{|\alpha|=1} + \underbrace{4n}_{|\alpha|=2} \geq |\operatorname{Im}(\xi^j)|^2 \geq C. \end{aligned}$$

Segue do Teorema 2.3 que existem soluções fundamentais  $E^j$  para os respectivos operadores  $A^j$  tais que

$$(\Delta + 2i\xi^j \star \nabla)E^j f = f,$$

e

$$\|E^j f\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{R} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Defina a seguinte operação de ponto fixo

$$w^j = -E^j(b^j(1 + w^j)). \quad (2.3.17)$$

**Afirmção:** Todo ponto fixo de (2.3.17) em  $L^2(\Omega)$  é uma solução da equação de Helmholtz  $\Delta v + b^j v = 0$ .

De fato,

$$\Delta w^j + 2i\xi^j \star \nabla w^j = -(\Delta + 2i\xi^j \star \nabla)E^j(b^j(1 + w^j)) = -(b^j(1 + w^j)).$$

Defina os operadores

$$T^j : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega), \quad T^j : w \longmapsto -E^j(b^j(1 + w^j)). \quad (2.3.18)$$

Note que  $T^j$  está bem definido e é uma contração em

$$K := \bigcup_{j \in \{1,2\}} \{w \in L^2(\Omega) : \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq 2C^{-1}C_0 \|b^j\|_{L^\infty(\Omega)} \sqrt{|\Omega|}\}. \quad (2.3.19)$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \|T^j w\|_{L^2(\Omega)} &= \|E^j(b^j(1 + w))\|_{L^2(\Omega)} \leq C^{-1}C_0 \|b^j(1 + w)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C^{-1}C_0 \|b^j\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \sqrt{|\Omega|} + \|w\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq 2C^{-1}C_0 \|b^j\|_{L^\infty(\Omega)} \sqrt{|\Omega|}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|T^j w - T^j \tilde{w}\|_{L^2(\Omega)} &= \|E^j(b^j(w - \tilde{w}))\|_{L^2(\Omega)} \leq C^{-1}C_0 \|b^j(w - \tilde{w})\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C^{-1}C_0 \|b^j\|_{L^\infty(\Omega)} \|w - \tilde{w}\|_{L^2(\Omega)} \leq 2^{-1} \|w - \tilde{w}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Ponto Fixo de Banach existe  $w^j$  ponto fixo de (2.3.17). Pela afirmação acima esta é uma solução da equação de Helmholtz. A estimativa para a norma de  $w$  segue facilmente.  $\blacksquare$

**Teorema 2.4.** *Sejam  $b^1, b^2 \in L^\infty(\Omega)$ , para  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ . Então o conjunto*

$$U := \{v^1 \cdot v^2 : v^j \text{ é uma solução de } \Delta v^j + b^j v^j = 0, \quad j = 1, 2\}, \quad (2.3.20)$$

é denso em  $L^1(\Omega)$ .

Demonstração: Suponha que  $U$  não seja denso em  $L^1(\Omega)$ . Então, pelo Teorema de Hanh-Banach [30], existe  $f \in L^\infty(\Omega)$ , com  $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$  tal que

$$\int_{\Omega} f \bar{v} dx = 0, \quad \forall v \in U. \quad (2.3.21)$$

Seja  $\eta \in \mathbb{R}^n$  arbitrário. Pelo Lemma 2.3, existem  $v_C^j$  soluções da equação de Helmholtz da forma (2.3.15).

Tome  $v = v_c^1 v_c^2 \in U$  e substitua em (2.3.21). Disto temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega} f e^{-ix\eta} dx \right| &= \left| \int_{\omega} f e^{-ix\eta} dx - \int_{\omega} f \overline{v_c^1 v_c^2} dx \right| \\ &= \left| \int_{\omega} f \left( e^{-ix\eta} - e^{-ix(\xi^1 - \xi^2)} \overline{(1 + w_c^1)(1 + w_c^2)} \right) dx \right| \\ &= \left| \int_{\omega} f e^{-ix\eta} \left( \overline{w_c^1 + w_c^2 + w_c^1 w_c^2} \right) dx \right| \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \|w_c^1\|_{L^1(\Omega)} + \|w_c^2\|_{L^1(\Omega)} + \|w_c^1 w_c^2\|_{L^1(\Omega)} \right) \\ &\leq \sqrt{|\Omega|} \left( \|w_c^1\|_{L^2(\Omega)} + \|w_c^2\|_{L^2(\Omega)} + \|w_c^1\|_{L^2(\Omega)} \|w_c^2\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Note que usamos Cauchy-Schwarz na última desigualdade. Desta estimativa, do Lemma 2.3 e da densidade do conjunto  $\{x \mapsto e^{ix \star \eta} : \eta \in \mathbb{R}^n \quad \eta \text{ arbitrário}\}$  em  $L^1(\Omega)$ , temos que  $f = 0$ . Uma contradição. ■

Note que é essencial no Teorema acima que  $n \geq 3$ , pois caso contrário a última propriedade pode não ser verdadeira para  $n = 2$ . Veja o Lema 2.2.

**Observação 2.1.** Como visto acima, para  $v_1$  e  $v_2$  soluções da forma (2.3.15), obtemos que

$$v_1 v_2 = e(\xi_1 - \xi_2) \star x(1 + w_1 + w_2 + w_1 w_2). \quad (2.3.22)$$

Escolhendo  $\xi_1 - \xi_2 = ik$  para  $k$  fixo e com  $|\xi_j|$  convergindo para infinito de forma que  $w_1 + w_2 + w_1 w_2$  fique arbitrariamente pequeno em  $L^2(\Omega)$ , vemos que o produto  $v_1 v_2$  converge para  $e^{ikx}$ . Como sabemos, o conjunto  $\{e^{ikx}\}$  forma um conjunto de funções denso em  $L^2(\Omega)$ .

## 2.4 Sistemas de Equações Lineares

Os capítulos anteriores nos ensinaram que, dado um problema linear (um sistema de equações lineares, por exemplo), o operador que rege o problema nem sempre é injetivo e, mesmo que seja esse o caso, não é nada recomendável inverter esse operador.



Apresentaremos abaixo dois conceitos relacionados com a solução de problemas inversos. Estes são a *Inversa Generalizada ou Pseudo-Inversa* de operadores lineares e o *Teorema de Decomposição em Valores Singulares (SVD)*<sup>1</sup> ou *Teorema Espectral*. O primeiro destes conceitos nos permitirá definir uma solução, com uma propriedade especial, dentre todas as possíveis soluções (que podem ser infinitas) de um problema inverso. O segundo permite decompor um operador (uma matriz) como a soma de projeções sobre certos subespaços. Além disso, essa teoria nos ajuda a entender a influência dos autovalores de um operador na solução de problemas inversos.

### 2.4.1 Pseudo-Inversa de Operadores Lineares

Na verdade, tudo o que queremos em problemas inversos é: Encontrar uma maneira de aproximar um operador (o operador inverso) por uma família de operadores bem postos. Consequentemente, encontrar uma aproximação (a melhor possível) para a solução do problema.

Nesta seção, apresentaremos uma forma de aproximarmos “da melhor maneira” o inverso de um operador linear. Desenvolveremos a teoria para operadores lineares limitados que possuam imagem fechada, que é o caso de operadores em dimensão finita (matrizes) e operadores compactos. Assim, com a teoria linear, cobrimos uma ampla quantidade de casos interessantes. Faz jus mencionarmos que existem versões dos resultados apresentados abaixo para operadores lineares limitados quaisquer. Para uma abordagem completa sobre o assunto, veja [21].

#### Definições e Propriedades Básicas

Esperamos que o leitor esteja familiarizado com as definições de matrizes **Hermitianas, Simétricas, Unitárias, Normais**, etc. Caso contrário, uma breve leitura em livros de Álgebra Linear é recomendado. Veja, por exemplo, [36, 45]. Nosso objetivo é encurtarmos o caminho. Assim, vamos direto ao Teorema Espectral<sup>2</sup> (dimensão infinita) para operadores compactos e auto-adjuntos e obteremos, como corolário, o Teorema da SVD (dimensão finita).

Seja  $A : X \rightarrow Y$  um operador linear e limitado, onde  $X$  e  $Y$  denotam espaços de Hilbert. Consideraremos o problema fundamental de resolver a equação linear do tipo

$$Ax = g, \tag{2.4.23}$$

onde  $g \in Y$ .

**Exemplo 2.1.** *Exemplos da equação (2.4.23) são:*

---

<sup>1</sup>O Teorema de Decomposição em Valores Singulares é um dos teoremas mais fortes da matemática. Existem versões deste Teorema para operadores auto-adjuntos não limitados [30].

<sup>2</sup>Teorema Espectral é o nome que se dá ao Teorema de Decomposição em Valores Singulares para operadores em dimensão infinita.

Caso em que  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$  e  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

Caso em que  $X = Y = L^2[0, 1]$  e  $A$  é um operador integral da forma

$$(Ax)(s) = \int_0^1 k(s, t)x(t)dt, \quad s \in [0, 1],$$

e  $k(s, t) \in (C[0, 1] \times C[0, 1])$  é o chamado Kernel<sup>3</sup>.

Como já vimos, se o operador  $A$  possui uma inversa, então a equação (2.4.23) possui uma única solução  $x = A^{-1}g$ . Mas, nossa experiência anterior nos ensinou que "nem tudo são rosas", isto é, pode acontecer de que  $\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$  ou, talvez,  $g \notin \text{Im}(A)$ .

Um fato confortante é que, mesmo no caso da equação (2.4.23) não possuir uma solução no sentido tradicional, é possível definir uma solução generalizada do problema que é "a melhor" entre as soluções generalizadas de (2.4.23). Para tal, necessitamos de certas hipóteses sobre a imagem do operador  $A$ . No caso em que  $A$  é um operador compacto, a hipótese que faremos abaixo não é restritiva.

**Hipótese 2.1.** *Suponha que  $A$  é um operador linear limitado e que  $\text{Im}(A)$  é fechada em  $Y$ .*

Seja  $P : Y \rightarrow \text{Im}(A)$  o operador de projeção ortogonal (que está bem definido pelo Exercício 2.16). Assim,  $Pg \in \text{Im}(A)$  é o vetor mais próximo de  $g$ .

**Definição 2.1.** *Uma solução generalizada de (2.4.23) é qualquer solução  $u \in X$  da equação*

$$Ax = Pg. \quad (2.4.24)$$

**Exemplo 2.2.** *Suponha que  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  e  $g = (2, 1)^T$ .*

*Então  $\text{Im}(A) = \text{span}\{(1, -1)^T\}$  e  $Pg = (1/2, -1/2)^T$ . Portanto, o conjunto de soluções generalizadas é dada por*

$$\left\{ (x_1, x_2)^T : x_2 = \frac{1}{2} + x_1 \right\}.$$

Geometricamente, uma solução generalizada, como na Definição 2.1, significa encontrar  $u \in X$  solução do problema de minimização

$$u = \arg \min_{x \in X} \frac{1}{2} \|Ax - g\|^2. \quad (2.4.25)$$

Mais geral, denotando por  $A^*$  o operador adjunto de  $A$ , segue

---

<sup>3</sup>Não confundir com o núcleo do operador  $A$

**Teorema 2.5.** *Suponha que  $A : X \rightarrow Y$  seja um operador linear limitado,  $g \in Y$  e a Hipótese 2.1 seja satisfeita. Então, as seguintes condições sobre  $u \in X$  são equivalentes:*

$$(i) \quad Au = Pg,$$

$$(ii) \quad u = \arg \min_{x \in X} \frac{1}{2} \|Ax - g\|^2,$$

$$(iii) \quad A^*Au = A^*g \quad (\text{conhecidas como Equações Normais}).$$

Demonstração: (i)  $\Rightarrow$  (ii): Seja  $Au = Pg$ . Segue do exercício 2.12 e do Teorema de Pitágoras que, dado  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} \|Ax - g\|^2 &= \|Ax - Pg\|^2 + \|Pg - g\|^2 \\ &= \|Ax - Pg\|^2 + \|Au - g\|^2 \geq \|Au - g\|^2. \end{aligned}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Por hipótese, existe pelo menos um  $x \in X$  solução de (2.4.24). Disto e do Teorema de Pitágoras, temos que

$$\|Au - g\|^2 = \|Au - Pg\|^2 + \|Pg - g\|^2 \geq \|Au - Pg\|^2 + \|Au - g\|^2.$$

Portanto  $Au - g = Pg - g \in (Im(A))^\perp = \mathcal{N}(A^*)$ . Assim,  $A^*(Au - g) = 0$  e (iii) segue.

(iii)  $\Rightarrow$  (i): De (iii) satisfeito, obtemos que  $Au - g \in (Im(A))^\perp$  e, assim,  $0 = P(Au - g) = Au - Pg$ . ■

**Definição 2.2.** *Um vetor  $u \in X$  satisfazendo qualquer uma das sentenças do Teorema 2.5 é chamado uma **solução dos mínimos quadrados** da equação  $Ax = g$ .*

Uma observação importante a ser feita é a de que, sob a Hipótese 2.1, uma solução de mínimos quadrados de (1.0.2) sempre existe  $\forall b \in Y$  (veja Exercício 2.14). Caso  $\mathcal{N}(A) \neq 0$  então, existe uma infinidade de soluções de mínimos quadrados de (1.0.2). De fato, se  $u$  é uma solução de mínimos quadrados e  $v \in \mathcal{N}(A)$ , então  $u + v$  também é uma solução de mínimos quadrados.

Estamos buscando um caminho para "inverter" o operador  $A$ , associando com cada  $b \in Y$  uma única solução de mínimos quadrados. Sabemos que, se  $\mathcal{N}(A) \neq 0$ , não temos tal unicidade. Será que temos alguma alternativa? A resposta é afirmativa: basta para tal, escolhermos entre as (várias) possíveis soluções, uma que tenha uma característica especial. Mas, que característica especial podemos escolher num conjunto que possui, possivelmente, uma infinidade de elementos?

Vamos voltar e analisar o que temos de hipóteses e resultados.

i) O conjunto de soluções de mínimos quadrados é não-vazio.

- ii) O conjunto de soluções de mínimos quadrados é **convexo e fechado** (ver Exercício 2.13).

Portanto, pelo *Teorema da Projeção* [30], existe uma única solução de mínimos quadrados com norma mínima associada a cada elemento  $b \in Y$ . Logo, temos um caminho para encontrar uma inversa (mesmo que generalizada) para o operador  $A$ .

**Definição 2.3.** *Seja  $A$  um operador satisfazendo a Hipótese 2.1. A aplicação*

$$A^\dagger : Y \longrightarrow X, \quad A^\dagger b = u,$$

*onde  $u$  é a **única** solução de mínimos quadrados de norma mínima da equação (2.4.23). Tal solução é chamada de Inversa Generalizada de  $A$ .*

Existem outras definições de inversa generalizada de operadores que são equivalentes a dada acima (veja [21]).

**Teorema 2.6.** *Se  $A$  satisfaz a Hipótese 2.1, então  $Im(A^\dagger) = Im(A^*) = Im(A^\dagger A)$ .*

*Demonstração:* Seja  $b \in Y$ . Num primeiro momento, mostraremos que  $A^\dagger b \in \mathcal{N}(A)^\perp$  e então usaremos o Exercício 2.18. Suponha que

$$A^\dagger b = u_1 + u_2 \in \mathcal{N}(A)^\perp \oplus \mathcal{N}(A).$$

Então,  $u_1$  é uma solução de mínimos quadrados de  $Ax = b$ . De fato,

$$Au_1 = A(u_1 + u_2) = AA^\dagger b = Pb.$$

e, portanto, a afirmação está completa usando o Teorema 2.5.

Suponha que  $u_2 \neq 0$ . Então, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|u_1\|^2 < \|u_1 + u_2\|^2 = \|A^\dagger b\|^2,$$

contradizendo o fato de  $A^\dagger b$  ser uma solução de mínimos quadrados que tem a norma mínima. Logo,  $A^\dagger b = u_1 \in \mathcal{N}(A)^\perp$ .

Reciprocamente, sejam  $u \in \mathcal{N}(A)^\perp$  e  $b = Au$ . Então,

$$Au = PAu = Pb,$$

e, assim,  $u$  é uma solução de mínimos quadrados. Se  $x$  é qualquer outra solução de mínimos quadrados, então

$$Ax = Pb = Au,$$

e, portanto,  $x - u \in \mathcal{N}(A)$ . Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|x\|^2 = \|u\|^2 + \|x - u\|^2 \geq \|u\|^2.$$

Assim,  $u$  é a solução de mínimos quadrados que tem norma mínima, i.e.,  $u = A^\dagger b$ .

Isto prova a primeira das igualdades. Para verificar a segunda, note que, para qualquer  $b \in Y$ ,

$$A^\dagger b = A^\dagger Pb \in Im(A^\dagger A). \quad \blacksquare$$

**Corolário 2.1.** *Se  $A$  satisfaz a Hipótese 2.1, então  $A^\dagger : Y \rightarrow X$  é linear e limitado.*

Um fato muito importante para o que segue na teoria de regularização para problemas inversos é consequência do seguinte resultado:

**Teorema 2.7.** *A inversa generalizada  $A^\dagger$  possui gráfico  $Gr(A^\dagger)$  fechado. Consequentemente,  $A^\dagger$  é contínua se, e só se,  $Im(A)$  é fechada.*

Demonstração: Uma parte deste Teorema é consequência do Corolário 2.1. A demonstração completa do Teorema foge ao escopo destas notas, pois, usa conceitos fortes de Análise Funcional em particular o Teorema do Gráfico Fechado [30]. Interessados na demonstração podem consultar [17]. ■

**Observação 2.2.** *O Teorema 2.7 reforça ainda mais a diferença entre problemas inversos em dimensão finita e infinita. Pois, no caso de dimensão finita, o operador (matriz)  $A$  sempre possui a imagem fechada. Assim, temos a garantia de existência e unicidade de uma solução de mínimos quadrados de norma mínima.*

## 2.4.2 A Decomposição em Valores Singulares

Um dos principais resultados da Álgebra Linear é o *Teorema de Decomposição em Valores Singulares (SVD)*. Este teorema permite escrever uma matriz qualquer como uma soma de matrizes de projeção de posto 1. Mais geral, o Teorema de SVD vale para operadores lineares em espaços de Hilbert de dimensão infinita que são auto-adjuntos<sup>4</sup>. Neste caso, o Teorema de SVD é conhecido como *Teorema Espectral*, [30]. No caso especial em que  $A$  é um operador linear e compacto, o Teorema Espectral se traduz de forma similar ao caso de dimensão finita [30, 45, 36, 20].

**Observação 2.3.** *Faremos a hipótese de que o corpo de escalares do espaço vetorial é o corpo dos números complexos. Assim, se temos uma matriz  $n \times n$ , esta possui  $n$  autovalores. Esse fato é importante no que segue.*

Nosso ponto de partida é uma versão simplificada do Teorema SVD, a qual faremos a demonstração. Formulações mais gerais podem ser encontradas em [30, 45, 36, 20].

**Teorema 2.8.** [*Diagonalização*] *Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n \times n$  com um conjunto de  $n$  autovetores linearmente independentes. Então,  $A$  é similar a uma matriz diagonal ou diagonalizável.*

<sup>4</sup>Um operador  $A$  entre espaços de Hilbert é Auto-Adjunto se  $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$  e  $\langle x, Ag \rangle = \langle Ax, g \rangle, \forall x, g \in \mathcal{D}(A)$ .

Demonstração: Construa a matriz  $S$  tendo como colunas os vetores  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Assim:

$$AS = A \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \\ = S.D(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

onde,  $D(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  representa a matriz diagonal formada por  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Como  $S$  é invertível, temos

$$A = SD(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)S^{-1}. \quad \blacksquare$$

**Corolário 2.2.** *Seja  $A$  uma matriz com de ordem  $n \times n$  que possui  $n$  autovalores distintos. Então,  $A$  é diagonalizável.*

Pergunta: Será que toda matriz quadrada é diagonalizável? Não, pelo menos, no sentido do Teorema 2.8. Veja a resposta no Exercício 2.28.

O Teorema 2.8 é a versão mais simples do Teorema de Decomposição em Valores Singulares. Passaremos agora para uma versão mais geral.

**Teorema 2.9.** *Todo operador compacto possui no máximo uma quantidade enumerável de autovalores que formam uma sequência cujos valores absolutos convergem para zero. Os autovalores de um operador auto-adjunto são reais.*

**Teorema 2.10.** [Teorema Espectral<sup>5</sup> -  $A$  compacto e auto-adjunto] *Seja  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador compacto e auto-adjunto. Então, existe um sistema ortonormal completo  $\{e_j\}$  de  $\mathcal{H}$  tal que  $Ae_j = \lambda_j e_j$  e  $\lambda_j \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

Demonstração: Não faremos a demonstração, pois foge das nossas pretensões. Para a demonstração sugerimos que o leitor consulte [30].  $\blacksquare$

**Teorema 2.11.** [Teorema Espectral -  $A$  compacto] *Seja  $A : X \rightarrow Y$  um operador linear compacto. Então, existem conjuntos ortogonais (não necessariamente completos)  $\{e_1, \dots, e_m\}$  de  $X$  e  $\{f_1, \dots, f_m\}$  de  $Y$  e de números  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  com  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$ , tal que*

$$Ax = \sum_{j=1}^m \sigma_j \langle x, e_j \rangle f_j, \quad x \in X. \quad (2.4.26)$$

No caso da imagem do operador  $A$  ter dimensão infinita, temos que considerar  $m \rightarrow \infty$ . Neste caso,  $\sigma_m \rightarrow 0$ .

<sup>5</sup>O Teorema Espectral como enunciado também é conhecido como Teorema de Hilbert-Schmidt. Existem várias versões deste Teorema,[30].

**Demonstração:** Como  $A$  é compacto sabemos que  $A^*A$  é compacto e auto-adjunto. Pelo Teorema Espectral 2.10, existe um conjunto ortogonal  $\{e_1, \dots, e_m\}$  de  $X$  tal que  $A^*Ae_j = \lambda_j e_j$ , onde  $0 \leq \lambda_j \in \mathbb{R}$ . Defina  $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$  e  $f_j = \frac{1}{\sigma_j} Ae_j$  (para  $\sigma_j > 0$ ). Um cálculo simples mostra que  $\{f_1, \dots, f_m\}$  é um conjunto ortonormal e que a equação (2.4.26) é satisfeita. ■

**Definição 2.4.** Os valores  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  são chamados de **valores espectrais** de  $A$ . Chamamos de **sistema singular** de  $A$  a tripla  $(\sigma_j, e_j, f_j)$ .

**Corolário 2.3.** [Teorema espectral em dimensão finita - SVD.] Seja  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  com  $n \leq m$ . Então, existem matrizes unitárias  $U \in M_{m \times m}$ ,  $V \in M_{n \times n}$  e uma matriz diagonal com entradas não-negativas  $\Sigma := D\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  tais que

$$A = U\Sigma V^T.$$

Os passos para demonstrar o teorema SVD estão nos Exercícios 2.33 e 2.34.

### Funções de Operadores: O Teorema da Aplicação Espectral

Daremos agora uma breve introdução ao *Cálculo Funcional*, como é conhecida a teoria que trata de funções de Operadores Lineares. Essa importantíssima ferramenta matemática nos ensinará a derivar as chamadas de *Funções Filtro* que são a peça chave para o entendimento dos Métodos de Regularização dos capítulos a seguir.

Por simplicidade, daremos somente a ideia intuitiva em dimensão finita. Para interessados em detalhes mais aprofundados, recomendamos [30] e livros de Análise Funcional em geral.

Sejam  $t \in [0, T]$  e  $g(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$  um polinômio de ordem  $n$  em  $t$ .

**Definição 2.5.** Seja  $A$  um operador linear limitado ( $\|A\| \in [0, T]$ ), definimos um polinômio do operador  $A$  por

$$g(A) = a_0 + a_1 A + \dots + a_n A^n$$

onde  $g(t)$  é o polinômio acima.

O que acontece com uma função contínua de um operador linear limitado? A resposta é dada pelo Teorema da Aplicação Espectral. Elucidaremos suas consequências através de um exemplo. Para interessados na demonstração consulte [30].

**Exemplo 2.3.** Uma função de operadores muito especial é a exponencial de um operador linear limitado  $\exp(A)$ . Dar sentido a esse tipo de operações tem uma importância enorme na caracterização de soluções para sistemas

de EDO's e na Teoria de Semigrupos associados a operadores diferenciais parciais.

Vamos considerar o caso especial em que  $A$  é uma matriz e, mais ainda, esta satisfaz as hipóteses do Teorema 2.8.

Sabemos que a função  $\exp(t)$  possui uma expansão em séries de potências dada por

$$\exp(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \cdots .$$

que converge uniformemente  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Pelo o Exercício 2.36, temos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = S \cdot D(\exp(\lambda_1), \cdots, \exp(\lambda_n), \cdots) \cdot S^{-1} =: \exp(A).$$

Como o operador  $A$  é limitado, a série  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$  converge uniformemente na norma dos operadores e, assim,  $\exp(A)$  está bem definida.

No caso especial em que  $A$  é uma matriz quadrada e injetiva, temos, do Teorema SVD, que

$$A^{-1} = V \Sigma^{-1} U^T, \quad (2.4.27)$$

onde  $\Sigma^{-1} = D\{\frac{1}{\sigma_1}, \cdots, \frac{1}{\sigma_n}\}$ .

**Observação 2.4.** Note que a inversão de uma matriz pode ser pensada como a função  $g(t) = t^{-1}$  aplicada a matriz.

De fato, podemos provar que este resultado não é mera coincidência. Denotemos por  $\Sigma(A)$  o espectro de  $A$ .

**Teorema 2.12.** [Teorema da Aplicação Espectral.] Seja  $A$  um operador linear limitado e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua (à direita ou à esquerda). Então,  $\Sigma(g(A)) = g(\Sigma(A))$ .

Em particular, se  $A$  é compacto, então

$$g(A)x = \sum_{j=0}^m g(\sigma_j) \langle x, e_j \rangle f_j, \quad x \in \mathcal{H}.$$

É extremamente importante entender este resultado, pois servirá no entendimento, para a construção das estratégias de regularização (veja Capítulo 8) e para entender a relação existente entre mal-condicionamento de um problema com os respectivos valores espectrais do operador associado.

## 2.5 Exercícios

Nesta seção o leitor encontrará alguns exercícios que complementam a teoria desenvolvida no Capítulo. Alguns deles são fáceis, outros exigem um maior treinamento em análise e equações diferenciais, os quais, esperamos que sirvam de motivação para o leitor continuar buscando o conhecimento.



**Exercício 2.1.** *Mostre que  $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  definida em (2.1.1) é de fato uma norma, para  $p \geq 1$ .*

**Exercício 2.2.** *Verifique que os espaços  $L^p(\mathbb{R}^n)$  são espaços de Banach para  $1 \leq p < \infty$ .*

**Exercício 2.3.** *Mostre que a única função constante pertencente a  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , para  $1 \leq p < \infty$  é a função identicamente nula.*

**Exercício 2.4.** *Verifique a afirmação de que (2.1.2) define um produto interno em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .*

**Exercício 2.5.** *Mostre que a Transformada de Fourier e sua inversa são operadores lineares.*

**Exercício 2.6.** *Demonstre a identidade de Parseval. Sugestão: Consulte [19] e referências.*

**Exercício 2.7.** *Mostre que os operadores  $T^j$  definidos em (2.3.18) estão bem definidos.*

**Exercício 2.8.** *Mostre que  $K$  definido em (2.3.19) é um subconjunto fechado de  $L^2(\Omega)$ .*

**Exercício 2.9.** *Mostre que o conjunto  $\{x \mapsto e^{ix \star \eta} : \eta \in \mathbb{R}^n \quad \eta \text{ arbitrário}\}$  é denso em  $L^1(\Omega)$ .*

**Exercício 2.10.** *Mostre que  $v$  dado por (2.3.15) satisfaz*

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C|l|e^{C|l|},$$

onde a constante  $C$  independe de  $l$ .

**Exercício 2.11.** *Faça um paralelo entre as definições de matrizes Hermitianas, Simétricas, Unitárias, Normais e operadores adjuntos e auto-adjuntos.*

**Exercício 2.12.** *Suponha que a Hipótese 2.1 seja satisfeita e seja  $P$  o operador de projeção ortogonal sobre  $\mathcal{R}(A)$ . Prove que, dado  $g \in Y$ ,  $Pg - g \in (Im(A))^\perp$ .*

**Exercício 2.13.** *Mostre que o conjunto de soluções de mínimos quadrados pode ser escrito como*

$$\{u \in X : A^*Au = A^*b\}. \quad (2.5.28)$$

*Também, prove que este conjunto é convexo e fechado.*

**Exercício 2.14.** *Assuma que  $A$  satisfaz a Hipótese 2.1. Prove que existe pelo menos uma solução de mínimos quadrados. Dê condições sobre o operador  $A$  para que a solução de mínimos quadrados seja única.*

**Exercício 2.15.** Prove que ambos os exemplos apresentados acima para a equação (2.4.23) são operadores compactos. Sugestão: Para o caso de  $A$  ser o operador integral, comece supondo que  $k(s, t) \in (C[0, 1] \times C[0, 1])$  e use o Teorema de Ascoli-Arzelá. Use a densidade de  $C[0, 1]$  em  $L^2[0, 1]$ .

**Exercício 2.16.** Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert e  $C \subset \mathcal{H}$  um conjunto convexo e fechado. Prove que para todo  $b \in \mathcal{H}$ , existe uma única projeção de  $b$  sobre  $C$ . Prove ainda que a projeção de  $b$  sobre  $C$  é o vetor de  $C$  mais próximo de  $b$ .

**Exercício 2.17.** Mostre que, se  $A$  possui uma inversa, então  $A^\dagger = A^{-1}$ .

**Exercício 2.18.** Mostre que, se  $A$  satisfaz a Hipótese 2.1, então  $Im(A^*)$  é fechada e  $\mathcal{N}(A)^\perp = Im(A^*)$ .

**Exercício 2.19.** Demonstre o Corolário 2.1.

**Exercício 2.20.** Prove que se  $A$  é um operador linear entre espaços de dimensão finita, então  $Im(A)$  é fechada.

**Exercício 2.21.** Suponha que  $A$  satisfaça a Hipótese 2.1. Prove que  $A^\dagger : Y \rightarrow X$  é o único operador linear limitado satisfazendo

$$AA^\dagger = P_{Im(A)} \quad e \quad A^\dagger A = P_{Im(A^\dagger)}.$$

Esta é a definição de Moore para Inversa Generalizada. (Sugestão: Consulte [21])

**Exercício 2.22.** Prove que uma matriz quadrada  $A$  possui, no máximo  $n$ , autovalores. Dê um exemplo de uma matriz que não possui autovalores.

**Exercício 2.23.** Prove que, se estamos considerando o espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos, então uma matriz quadrada  $A_{(n \times n)}$  possui  $n$  autovalores.

**Exercício 2.24.** Dê um exemplo, em dimensão infinita, de um operador linear que não possui autovalores.

**Exercício 2.25.** Mostre que, dado um conjunto linearmente independentes de vetores, sempre existe um conjunto ortogonal. Mostre ainda que o espaço gerado pelos dois conjuntos são iguais. Sugestão: Use o Processo de Gram-Schmidt.

**Exercício 2.26.** Justifique, de maneira adequada, que a matriz  $S$  no Teorema 2.8 é de fato inversível.

**Exercício 2.27.** Prove o Corolário 2.2.

**Exercício 2.28.** Mostre que a matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  não é diagonalizável no sentido do Teorema 2.8.

**Exercício 2.29.** *Mostre que, se  $\lambda_j$  satisfas  $A^*Ae_j = \lambda_j e_j$ , então  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  e  $\lambda_j \geq 0$ .*

**Exercício 2.30.** *Mostre que o conjunto  $\{f_1, \dots, f_m\}$  definido como no Teorema 2.11 é ortonormal.*

**Exercício 2.31.** *Mostre que se  $A^*$  é um operador linear compacto, então*

$$A^*g = \sum_{j=1}^m \sigma_j \langle g, f_j \rangle e_j, \quad x \in X. \quad (2.5.29)$$

**Exercício 2.32.** *Mostre que se  $A^*$  é um operador linear compacto, então*

$$A^\dagger g = \sum_{j=1}^m \sigma_j^{-1} \langle g, f_j \rangle f_j, \quad g \in \mathcal{D}(A^\dagger). \quad (2.5.30)$$

**Exercício 2.33.** *Mostre que todo operador linear cuja imagem possui dimensão finita é compacto. Consequentemente, toda matriz é um operador linear compacto.*

**Exercício 2.34.** *Mostre que se  $A$  é uma matriz, então  $AA^*$  e  $A^*A$  são operadores compactos e auto-adjuntos.*

**Exercício 2.35.** *Demonstre o Corolário 2.3.*

**Exercício 2.36.** *Seja  $A$  uma matriz como no Teorema 2.8. Mostre que*

$$A^2 = SD(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)S^{-1}.$$

*Use indução para mostrar que  $A^p = SD(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)S^{-1}$ , para qualquer  $p \in \mathbb{N}$ .*

## Capítulo 3

# Transformada de Radon e a Tomografia Computadorizada

Neste capítulo estudaremos as propriedades da Transformada de Radon. Estas propriedades implicam na existência de uma fórmula inversa para o problema de Tomografia Computadorizada em casos especiais.

### 3.1 Propriedades da Transformada de Radon

Nesta seção provaremos alguns resultados interessantes sobre a Transformada de Radon. O primeiro resultado é a linearidade da Transformada de Radon.

**Lema 3.1.** *A Transformada de Radon  $\mathcal{R}$  é uma aplicação linear.*

Demonstração: Segue diretamente da linearidade da integral de linha. ■

O próximo teorema nos ensina que, para cada direção  $\theta$  dada, a Transformada de Radon fornece a integral de  $\mu$  sobre todas as retas paralelas a  $\theta$ . Assim, obviamente, se as oscilações na direção  $\theta$  são perdidas, o mesmo não acontece nas direções ortogonais  $\theta^\perp$ . A saber, a oscilação de  $\mu$  na direção  $\theta^\perp$  é da forma  $\hat{\mu}(k\theta^\perp)$  para  $k \in \mathbb{R}$ . Por isso, não é surpresa que este teorema seja utilizado nos métodos de reconstrução.

**Teorema 3.1** (Teorema das Fatias de Fourier). *Seja  $\mu$  uma função suave. Então, para todo  $\theta \in \mathbb{S}^1$  temos que*

$$(\widehat{\mathcal{R}\mu}(\theta, s))(k) = \hat{\mu}(k\theta^\perp), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.1.1)$$

onde  $\hat{z}$  denota a Transformada de Fourier de  $z$ .

Demonstração: Usando a definição da Transformada de Fourier em (2.1.3), a Transformada de Radon em (1.2.18) e o Teorema de Fubini [19], temos que

$$\widehat{\mathcal{R}\mu}(\theta, s)(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-isk} \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{x} \cdot \theta^\perp - s) dx ds = \hat{\mu}(k\theta^\perp). \quad \blacksquare$$

A pergunta sobre injetividade da Transformada de Radon feita na Subseção (1.2.1) é respondida no próximo resultado.

**Corolário 3.1.** *Seja  $\mu \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Então,  $\mathcal{R}\mu(\theta, s) = 0$  se e só se  $\mu(\theta, s) = 0$ .*

Demonstração: Como a Transformada de Fourier é um isomorfismo, temos que  $\mathcal{R}\mu(\theta, s) = 0$  se e só se  $\widehat{\mathcal{R}\mu}(\theta, s) = 0$ . Pelo Teorema 3.1, se e só se  $\widehat{\mu}(k\theta^\perp) = 0$ . Novamente pelo isomorfismo da Transformada de Fourier, se e só se  $\mu = 0$ . Agora a injetividade segue do Lema 3.1. ■

**Exercício 3.1.** *Mostre que*

$$\mathcal{R}\mu(\theta, s) = \mathcal{R}\mu(-\theta, -s). \quad (3.1.2)$$

Notemos que, dado  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} s^m \mathcal{R}\mu(\theta, s) ds = \int_{\mathbb{R}} \int_{L(\theta, s)} (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta})^m \mu(\mathbf{x}) dS ds. \quad (3.1.3)$$

Porém, quando calculamos  $(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta})^m$  obtemos um polinômio homogêneo de grau  $m$  em  $\boldsymbol{\theta}$ , com coeficientes que também são polinômios homogêneos de grau  $m$  na variável  $\mathbf{x}$ . Já, o resultado da integral (3.1.3) é um polinômio de grau  $m$  em  $\boldsymbol{\theta}$ .

Com isso obtemos que:  $F(\theta, s)$  está na imagem de  $\mathcal{R}$  se satisfizer:

$$F(\theta, s) = F(-\theta, -s) \quad (3.1.4)$$

$$\int_{\mathbb{R}} s^m F(\theta, s) ds = P_m(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.1.5)$$

onde  $P_m$  é um polinômio homogêneo de grau  $m$  em  $\boldsymbol{\theta}$ .

**Exercício 3.2.** *Seja*

$$\begin{aligned} P : \mathbb{S}^{n-1} \times (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\boldsymbol{\theta}, s) &\longmapsto s\boldsymbol{\theta} = \mathbf{x}. \end{aligned}$$

- i) *Mostre que  $P$  é um isomorfismo e  $P^{-1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{x}\|)$  é a inversa de  $P$ .*
- ii) *Demonstre que se  $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , então  $\mu \circ P \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times [0, \infty))$ .*
- iii) *Seja  $F \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$ . Mostre que*

$$F \circ P^{-1} = F(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{x}\|) \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\}).$$

- iv) *Seja  $F \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$ . Demonstre que  $\mu = F \circ P^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .*

*Ainda:*

$$\left. \frac{\partial^m}{\partial s^m} F(\theta, s) \right|_{s=0} = P_m(\boldsymbol{\theta}),$$

*é um polinômio homogêneo de grau  $m$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ .*

Defina o conjunto de funções suaves

$$\mathcal{S}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) := \left\{ F \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) : |s|^k \left| \frac{\partial^l}{\partial s^l} \frac{\partial^{m_1}}{\partial w_1^{m_1}} \cdots \frac{\partial^{m_n}}{\partial w_n^{m_n}} F(w, s) \right| \leq C(k, l, m_1, \dots, m_n) \right\}.$$

O conjunto  $\mathcal{S}$  é chamado de espaço de Schwartz.

**Exercício 3.3.** *Mostre que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  é um subespaço vetorial de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .*

Com os resultados acima, estamos prontos para mostrar a sobrejetividade da Transformada de Radon.

**Teorema 3.2.** *A Transformada de Radon é uma aplicação bijetora*

$$\mathcal{R} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow M := \{ \mathcal{S}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) : F \text{ satisfaz (3.1.4) e (3.1.5)} \}$$

Demonstração: A injetividade foi provada no Lema 3.1. Seja  $F(\theta, s) \in M$ .  
Como

$$\int_{\mathbb{R}} s^m F(\theta, s) ds = \widehat{s^m F}(\theta, 0) = i^m \frac{\partial^m}{\partial s^m} \hat{F}(\theta, 0),$$

é, por hipótese, um polinômio homogêneo de grau  $m$ . Seja  $\xi = \lambda\theta$ . Pelo Exercício 3.2,  $\mu(\xi) = \hat{F}(\xi/\|\xi\|, \|\xi\|) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Como  $F \in M$  e a Transformada de Fourier é um isomorfismo em  $\mathcal{S}$  obtemos que  $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . De (3.1.1), deduzimos que  $F = \mathcal{R}\mathcal{F}^{-1}\mu$ . ■

### 3.2 Fórmula de Inversão para Tomografia Computadorizada

Como a Transformada de Radon é uma bijeção, cabe a pergunta: Será que é possível encontrar uma forma analítica para  $\mathcal{R}^{-1}$ ? A idéia é utilizar a relação entre a Transformada de Radon e a Transformada de Fourier provada no Teorema 3.1.

**Exercício 3.4.** *Mostre que*

$$\mathcal{F}^{-1}(\lambda^{n-1} \widehat{\mathcal{R}\mu}(\theta, \lambda)) = 2\pi \frac{1}{i^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \mathcal{R}\mu(\theta, s).$$

Para encontrarmos uma expressão analítica para  $\mathcal{R}^{-1}$  temos que considerar o caso  $n$  par e  $n$  ímpar. A demonstração de cada caso difere muito (veja [6]).

**Teorema 3.3.** *Seja  $n > 1$  ímpar. Então, para  $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*

$$\mu(\mathbf{x}) = 2^{-n} (i\pi)^{1-n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \mathcal{R}\mu(\theta, \mathbf{x} \cdot \theta) dS, \quad (3.2.6)$$

onde  $\theta = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) \in \mathbb{S}^1$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Demonstração: Usando a Transformada de Fourier inversa, coordenadas polares e o fato de  $(n - 1)$  é par, temos que

$$\begin{aligned}\mu(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty e^{i\mathbf{x} \cdot \lambda \boldsymbol{\theta}} \hat{\mu}(\lambda \boldsymbol{\theta}^\perp) \lambda^{n-1} d\lambda dS_\theta \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\mathbf{x} \cdot \lambda \boldsymbol{\theta}} \hat{\mu}(\lambda \boldsymbol{\theta}^\perp) \lambda^{n-1} d\lambda dS_\theta.\end{aligned}$$

Usando (3.1.1) e o exercício 3.4 concluímos a demonstração. ■

A fórmula (3.2.6) possui propriedades interessantes que devem ser destacadas. Para obtermos  $\mu(\mathbf{x}_0)$ , é necessário conhecer os valores de  $\mathcal{R}\mu(\theta, s)$  para  $s = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{x}_0$ . Ou seja, não precisamos conhecer as integrais de  $\mu$  ao longo de todas as retas  $L(\theta, s)$ . Basta obtermos informações sobre os que distam  $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{x}_0$  da origem.

Notemos que a demonstração do Teorema 3.3 não é verdadeira para o caso de  $n$  ser par. Neste caso, é preciso introduzir a Transformada de Hilbert, veja [39, 6].

**Definição 3.1.** [*Transformada de Hilbert*] Sejam  $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Então

$$\mathcal{H}(\mu(s)) = (\pi)^{-1} v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{s-t} dt, \quad (3.2.7)$$

onde *v.p.* significa o valor principal de Cauchy, que neste contexto é dado por

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(t)}{s-t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{s-\varepsilon} \frac{\mu(t)}{s-t} dt + \int_{s+\varepsilon}^{\infty} \frac{\mu(t)}{s-t} dt.$$

**Teorema 3.4.** *Seja  $n > 1$  par. Então*

$$\mu(\mathbf{x}) = 2^{-n} (i\pi)^{1-n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left( \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \mathcal{H}\mathcal{R}\mu \right) (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}) dS. \quad (3.2.8)$$

Demonstração: Veja [39, 6] para detalhes. ■

O que podemos aprender de (3.2.6) e de (3.2.8) é que ambas as fórmulas envolvem derivadas de  $\mathcal{R}\mu$ . Pelo que vimos na Seção 1.1.2, isto é uma indicação de um problema mal-posto. Claro que, por exemplo, na equação (3.2.8), depois de derivarmos, fazemos uma operação suavizante novamente, a saber, integramos. Por outro lado, o núcleo em (3.2.8) é singular e, portanto, não anula totalmente a instabilidade introduzida pela diferenciação. Assim, métodos mais adequados que a invertibilidade direta da Transformada de Radon devem ser considerados.

O próximo resultado é importante pois relaciona o suporte da Transformada de Radon com o suporte da função  $\mu$ . Também é útil para deduzir uma fórmula explícita para  $\mathcal{R}^{-1}$  para o caso especial  $n = 2$ .

**Teorema 3.5.** *Seja  $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\mu(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  mais rapidamente que qualquer polinômio. Se  $\mathcal{R}\mu(\theta, s) = 0$  para  $|s| > \rho$ , então  $\mu(\mathbf{x}) = 0$  para  $\|\mathbf{x}\| > \rho$ .*

Demonstração: A demonstração foge ao escopo destas notas. Veja [6] para detalhes. ■

### 3.3 Exercícios

Recomendamos ao leitor [39, 6] como referências para ajudar a resolver os exercícios abaixo.

**Exercício 3.5.** *Mostre que  $\mathcal{H}(\mu(s)) = (\pi s)^{-1} * \mu(s)$ , onde  $*$  é o operador de convolução.*

**Exercício 3.6.** *Seja  $\widehat{\text{sign}(\lambda)} = 1$  para  $\lambda > 0$ ,  $\widehat{\text{sign}(\lambda)} = -1$  para  $\lambda < 0$  e  $\widehat{\text{sign}(0)} = 0$ . Mostre que  $\mathcal{H}(\widehat{\mu(s)})(\lambda) = -i \text{sign}(\lambda) \widehat{\mu}(\lambda)$ .*

**Exercício 3.7.** *Mostre que  $\mathcal{H}(\mathcal{H}\mu(s)) = -\mu(s)$ .*

**Exercício 3.8.** *Demonstre que*

$$\mathcal{R}\mu(\theta, s) = \int_{\Sigma} \int_0^\infty \mu(s\theta^\perp + t\theta) t^{n-2} dt d\theta,$$

onde  $\Sigma = \{\theta \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathbf{x} \cdot \theta = s\}$ .

**Exercício 3.9.** *Uma função  $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita uma função radial, se existir uma função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mu(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|)$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .*

*Mostre que se  $\mu$  é radial, então*

$$\mathcal{R}\mu(\theta, s) = 2 \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \int_0^\infty \varphi(\sqrt{s^2 + t^2}) t^{n-2} dt.$$

Para nosso entendimento mais profundo, considere  $\Omega$  como um círculo de raio  $\rho$ . Ainda suponhamos que  $\mu$  é simétrica com respeito a origem. Assim, toda a informação que necessitamos saber está na direção  $\theta_0 = (0, \pm 1)$ .

Deste modo, podemos assumir que

$$\mu(\theta, s) = \mu(s), \quad 0 < s \leq \rho \quad \theta \in \mathbb{S}^1.$$

**Exercício 3.10.** *Sejam as hipóteses do Teorema 3.5 satisfeitas e  $0 < s \leq \rho$ . Use o Exercício 3.9 para mostrar que  $\mathcal{R}\mu(\theta_0, s)$  satisfaz uma equação integral de Abel de primeira espécie*

$$\mathcal{R}\mu(\theta_0, s) = \pi \int_s^\rho \frac{r\mu(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr. \tag{3.3.9}$$

**Exercício 3.11.** *Supondo que  $\mathcal{R}\mu(\theta_0, \rho) = 0$ , prove que*

$$\mu(s) = -\pi^{-1} \int_r^\rho \frac{d/ds(\mathcal{R}\mu(\theta_0, s))}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds. \tag{3.3.10}$$





## Capítulo 4

# Transformada de Radon Atenuada e SPECT

Nestas notas usaremos o famoso problema de Riemann-Hilbert para obtermos uma fórmula inversa para a Transformada de Radon Atenuada (1.2.28) obtida como resultado do modelo de SPECT na Subseção 1.2.

### 4.1 O Problema de Riemann-Hilbert

O problema de Riemann-Hilbert possui uma quantidade muito grande de aplicações em várias áreas, em particular, em variáveis complexas. Neste manuscrito necessitaremos de uma versão simplificada do teorema de Riemann-Hilbert. Iniciaremos esta seção definindo o nosso material de estudo.

Seja  $\gamma$  a curva no plano que denota a circunferência de raio um, que aqui parametrizaremos por  $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1$  e sejam  $D^+ := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$  e  $D^- := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$ . Suponhamos que a orientação de  $\gamma$  foi escolhida de forma que a região  $D^+$  fique a esquerda ao percorrermos  $\gamma$ .

Seja  $\phi(\lambda)$  uma função suave definida em  $D^+ \cup D^-$ . Denotaremos por  $\phi^+(t)$  e  $\phi^-(t)$  o traço de  $\phi$  em  $\gamma$  em  $D^+$  e  $D^-$ , respectivamente. Em outras palavras,

$$\phi^+(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi((1 - \varepsilon)t) \quad \phi^-(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi((1 + \varepsilon)t). \quad (4.1.1)$$

Definimos o salto de função  $\phi$  sobre a curva  $\gamma$  por

$$\psi(t) = \phi^+(t) - \phi^-(t). \quad (4.1.2)$$

Supondo que  $\psi(t)$  seja uma função suave em  $\gamma$ , **o problema de Riemann-Hilbert** é: Encontrar uma função  $\phi(\lambda)$  definida em  $D^+ \cup D^-$  tal que

1.  $\phi(\lambda)$  seja analítica em  $D^+$  e em  $D^-$ .
2.  $\lambda\phi(\lambda)$  seja limitada para  $|\lambda| \rightarrow \infty$  em  $D^-$ .

3. O salto de  $\phi$  em  $\gamma$  seja dado pela função  $\psi(t)$  em (4.1.2).

O problema de Riemann-Hilbert possui uma única solução que é dada pela fórmula de Cauchy [1]

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\psi(t)}{t - \lambda} dt, \quad \lambda \in D^+ \cup D^-. \quad (4.1.3)$$

Na próxima seção demonstraremos que a Transformada de Radon Atenuada está intimamente relacionada com o problema de Riemann-Hilbert e que podemos usar a fórmula de Cauchy para obter uma inversa para (1.2.28).

## 4.2 Fórmula de Inversão para Tomografia SPECT

Para obtermos uma fórmula para a inversa da Transformada de Radon Atenuada, o primeiro passo é estender a equação de transporte (1.2.22) para o corpo dos complexos. Para tal, seja  $\lambda = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$ . Notemos que  $\lambda$  desta forma toma valores sobre o círculo unitário  $\gamma$  para  $\theta \in (0, 2\pi)$ . Por simplicidade, denotaremos  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , então a equação do transporte (1.2.22) pode ser reescrita como

$$\left( \frac{(\lambda + \lambda^{-1})}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\lambda - \lambda^{-1})}{2i} \frac{\partial}{\partial y} + \mu(\mathbf{x}) \right) u(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}). \quad (4.2.4)$$

Identificando  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  por  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  e fazendo

$$2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} = \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (\cdot) \quad e \quad 2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial z},$$

onde  $\bar{z}$  é o conjugado de  $z \in \mathbb{C}$ , a equação (4.2.4) fica escrita como

$$\left( \lambda \frac{\partial}{\partial z} + \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \mu(z) \right) u(z, \lambda) = f(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.2.5)$$

É claro que a mesma condição de que nenhuma informação vem do infinito como em (1.2.23) deve ser considerada.

A obtenção da fórmula de inversão será feita em três etapas:

1. **Passo 1:** Verificar que  $u(z, \lambda)$  é analítica em  $D^+ \cup D^-$  e que  $\lambda u(z, \lambda)$  é limitada quando  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .
2. **Passo 2:** Verificar que os saltos de  $u$  solução de (4.2.4) sob a curva  $\lambda = e^{i\theta}$ , que denotaremos por  $\psi(\mathbf{x}, \theta) = u(\mathbf{x}, \theta)^+ - u(\mathbf{x}, \theta)^-$ , para cada  $\mathbf{x}$ , podem ser obtidas a partir dos dados  $\mathcal{R}_{\mu} f(s, \theta)$ .
3. **Passo 3:** Resolver o problema de Riemann-Hilbert usando (4.1.3) e avaliar a equação (4.2.5) em  $\lambda = 0$  para obter  $f(x, y) = f(z)$ .

**Passo 1:** Também é conhecido como o **problema  $\bar{\partial}$** .

Observe que, se  $\mu = 0$  na equação (4.2.5), então ela satisfaz

$$\left( \lambda \frac{\partial}{\partial z} + \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) G(z, \lambda) = \delta(z), \quad \lambda \in \mathbb{C} - \gamma \cup \{0\}. \quad (4.2.6)$$

onde  $\delta(z)$  representa a distribuição de Dirac e  $G(z, \lambda)$  é a solução fundamental.

**Lema 4.1.** *A equação (4.2.6) possui uma única solução dada pela função de Green*

$$G(z, \lambda) = \frac{\text{sing}(|\lambda| - 1)}{\pi(\lambda \bar{z} - \lambda^{-1}z)}, \quad \lambda \notin \gamma \cup \{0\}. \quad (4.2.7)$$

Demonstração: Fica como exercício verificar que  $G$  como em (4.2.7) satisfaz a equação (4.2.6). ■

Defina a seguinte mudança de variável  $\zeta = \lambda \bar{z} - \lambda^{-1}z$ . Por enquanto, assumiremos que  $|\lambda| > 1$ .

**Exercício 4.1.** *O Jacobiano da transformação é  $J(\lambda) := |\lambda|^2 - |\lambda|^{-2}$ . Assim,*

$$\left( \lambda \frac{\partial}{\partial z} + \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = -J(\lambda) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}.$$

Denotando  $\tilde{G}(\zeta) = G(z)$ , temos que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \tilde{G}(\zeta) = -\frac{1}{J(\zeta)} \delta(z(\zeta)) = -\delta(\zeta).$$

Portanto  $-\tilde{G}(\zeta)$  é a solução do operador  $\bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}$ .

**Afirmção:**  $\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta} = \pi \delta(\zeta)$ . De fato, seja  $\varphi(z) \in C_0^\infty(\mathbb{C})$  e denote por  $d(\zeta)$  a medida de Lebesgue  $dx dy$  de  $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ . Então, usando a fórmula de Green para variáveis complexas

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta} d(\zeta) &= - \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d(\zeta) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tilde{\mathbb{C}}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d(\zeta) \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tilde{\mathbb{C}}} \frac{\partial \zeta^{-1}}{\partial \bar{\zeta}} \varphi(\zeta) d(\zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \int_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{\varphi}{\zeta} d(\zeta) \\ &= \frac{1}{2i} 2i\pi \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\zeta) \pi \delta(\zeta) d(\zeta), \end{aligned}$$

onde  $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} - \{|\zeta| < \varepsilon\}$ . Isto demonstra a afirmação.

Da afirmação segue que  $\tilde{G}(\zeta) = (-\pi \zeta)^{-1}$ . Portanto,  $G(z) = (\pi(\lambda \bar{z} - \lambda^{-1}z))^{-1}$ . E assim, segue (4.2.7) para  $|\lambda| > 1$ .

Considere agora  $|\lambda| < 1$ . Pelo exercícios 4.7 temos que o Jacobiano é dado por  $-J(\zeta)$ . Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \tilde{G}(\zeta) = \frac{1}{J(\zeta)} \delta(z(\zeta)) = \delta(\zeta).$$

Agora, seguindo os mesmos passos da afirmação acima obtemos (4.2.7) para  $|\lambda| < 1$ . ■

**Lema 4.2.** *Considere a equação*

$$\left( \lambda \frac{\partial}{\partial z} + \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) h(z, \lambda) = \mu(z), \quad \lambda \in \mathbb{C} - (\gamma \cup \{0\}).$$

com  $|h(z, \lambda)| \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ .

A solução é dada por

$$h(z, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^2} G(z - \zeta, \lambda) \mu(\zeta) d(\zeta). \quad (4.2.8)$$

onde  $G(z, \lambda)$  é a solução fundamental de (4.2.6).

Demonstração: Segue das propriedades da função de Green [19].

**Lema 4.3.** *Seja  $e^{h(z, \lambda)}$  onde  $h$  é dado por (4.2.8). Então,*

$$\left( \lambda \frac{\partial}{\partial z} + \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) (e^{h(z, \lambda)} u(z, \lambda)) = e^{h(z, \lambda)} f(z), \quad \lambda \in \mathbb{C} - (\gamma \cup \{0\}).$$

Demonstração: A demonstração é feita por verificação e assim deixada para o leitor. ■

**Teorema 4.1.** *A solução de (4.2.4) é dada por*

$$u(z, \lambda) = e^{-h(z, \lambda)} \int_{\mathbb{R}^2} G(z - \zeta, \lambda) e^{h(\zeta, \lambda)} f(\zeta) d(\zeta), \quad (4.2.9)$$

para toda  $f$  suficientemente suave e  $G(z, \lambda)$  dada por (4.2.7).

Demonstração: Segue do Lema 4.3 e por integração. ■

**Lema 4.4.** *A função de Green  $G(z, \lambda)$  é analítica em  $D^+$ , em  $D^-$  e em  $z = 0$ .*

Demonstração: Veja exercício 4.11. ■

**Lema 4.5.** *Suponhamos que  $\mu(z)$  e  $f(z)$  sejam suficientemente suaves. Então, a função  $h(z, \lambda)$  em (4.2.8) é analítica em  $D^+$ , em  $D^-$  e em  $z = 0$ .*

Demonstração: Veja Exercício 4.12. ■

**Teorema 4.2.** *A solução  $u(z, \lambda)$  de (4.2.9) satisfaz o **Passo 1**.*

Demonstração: Que  $u$  é analítica segue diretamente da analiticidade de  $G$  e  $h$  verificadas nos lemas acima. Usando (4.2.9), é fácil de verificar que  $\lambda u(z, \lambda)$  é limitado em  $D^-$ . ■

O teorema acima implica que a solução da equação do transporte  $u(z, \lambda)$ , estendida ao campo complexo, é um bom candidato a satisfazer o problema de Riemann-Hilbert.

**Passo 2:** O que queremos verificar agora é o que acontece com  $u(\cdot; \lambda)$  a medida que  $\lambda$  se aproxima de  $\gamma$  por cima (em  $D^-$ ) e por baixo (em  $D^+$ ). Esta condição é conhecida como a **condição de salto**.

Denotemos por  $\lambda = re^{i\theta}$ . Quando  $r \rightarrow \pm 1$ ,  $\lambda$  se aproxima de  $D^\pm$ . No sentido das distribuições [19], temos o seguinte limite

**Lema 4.6.** *Seja  $r - 1 \rightarrow \pm 0$ , a função de Green  $G(x, \lambda)$  satisfaz o seguinte limite*

$$G_\pm(\mathbf{x}, \theta) = \frac{\pm 1}{-2\pi i(-\boldsymbol{\theta}^\perp \cdot \mathbf{x} \pm i0 \operatorname{sign}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{x}))},$$

onde  $\pm 0$  denota o limite  $\pm \varepsilon \rightarrow 0$ .

Demonstração: Seja  $|\lambda| > 1$ , isto é,  $r = 1 + \varepsilon$  com  $\varepsilon > 0$ . Então

$$\begin{aligned} \pi G^-(z, re^{i\theta}) &= \frac{1}{re^{i\theta}\bar{z} - e^{-i\theta}z/r} = \frac{e^{-i\theta}}{(1 + \varepsilon)e^{2i\theta}\bar{z} - z(1 - \varepsilon) + o(\varepsilon)} \\ &= \frac{1}{-i \operatorname{Im}(e^{-i\theta}z) + \varepsilon \operatorname{Re}(e^{-i\theta}z) + o(\varepsilon)} = \frac{-i/2}{\mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\theta}^\perp + i\varepsilon\boldsymbol{\theta}) + o(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos o resultado. Idem para  $G^+$ . ■

A derivação do resultado passa pelo seguinte exercício [19], conhecido como fórmula de Plemelj:

**Exercício 4.2.** *Mostre que para qualquer  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  temos que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{ix + \varepsilon} dx = -i \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x} dx + \operatorname{sign}(\varepsilon) \pi f(0),$$

onde v.p. representa o valor principal de Cauchy.

**Lema 4.7.** *Seja  $\lambda = e^{i\theta}$ . Para toda função suave  $\psi$  temos que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} G^\pm(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \theta) \psi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \pm \frac{1}{2i} (\mathcal{H}R\psi)(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp) + (\mathcal{A}\psi)(\mathbf{x}),$$

onde  $\mathcal{H}$  é a Transformada de Hilbert como na Definição 3.1 e  $G^\pm(z, \theta)$  é a função de Green como no Lema 4.6.

Demonstração: Denotemos por  $\mathbf{x} = \sigma\boldsymbol{\theta}^\perp + \tau\boldsymbol{\theta}$  e  $\mathbf{y} = s\boldsymbol{\theta}^\perp + t\boldsymbol{\theta}$  para  $\sigma, \tau, s, t \in \mathbb{R}$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} G^+(\mathbf{y})\psi(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\psi((\sigma - s)\boldsymbol{\theta}^\perp + (\tau - t)\boldsymbol{\theta})}{is + i0 \operatorname{sign}(t)} ds dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} v.p. \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi((\sigma - s)\boldsymbol{\theta}^\perp + (\tau - t)\boldsymbol{\theta})}{is} ds \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}(t)\psi(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\theta})dt = \frac{1}{2i}(\mathcal{H}\mathcal{R}\psi)(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp) + (\mathcal{A}\psi)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

De forma análoga prova-se o limite  $G^-$  em  $D^-$ . ■

Segue disto o seguinte corolário

**Corolário 4.1.** *A função  $h(z, \lambda)$  definida em (4.2.8) satisfaz os seguintes limites*

$$h^\pm(z, \theta) = \pm \frac{1}{2\pi}(\mathcal{H}\mathcal{R}\mu)(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp) + (\mathcal{A}\mu)(\mathbf{x}).$$

Notemos que  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{A}$  envolve integração somente na direção  $\boldsymbol{\theta}$  e assim

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[u(\mathbf{x})v(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp)](s) &= v(s)\mathcal{R}[u](s), \\ \mathcal{A}[u(\mathbf{x})v(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp)](x) &= v(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp)\mathcal{A}[u](\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Da observação acima e dos resultados anteriores temos que

**Teorema 4.3.** *Os limites da função  $u(z, \lambda)$  são dados por*

$$\begin{aligned} u^\pm(\mathbf{x}, \theta) &= e^{(\pm \frac{i}{2}(\mathcal{H}\mathcal{R}\mu)(s) - \mathcal{A}\mu)} \left[ \pm \frac{i}{2} \mathcal{H} \left( e^{\pm \frac{1}{2i}(\mathcal{H}\mathcal{R}\mu)(s)} \mathcal{R}(e^{\mathcal{A}\mu}(f)) \right) \right] (s) \\ &\quad + e^{-\mathcal{A}\mu} \mathcal{A}(e^{\mathcal{A}\mu}(f))(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Demonstração: Basta unirmos os limites no Lema 4.7, Corolário 4.1 a equação (4.2.9). ■

Como observamos anteriormente, a quantidade  $\mathcal{R}(e^{\mathcal{A}\mu}f) = \mathcal{R}_\mu f(s)$  são as medidas (veja (1.2.28)). No entanto, como mostra o Teorema 4.3  $u^+$  e  $u^-$  não dependem somente dos dados. Estes dependem ainda de  $\mathcal{A}(e^{\mathcal{A}\mu}(f))(\mathbf{x})$ . Mas,  $u^+ - u^-$  depende somente dos dados.

Definimos

$$\varphi(\mathbf{x}, \theta) = (u^+ - u^-)(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \tag{4.2.11}$$

e os operadores

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\mu &= C_c \mathcal{H} C_c + C_s \mathcal{H} C_s \\ C_c g(s, \theta) &= g(s, \theta) \cos(\mathcal{H}\mathcal{R}\mu(s)/2), \\ C_s g(s, \theta) &= g(s, \theta) \sin(\mathcal{H}\mathcal{R}\mu(s)/2). \end{aligned}$$

Consideremos o operador adjunto de  $\mathcal{R}_\mu$  definido formalmente por

$$\mathcal{R}_{\mu,\theta}^* = e^{A\mu(\mathbf{x})}g(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp).$$

Do Teorema 4.3 temos que

$$i\varphi(\mathbf{x}, \theta) = \mathcal{R}_{-\mu,\theta}^* \mathcal{H}_\mu \mathcal{R}_\mu(\theta). \quad (4.2.12)$$

Observemos que  $i\varphi(\mathbf{x}, \theta)$  é uma função real da forma  $e^{-A\mu(x)}M(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp, \theta)$  para algum operador  $M$ . Ainda,  $\varphi$  satisfaz

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, \theta) + \mu\varphi(\mathbf{x}, \theta) = 0. \quad (4.2.13)$$

Isso vai refletir na fórmula de inversão.

**Passo 3:** Agora estamos prontos para obter uma Fórmula de Inversão. Para tal, lembremos que os Passos 1 e 2 são satisfeitos por  $u(z, \lambda)$ . Portanto  $u$  satisfaz a fórmula de Cauchy

$$u(z, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\varphi(\mathbf{x}, t)}{t - \lambda} dt \quad \lambda \in D^+ \cup D^-, \quad (4.2.14)$$

onde identificamos  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  com  $\varphi(\mathbf{x}, \theta)$  usando  $t = e^{i\theta}$ .

**Exercício 4.3.** *Mostre que, numa vizinhança de  $\lambda = 0$  vale a identidade*

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} u(\mathbf{x}, \lambda).$$

**Exercício 4.4.** *Verifique que  $u(\mathbf{x}, \lambda) = \mathcal{O}(\lambda)$  em  $D^+$ . Verifique ainda que  $\mu(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \lambda) \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow 0$ .*

**Exercício 4.5.** *Mostre que*

$$u(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\varphi(\mathbf{x}, t)}{t} dt + \frac{\lambda}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\varphi(z, t)}{t^2} dt + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

**Sugestão:** *Utilize a equação (4.2.14) e a expansão de  $1/(t - \lambda)$  em séries de potências.*

Dos exercícios acima segue a fórmula de reconstrução

**Teorema 4.4.** *Se  $\varphi$  depende dos dados  $\mathcal{R}_\mu f(\theta, s)$ , vale que*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(\mathbf{x}, t) \frac{dt}{t^2}, \quad (4.2.15)$$

com a seguinte condição de compatibilidade

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\varphi(\mathbf{x}, t)}{t} dt = 0.$$



Demonstração: Segue diretamente dos exercícios acima. ■

A fórmula de reconstrução acima não parece ser muito amistosa. O próximo resultado ajudará a melhorar o entendimento da mesma.

**Corolário 4.2.** *Seja  $g_\mu(\theta, s) = \mathcal{R}_\mu f(\theta, s)$  as medidas no modelo de SPECT e  $\varphi$  satisfazendo (4.2.13). Então,*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\theta}^\perp \cdot \nabla(\mathcal{R}_{\theta, -\mu}^* \mathcal{H}_\mu g)(\mathbf{x}, \theta) d\theta. \quad (4.2.16)$$

Demonstração: Denote  $t = e^{i\theta}$ . Então,  $dt = ie^{i\theta} d\theta$ . Assim, é fácil verificarmos que

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(\mathbf{x}, t) \frac{dt}{t^2} &= \int_0^{2\pi} \left( \boldsymbol{\theta}^\perp \cdot \nabla(i\varphi)(\mathbf{x}, \theta) + \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla\varphi(\mathbf{x}, \theta) \right) d\theta \\ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\varphi(\mathbf{x}, t)}{t} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\mathbf{x}, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

De (4.2.13) e (4.2.15) temos que

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla\varphi(\mathbf{x}, \theta) d\theta.$$

Finalmente, usando (4.2.12) o corolário está provado. ■

### 4.3 Exercícios

Uma boa fonte de referência para os exercícios deste capítulo é [4].

**Exercício 4.6.** *Mostre que  $|G(z, \lambda)| \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ .*

**Exercício 4.7.** *Mostre que, caso  $|\lambda| < 1$  o Jacobiano da transformação é dado por  $-J(\zeta)$ , onde  $J$  foi definido no exercício 4.1.*

**Exercício 4.8.** *Faça os detalhes do Lema 4.2.*

**Exercício 4.9.** *Faça os detalhes do Lema 4.3.*

**Exercício 4.10.** *Faça os detalhes do Teorema 4.1.*

**Exercício 4.11.** *Faça os detalhes do Lema 4.4.*

**Exercício 4.12.** *Faça os detalhes do Lema 4.5.*

**Exercício 4.13.** *Mostre que a fórmula de reconstrução (4.2.16) é igual a inversa da Transformada de Radon, quando  $\mu = 0$ .*

**Exercício 4.14.** *Deduza a fórmula de reconstrução no caso em que  $\mu(\mathbf{x})$  é constante.*

## Capítulo 5

# Tomografias por Difração e Aproximações de Born

Como discutimos na Seção 1.2, problemas relacionados com ultrassom e radar são modelados pela equação da onda, nos quais se conhece a onda refletida pelo objeto (espalhamento inverso) imerso no meio. O problema de recuperar propriedades do meio através de informações medidas em espalhamento inverso é muito difícil. Uma boa referência para entender quais as dificuldades envolvidas nestes modelos é [26].

### 5.1 Espalhamento Inversos em Uma Dimensão

Um modelo simples de entender e muito intuitivo é o modelo uni-dimensional. Vamos considerar a equação da onda (1.2.29) em uma dimensão, com termo forçante  $\delta(t)\delta(x-x_s)$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Esta é a distribuição de Dirac em  $t = 0$  e na posição  $x_0$ , [19].

Como verificamos na Subseção 1.2.3, no espaço das frequências, a equação da onda corresponde a equação de Helmholtz (1.2.33), com velocidade dada pela equação (1.2.32).

No caso uni-dimensional, a solução  $u_{in}$  da equação de Helmholtz (1.2.35), com condição de radiação como em (1.2.33), é dada por

$$u_{in}(x, \omega; \theta) = g(x - \theta, \omega) = \frac{-e^{ik|x-\theta|}}{2i k \pi}, \quad (5.1.1)$$

onde  $g(x, \omega)$  representa a função de Green para a equação de Helmholtz.

Pelo princípio de superposição, a solução da equação (1.2.36) é dada por

$$u_s(x, \omega; \theta) = \omega^2 \int_{\theta}^{\infty} \frac{\mu(x)}{c^2} (u_s - u_{in})(y, \omega) g(x - y, \omega) dy, \quad (5.1.2)$$

onde  $u_s$  representa os dados refletidos.

### 5.1.1 Aproximação de Born

A aproximação de Born para o problema de espalhamento inverso em uma dimensão consiste em considerar que  $\mu(x)$  é pequeno com relação a velocidade de espalhamento  $v(x)$ . Isto corresponde a uma linearização em torno da velocidade constante  $c$ . Deste modo, a quantidade  $\mu(x)u_s$  é da ordem de  $\mu^2$ . Portanto muito pequena de forma que pode ser desconsiderada no lado direito de (5.1.2). Substituindo  $u_{in}$  em (5.1.2) por sua expressão em (5.1.1) temos que

$$u_s(x_s, ck/2; \theta) = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(x)}{4} e^{ikx} dx \quad (5.1.3)$$

é uma boa aproximação para os dados refletidos  $u_s$ .

**Teorema 5.1.** *A quantidade  $\mu(x)$  é unicamente determinada por  $u_s$  em (5.1.3). Ainda, a reconstrução é estável.*

Demonstração: De fato, por (5.1.3),  $\mu(x)$  é dada pela Transformada de Fourier Inversa

$$\mu(x) = -\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} u_s(x_s, ck/2; \theta) dk.$$

Pelo Teorema 2.2,  $\mu(x)$  é unicamente determinado e a reconstrução é estável.

■

## 5.2 Espalhamento Inverso em Dimensão Dois ou Três

Nesta seção, faremos uma generalização da seção anterior, para dimensões dois e três. Como comentado anteriormente, o caso geral é muito complicado, assim utilizaremos uma aproximação de Born para obter uma fórmula de reconstrução.

### 5.2.1 Aproximação de Born

A aproximação de Born que estamos interessados nestas notas consiste em linearizar a equação (1.2.36) em torno da velocidade constante  $v(\mathbf{x}) = c$ . Em outras palavras, assumiremos que  $\mu(\mathbf{x})$  é muito pequeno em norma. Como o termo  $\mu(\mathbf{x})u_s$  é um termo de segunda ordem em (1.2.36) este pode ser desconsiderado. Desta forma a equação (1.2.36) fica

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) u_s(\mathbf{x}, \omega) &= -\mu(\mathbf{x})k^2 u_{in}(\mathbf{x}, \omega) \quad (5.2.4) \\ \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u_s(\mathbf{x}, \omega) - ik u_s(\mathbf{x}, \omega) &= o\left(|\mathbf{x}|^{-(n-1)/2}\right). \end{aligned}$$

**Lema 5.1.** *A equação (5.2.4) possui uma única solução dada por*

$$u_s(\mathbf{x}, \omega) = k^2 \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{y}) u_{in}(\mathbf{y}, \omega) G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y}, \quad (5.2.5)$$

onde  $G_n$  é a função de Green da equação

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) G_n(\mathbf{x}, \omega) &= \delta(\mathbf{x}) \\ \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u_s(\mathbf{x}, \omega) - ik u_s(\mathbf{x}, \omega) &= o\left(|\mathbf{x}|^{-(n-1)/2}\right), \end{aligned}$$

que é dada por

$$G_2(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} \widetilde{\mathcal{H}}_0(k|\mathbf{x}|), \quad G_3(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad (5.2.6)$$

onde  $\widetilde{\mathcal{H}}_0$  é a função de Hankel dada por

$$\widetilde{\mathcal{H}}_0(K|(x, y)|) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{K^2 - p^2}} e^{i(px + \sqrt{k^2 - p^2}y)} dy.$$

Demonstração: Segue facilmente do método de sobreposição. ■

## 5.2.2 Fórmula de Reconstrução

Lembramos que, matematicamente, conhecemos  $u_s$  no limite quando  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Assim, usando que

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| + \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y} + \mathcal{O}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle),$$

onde  $\mathcal{O}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)$  representa termos de ordem menor, temos que o valor de  $u_s$  como no Lema 5.1 é dado por

$$u_s(\mathbf{x}, \omega) = \frac{k^2 e^{ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{y}) e^{ik(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{x}_0)y} dy + \mathcal{O}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle). \quad (5.2.7)$$

Portanto, vemos de (5.2.7) que as medidas  $u_s$  podem ser escritas da forma

$$u_s(\mathbf{x}, \omega) = \frac{k^2 e^{ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} \hat{\mu}(k(\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\theta})) + \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|). \quad (5.2.8)$$

**Observação 5.1.** *Lembramos que  $\omega = ck$ . Assim, para uma onda plana a uma dada frequência  $\omega$ , isto é, em um dado número de onda  $k$ , numa direção  $\boldsymbol{\theta}$  a quantidade*

$$\hat{\mu}(k(\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\theta})) = \frac{k^2 e^{-ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} u_s(\mathbf{x}, \omega), \quad (5.2.9)$$

para  $|\mathbf{x}|$  suficientemente grande.

Portanto, cada nova medida nos fornece novas informações sobre a Transformada de Fourier de  $\mu(\mathbf{x})$ .

**Características Especiais:** Em dimensão dois, podemos observar os seguintes tipos de medidas distintas:

1. Medidas na direção  $\mathbf{x}$  tal que  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta} > 0$ . Estas medidas são conhecidas como medidas de transmissão, pois são as medidas de ondas que passaram pelo objeto a ser imageado.
2. Medidas na direção  $\mathbf{x}$  tal que  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta} < 0$ . Estas medidas são conhecidas como medidas de reflexão, pois são as medidas de ondas que são refletidas pelo objeto a ser imageado.

Em muitos casos só é possível obter acesso a um dos tipos de medidas acima.

### Medidas de Transmissão

Vamos analisar primeiro o caso em que temos acesso somente a medidas de transmissão como no Item (1). Ou seja, que temos acesso a  $\hat{\mu}(k(\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\theta}))$  como em (5.2.9) para  $\mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\theta} > 0$ . Em particular, para  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\theta}$ , temos  $\hat{\mu}(0)$ . Este é a média dos valores de  $\mu(\mathbf{x})$  no domínio.

**Lema 5.2.** *O problema inverso de Tomografia por Difração não possui única solução.*

Demonstração: De fato, como  $\mathbf{x}_0$  varia sobre  $\mathbb{S}^1$  tal que  $\mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\theta} > 0$ , obtemos o valor de  $\hat{\mu}(\mathbf{y})$  sobre o semicírculo passando pela origem e simétrico com relação a  $\boldsymbol{\theta}$ . Como  $\boldsymbol{\theta}$  varia sobre o disco unitário, temos que  $\hat{\mu}(k(\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\theta}))$  permanece no disco de raio  $\sqrt{2}k$ . Portanto, para cada  $k$  fixo, tudo o que podemos obter é  $\hat{\mu}(\mathbf{y})$  para  $\mathbf{y}$  tal que  $|\mathbf{y}| \leq \sqrt{2}K$ . ■

No caso tridimensional o resultado é similar.

### Fórmula de Reconstrução para Medidas de Transmissão

Como as frequências maiores que  $\sqrt{2}k$  não podem ser reconstruídas, vamos assumir que

$$\mu(\mathbf{x}) = (\mathcal{F}^{-1} \xi_{\sqrt{2}k} \hat{\mu})(\mathbf{x}). \quad (5.2.10)$$

onde  $\xi_{\sqrt{2}k} = 1$  se  $|\mathbf{y}| \leq \sqrt{2}k$  e zero caso contrário.

**Corolário 5.1.** *Sob a hipótese que  $\mu(\mathbf{y})$  é tal que  $|\mathbf{y}| \leq \sqrt{2}k$ , então o problema inverso em Tomografia por Difusão possui uma única solução. Esta solução é estável.*

Demonstração: Segue de (5.2.10) e do Teorema 2.2. ■

O próximo passo é obtermos uma fórmula de reconstrução. Vamos analisar o caso bi-dimensional.

Queremos é recuperar  $\mu(\mathbf{x})$ , conhecendo  $\hat{\mu}(\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\theta})$  com  $\mathbf{x}_0$  e  $\boldsymbol{\theta}$  em  $\mathbb{S}^1$ . Em outras palavras, queremos recuperar uma função de duas variáveis a partir de dados que dependem de duas variáveis também, a saber  $\mathbf{x}_0$  e  $\boldsymbol{\theta}$ .

Pela Transformada Inversa de Fourier, temos que

$$\mu(\mathbf{x}) = \frac{k^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} e^{ik\rho\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}} \hat{\mu}(k\rho\boldsymbol{\theta}) \rho d\rho d\boldsymbol{\theta}.$$

Notemos que, como  $\boldsymbol{\theta}$  varia sobre o círculo unitário, todos os pontos do círculo  $|\mathbf{y}| \leq \sqrt{2}k$  são identificados duas vezes pela variação de  $\mathbf{x}_0$ , uma vez quando  $\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp > 0$  e outra quando  $\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp \leq 0$ . Portanto, a informação contida em  $\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp > 0$  é suficiente. Tal informação pode ser parametrizada da seguinte maneira: Para um dado  $\boldsymbol{\theta}$ , seja  $\mathbf{x}_0$  parametrizado por

$$\mathbf{x}_0(\beta\boldsymbol{\theta}) = \text{sen}(\beta\boldsymbol{\theta}) + \cos(\beta\boldsymbol{\theta}^\perp), \quad 0 \leq \beta \leq \pi/2.$$

Desta parametrização obtemos que

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(k(\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\theta})) &= \hat{\mu}(k\rho(\beta) (\text{sen}(\beta - 1)\boldsymbol{\theta} + \cos(\beta)\boldsymbol{\theta}^\perp) (\rho(\beta))^{-1}) \\ &= \hat{\mu}(k\rho(\beta)R(\beta)\boldsymbol{\theta}), \end{aligned}$$

onde  $\rho(\beta) = \sqrt{2(1 - \cos(\beta))}$  e  $R(\beta)$  é a matriz de rotação (que depende de  $\beta$ ).

**Teorema 5.2.** *Para  $x_0 = \mathbf{x}_0(\beta, \boldsymbol{\theta})$  parametrizado como acima, temos a seguinte fórmula de reconstrução*

$$\mu(\mathbf{x}) = \frac{k^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} e^{ik\rho(\beta)\mathbf{x} \cdot R(\beta)\boldsymbol{\theta}} \hat{\mu}(k|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\theta}|)\text{sen}(\beta) d\beta d\boldsymbol{\theta}.$$

Demonstração: É simples e assim deixamos como exercício. ■

## Medidas de Reflexão: Algumas Observações

Para finalizar faremos algumas observações com relação ao caso de termos acesso a medidas de reflexão como no Item (2).

Seguindo os mesmos passos acima, podemos mostrar que não é possível recuperar o número de onda de  $\mu(\mathbf{x})$  para baixas frequência e nem para altas frequências. Em outras palavras, só é possível recuperar valores de  $\mathbf{y}$  que estejam no anel  $\sqrt{2}k < |\mathbf{y}| < 2K$ . Para valores que estão no anel acima, é possível obtermos uma fórmula de reconstrução como anteriormente. Este é um desafio interessante para o leitor. Para maiores detalhes consulte [4].

### 5.3 Exercícios

**Exercício 5.1.** *Mostre que (5.1.1) satisfaz a equação de Helmholtz (1.2.35) com a condição de radiação (1.2.33).*

**Exercício 5.2.** *Demonstre o Lema 5.1.*

**Exercício 5.3.** *Use o princípio da superposição para mostrar que a solução da equação (1.2.36) é dada por  $u_s$  como na equação (5.1.2), para o caso unidimensional.*

**Exercício 5.4.** *Faça os detalhes da demonstração do Corolário 5.1.*

**Exercício 5.5.** *Faça os cálculos na demonstração do Teorema 5.2.*

## Capítulo 6

# Tomografia por Fluorescência Óptica

Este capítulo é dedicado a obtenção de uma fórmula para recuperar  $f$  na equação (1.2.37), com uma fonte de espalhamento, a partir das medidas (1.2.40), em dimensão dois.

### 6.1 Uma Fórmula de Inversão Utilizando Séries de Neumann

Nossa abordagem é muito simplificada, mas dá algumas ideias das técnicas a serem aplicadas. Estas simplificações dão origem a uma abordagem que permite utilizar a série de Neumann para garantir uma fórmula de inversão. Como sub-produto do resultado, temos um algoritmo iterativo para a inversão.

Iniciaremos esta seção definindo a transformada raio

$$Sg(\mathbf{x}, \theta) = \int_{-\infty}^0 g(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\theta}) ds, \quad (6.1.1)$$

para  $g \in L^1(\mathbb{R})$  e  $\boldsymbol{\theta} = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{S}^1$ , para  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Temos que

**Lema 6.1.** *A função  $v(\mathbf{x}, \theta) = e^{A\mu}(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \theta)$  satisfaz a seguinte equação integral*

$$v(\mathbf{x}, \theta) = [Se^{A\mu}Ke^{-A\mu}v](\mathbf{x}, \theta) + [Se^{A\mu}f](\mathbf{x}, \theta). \quad (6.1.2)$$

Demonstração: É fácil e assim deixado para o leitor. ■

Definimos  $T = Se^{A\mu}Ke^{-A\mu}$ , temos que a equação (6.1.2) pode ser reescrita por

$$(I - T)v(\mathbf{x}, \theta) = [Se^{A\mu}f](\mathbf{x}, \theta). \quad (6.1.3)$$



**Lema 6.2.** *Suponhamos que exista uma norma  $\|\cdot\|$  (que não vamos definir nestas notas) tal que  $\|T\| < 1$ . Então*

$$v(\mathbf{x}, \theta) = [Se^{A\mu}f](\mathbf{x}, \theta) + [Se^{A\mu}Ke^{-A\mu}v](I - T)^{-1}Se^{A\mu}f(\mathbf{x}, \theta).$$

Demonstração: Sobre a hipótese de que  $\|T\| < 1$ , temos que  $(I - T)$  é inversível. O resultado agora segue de (6.1.2) e de (6.1.3). ■

Sob certas hipóteses, o próximo teorema produz uma fórmula de inversão. Na verdade, mais que isso, garante um método iterativo convergente e estável para obtermos  $f$ .

**Teorema 6.1.** *Definimos  $Z = [Se^{A\mu}Ke^{-A\mu}v](I - T)^{-1}Se^{A\mu}$ . Sob a hipótese de que  $\|Z\|$  é suficientemente pequena, vale a seguinte fórmula de reconstrução*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} [-\mathcal{N}\mathcal{R}Z]^j \mathcal{N}g(\mathbf{x}). \quad (6.1.4)$$

onde  $[\mathcal{N}g](x)$  é o operador definido em (4.2.16).

Demonstração: Escrevemos  $\mathbf{x} = s\boldsymbol{\theta}^\perp + t\boldsymbol{\theta}$ . Fazendo  $t \rightarrow \infty$  em (1.2.27) temos que

$$g(\theta, s) = \mathcal{R}_\mu f(\theta, s) + \mathcal{R}_\mu Z f(\theta, s).$$

Aplicando o operador  $\mathcal{N}$  de ambos os lados da igualdade acima temos que

$$f(\mathbf{x}) + \mathcal{N}\mathcal{R}_\mu Z f(\mathbf{x}) = \mathcal{N}g(\mathbf{x}).$$

Utilizando a hipótese que a norma do operador  $Z$  é suficientemente pequena, temos que o operador  $I - (-\mathcal{N}\mathcal{R}_\mu Z)$  é invertível e cuja inversa pode ser dada pela série de Neumann (6.1.4). ■

A hipótese feita no Teorema 6.1, para garantir a inversa do operador  $(I - Z)$ , está relacionada com o fato que o campo de espalhamento seja pequeno. Assim, essa é uma hipótese que não é muito absurda do ponto de vista físico.

A fórmula de inversão obtida no Teorema 6.1 garante o seguinte algoritmo iterativo para a reconstrução de  $f$ :

**Corolário 6.1.** *Sob as hipóteses do Teorema 6.1 existe um algoritmo iterativo para recuperar  $f$  no problema inverso relacionado a Tomografia por Fluorescência óptica.*

Demonstração: Definimos  $f^0(\mathbf{x}) = \mathcal{N}g$ . Para cada  $j \geq 0$ , defina  $u_s^j$  a solução do seguinte problema

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \nabla u_s^j(\mathbf{x}, \theta) + \mu u_s^j(\mathbf{x}, \theta) = K u_s^j(\mathbf{x}, \theta) - f^j(\mathbf{x}). \quad (6.1.5)$$

Atualizamos  $f$  por

$$f^{j+1}(\mathbf{x}) = \mathcal{N}g(\mathbf{x}) - \mathcal{N}\mathcal{R}_\mu e^{A\mu} K u_s^j(\mathbf{x}). \quad (6.1.6)$$

Observamos que, se o espalhamento é pequeno, como assumido no Teorema 6.1,  $f^j$  converge (em alguma norma adequada) para  $f$ . ■

## 6.2 Exercícios

**Exercício 6.1.** *Demonstre o Lema 6.1.*

**Exercício 6.2.** *Mostre que o operador  $Z$  definido no Teorema 6.1 é um operador linear. Dê condições sobre as normas de  $S, K$  e  $T$  para que  $Z$  seja um operador limitado.*

**Exercício 6.3.** *Dê condições na norma de  $S, K$  e  $T$  tal que  $\|Z\| < 1$ .*

**Exercício 6.4.** *Mostre que, se  $\|Z\| < 1$ , então  $I - Z$  é um operador invertível e a inversa pode ser dada pela série de Neumann.*

**Exercício 6.5.** *Faça os detalhes da demonstração do Corolário 6.1.*



## Capítulo 7

# Tomografia por Impedância Elétrica - EIT

Na Seção 1.2, introduzimos o problema de EIT. Neste capítulo nos dedicaremos a responder as seguintes perguntas:

1. Quantos dados necessitamos conhecer, i.e., se o parâmetro  $\mu$  em (1.2.43) é unicamente determinado pelo conhecimento de alguns pares de dados  $(f, \Lambda_\mu(f) = g)$  sobre a fronteira ou pelo operador (DpN)?
2. O problema inverso é mal posto no sentido de Hadamard?

Os resultados de identificabilidade e estabilidade que apresentaremos podem ser encontrados em [46, 43, 26]. Existem resultados mais modernos e que generalizam os que apresentaremos. Veja referências em [43, 46].

Em suma, os resultados que vamos apresentar são:

1. **Unicidade:** Se  $\Lambda_{\mu_1} = \Lambda_{\mu_2}$ , então  $\mu_1 = \mu_2$ .
2. **Estabilidade:** Se  $\Lambda_{\mu_1}$  está próximo de  $\Lambda_{\mu_2}$ , então  $\mu_1$  e  $\mu_2$  estão próximos.

Neste caso, vamos definir o operador de medidas

$$\mathcal{M}(\mu)f := \Lambda_\mu(f) = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = g. \quad (7.0.1)$$

onde  $u \in H^1(\Omega)$  é a única solução de (1.2.43).

**Observação 7.1.** *Temos que deixar claro a definição do operador de medidas. Estamos assumindo que todos os pares de dados Dirichlet-Neumann  $(f, g)$ . Em outras palavras, conhecemos todo o operador Dirichlet-para-Neumann  $\Lambda_\mu$ . Esta hipótese não é razoável em termos práticos.*

3. **Dados parciais:** Se  $\Gamma$  é uma parte da fronteira de  $\Omega$  e se  $\Lambda_{\mu_1}(f) = \Lambda_{\mu_2}(f)$  restrito a  $\Gamma$ , então  $\mu_1 = \mu_2$ .

**Observação 7.1.** *O problema inverso de reconstruir a condutividade elétrica é altamente não linear e mal posto, i.e., o operador não depende continuamente dos dados (veja [9, 8, 3, 26]).*

Partindo do estudo feito por Calderón em 1980, intensa pesquisa nessa linha foi estabelecida. Já existe uma quantidade significativa de resultados e ainda muitos problemas em aberto. Para o caso de  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  e condutividades regulares, isto é, pertencentes a  $C^2(\bar{\Omega})$ , os seguintes resultados são conhecidos. As demonstrações dos resultados abaixo podem ser encontradas em [43] e referências.

Para **unicidade:**

**Teorema 7.1** (Sylvester-Ulmann 1987). *Se  $\Lambda_{\mu_1}(f) = \Lambda_{\mu_2}(f)$ , então  $\mu_1 = \mu_2$  em  $\Omega$ .*

No contexto de **estabilidade:**

**Teorema 7.2** (Alessandrini 1988). *Seja  $\mu_j \in H^s(\Omega)$  para  $s > n/2$  e assumamos que  $\|\mu_j\|_{H^s(\Omega)} \leq C$  e  $1/C \leq \mu_j \leq C$  para  $j = 1, 2$ . Então*

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c |\log \|\mathcal{M}_{\mu_1} - \mathcal{M}_{\mu_2}\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Omega), H^{-1/2}(\Omega))}|^{-\delta},$$

para algum  $\delta > 0$

O caso de unicidade com **dados parciais** os resultados são bem mais recentes e devem-se a Kenig-Sjöstrand-Uhlmann 2007.

**Teorema 7.3.** *Assuma que  $\Omega$  é convexo e  $\Gamma$  é qualquer subconjunto aberto de  $\partial\Omega$ . Se  $\Lambda_{\mu_1}(f) = \Lambda_{\mu_2}(f)$  em  $\Gamma$  para toda  $f \in H^{1/2}(\Omega)$ , e se  $\mu_1|_{\partial\Omega} = \mu_2|_{\partial\Omega}$ , então  $\mu_1 = \mu_2$  em  $\Omega$ .*

Provaremos alguns dos resultados acima mencionados logo abaixo.

## 7.1 Transformação na Equação de Helmholtz

Para mostrar que a aplicação  $\mu \mapsto \Lambda_\mu$  é injetiva (em outras palavras, que se conhecemos a aplicação (DpN) é o suficiente para identificar unicamente a condutividade), vamos transformar o problema (1.2.43) na equação de Helmholtz.

Definimos

$$v = \mu^{1/2}u. \tag{7.1.2}$$

Com a transformação (7.1.2) temos que

$$u = \mu^{-1/2}v, \quad \nabla u = -1/2\mu^{-2/3}v\nabla\mu + \mu^{-1/2}\nabla v.$$

Substituindo em (1.2.43), temos

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\mu \nabla u) &= \nabla \cdot (-1/2\mu^{-1/2}v\nabla\mu + \mu^{1/2}\nabla v) \\
 &= 1/4\mu^{-3/4}v\nabla\mu \nabla\mu - 1/2\mu^{-1/2}\nabla v\nabla\mu - 1/2\mu^{-1/2}v\Delta\mu \\
 &\quad + 1/2\mu^{-1/2}\nabla v\nabla\mu + \mu^{-1/2}\Delta v \\
 &= \mu^{-1/2}\Delta v + (1/4\mu^{-3/4}\nabla\mu \nabla\mu - 1/2\mu^{-1/2}\Delta\mu)v.
 \end{aligned}$$

Assim, se  $u$  é uma solução da equação (1.2.43), então  $v$  dado por (7.1.2) é uma solução da equação de Helmholtz

$$\Delta v + bv = 0, \quad b = (1/4\mu^{-2}|\nabla\mu|^2 - 1/2\mu^{-1}\Delta\mu). \quad (7.1.3)$$

O próximo passo é mostrar que, conhecendo o operador (DpN)  $\Lambda_\mu$ ,  $\mu \in \frac{\partial\mu}{\partial\eta} = 0$  na fronteira de  $\Omega$ , podemos calcular o operador de Newmann-para-Dirichlet  $\Lambda_\mu^S$  para a equação (7.1.3).

Defina o operador  $G : C^2(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow C(\Omega, \mathbb{R})$  dado por  $G(\mu) = b$ , onde  $b$  é definido por (7.1.3).

O próximo teorema mostra que  $b$  determina unicamente  $\mu$ .

**Teorema 7.4.** *Dado  $\mu_0 \in C(\partial\Omega)$ , para qualquer  $b \in \text{Im}(G)$ , existe um único  $\mu \in C^2(\Omega)$  com  $\mu(x) = \mu_0$  e  $\frac{\partial\mu}{\partial\eta}(x) = 0$  para  $x \in \partial\Omega$  e  $b$  é definido por (7.1.3).*

Demonstração: Existência é óbvia para  $b \in \text{Im}(G)$ .

Vamos provar unicidade. Sejam  $\mu_1$  e  $\mu_2$  satisfazendo as hipótese, com  $G(\mu_1) = G(\mu_2)$ . Então,

$$\begin{aligned}
 0 &= G(\mu_1) - G(\mu_2) = 1/4(\mu_1^{-2}|\nabla\mu_1|^2 - \mu_2^{-2}|\nabla\mu_2|^2) - 1/2(\mu_1^{-1}\Delta\mu_1 - \mu_2^{-1}\Delta\mu_2) \\
 &= 1/4(\mu_1^{-2} - \mu_2^{-2})|\nabla\mu_1|^2 + 1/4(|\nabla\mu_1|^2 - |\nabla\mu_2|^2)\mu_2^{-2} \\
 &\quad - 1/2(\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1})\Delta\mu_1 - 1/2(\Delta\mu_1 - \Delta\mu_2)\mu_2^{-1} \\
 &= -\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)}{4\mu_1^2\mu_2^2}|\nabla\mu_1|^2 + \frac{1}{4\mu_2^2}(\nabla\mu_1 + \nabla\mu_2)(\nabla\mu_1 - \nabla\mu_2) \\
 &\quad + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_1\mu_2}\Delta\mu_1 - \frac{1}{2\mu_2}(\Delta\mu_1 - \Delta\mu_2).
 \end{aligned}$$

Assim,  $w = \mu_1 - \mu_2$  satisfaz a seguinte equação homogênea

$$\begin{cases} \Delta w - \frac{\nabla\mu_1 - \nabla\mu_2}{2\mu_2}\nabla w - \left(\frac{\Delta\mu_1}{\mu_1} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_1^2\mu_2}|\nabla\mu_1|^2\right)w = 0, & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema do Máximo (veja [19]) temos que  $w = 0$ . ■

## 7.2 Identificabilidade para a Equação de Helmholtz

Nesta seção mostraremos um resultado de identificabilidade que é preliminar para a demonstração do resultado para o problema de EIT.

**Teorema 7.5.** *Existe no máximo um  $b \in L^\infty(\Omega) \cap \text{Im}(G)$  que gera uma aplicação de Neumann-para-Dirichlet  $\Lambda_b^S$  para a equação de Helmholtz (7.1.3).*

Demonstração: Sejam  $b^1, b^2 \in L^\infty(\Omega) \cap \text{Im}(G)$  tais que  $\Lambda_{b^1}^S = \Lambda_{b^2}^S$ . Em outras palavras, os dados de Dirichlet da respectiva solução  $v^j(g)$  de (7.1.3), para o mesmo dado de Neumann  $g \in C^2(\partial\Omega)$  e normalização  $\int_\Omega \sqrt{G^{-1}(b^j)} v^j(g) dx = 0$ , coincidem.

Seja  $v^1$  solução de (7.1.3) e dados de Neumann  $g = \frac{\partial v^1}{\partial \eta}$ . Defina  $w := v^2(g) - v^1$ . Então  $w$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w + b^2 w = (b^1 - b^2)v^1, & \text{em } \Omega \\ w = 0, & \text{na } \partial\Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja  $v^2$  uma solução qualquer de (7.1.3). Então, usando a Fórmula de Green (veja [19] - integração por partes)

$$\begin{aligned} \int_\Omega (b^1 - b^2)v^1 v^2 dx &= \int_\Omega (\Delta w + b^2 w)v^2 dx \\ &= - \int \nabla w \nabla v^2 dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \eta} v^2 d\hat{x} + \int_\Omega b^2 w v^2 dx \\ &= \int w \Delta v^2 dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v^2}{\partial \eta} w d\hat{x} + \int_\Omega b^2 w v^2 dx \\ &= \int_\Omega (\Delta v^2 + b^2 v^2) w dx = 0, \end{aligned}$$

uma vez que  $v^2$  é uma solução da equação de Helmholtz (7.1.3). Pelo Teorema 2.4  $b^1 = b^2$ . ■

## 7.3 Identificabilidade para o Problema de EIT

Para provar que a condutividade  $\mu$  é unicamente determinada pela aplicação  $\Lambda_\mu$ , temos que assumir que  $\mu$  é conhecido na  $\partial\Omega$  e que a derivada normal de  $\mu$  na fronteira de  $\Omega$  é zero. Isso é inteiramente justificado se estamos analisando um corpo, onde o material em volta da fronteira é conhecido.

**Teorema 7.6.** *Dado  $\mu_0 \in C^2(\partial\Omega)$ , existe somente um  $\mu \in C^2(\Omega)$  que satisfaz  $\mu_{\partial\Omega} = \mu_0$ ,  $\eta \cdot \nabla \mu_{\partial\Omega} = 0$  que gera uma aplicação Neumann-para-Dirichlet  $\Lambda_\mu$ .*

Demonstração: Sejam  $\mu_1, \mu_2 \in C^2(\Omega)$  satisfazendo as hipóteses do teorema, tal que  $\Lambda_{\mu_1} = \Lambda_{\mu_2}$ . Defina  $b^j = G(\mu_j)$  como em (7.1.3).

Para um dado  $g \in C^2(\partial\Omega)$  arbitrário, tome  $v^2(g)$  solução de (7.1.3) com dado de Neumann  $g = \frac{\partial v^j(g)}{\partial \eta}$  e a normalização  $\int_{\Omega} \sqrt{G^{-1}(b^j)} v^j(g) dx = 0$ .

Temos que mostrar que  $\Lambda_{\mu_1} = \Lambda_{\mu_2}$  implica que os dados de Dirichlet  $v^1(g)_{\partial\Omega} = v^2(g)_{\partial\Omega}$ .

Lembremos que  $u^j = (\mu_j)^{1/2} v^j(g)$  é uma solução da equação 1.2.43 e os dados de Neumann na fronteira coincidem:

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{\partial u^1}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} (\mu_1)^{-1/2} \underbrace{\frac{\partial \mu_1}{\partial \eta}}_{=0} v^1 + \underbrace{(\mu_1)^{1/2}}_{=(\mu_0)^{1/2}} \underbrace{\frac{\partial v^1(g)}{\partial \eta}}_{=g} \\ &= \frac{1}{2} (\mu_2)^{-1/2} \underbrace{\frac{\partial \mu_2}{\partial \eta}}_{=0} v^2 + \underbrace{(\mu_2)^{1/2}}_{=(\mu_0)^{1/2}} \underbrace{\frac{\partial v^2(g)}{\partial \eta}}_{=g} = \mu_2 \frac{\partial u^2}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\Lambda_{\mu_1} = \Lambda_{\mu_2}$  implica que  $u^1 = u^2$  na fronteira de  $\Omega$ . Como por hipótese  $\mu_1 = \mu_2$  na fronteira, de  $u^j = (\mu_j)^{1/2} v^j(g)$  temos imediatamente que  $v^1(g) = v^2(g)$  na fronteira. Como  $g$  é arbitrário, temos que  $\Lambda_{b^1} = \Lambda_{b^2}$ . Pelo Teorema 7.5, segue que  $b^1 = b^2$ . ■

## 7.4 Resultados de Estabilidade para problema de EIT

Nesta seção provaremos o resultado de estabilidade enunciado no Teorema 7.2. Para tal, primeiro consideraremos a diferença  $\mathcal{M}_{\mu_1} - \mathcal{M}_{\mu_2} = \Lambda_{\mu_1} - \Lambda_{\mu_2}$ . Faremos estimativas primeiramente com relação a  $\Lambda_b$ . Sejam  $u_j$  para  $j = 1, 2$  respectivas soluções de  $(\Delta - b_j)u_j = 0$ , para o respectivo dado de Dirichlet  $f_j$ . Pela equação (2.3.22), com escolha de  $\xi_1 - \xi_2 = ik$  temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} e^{-ikx} (b_1 - b_2) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} e^{-ikx} (b_1 - b_2) (\xi_1 + \xi_2 + \xi_1 \xi_2) dx \right| \\ &+ \left| \int_{\partial\Omega} (\Lambda_{b_1} - \Lambda_{b_2}) [f_1 f_2] dx \right| \tag{7.4.4} \\ &\leq C/|l| + \|\Lambda_{b_1} - \Lambda_{b_2}\| \|f_1\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|f_2\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ &\leq C/|l| + \|\Lambda_{b_1} - \Lambda_{b_2}\| \|u_1\|_{H^1(\Omega)} \|u_2\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

**Observação 7.2.** *Notemos que a estimativa acima reflete o quanto o problema de EIT é mal-posto.*

Definimos  $\delta b = b_1 - b_2$ . Da estimativa (7.4.4) obtemos uma estimativa para  $\widehat{\delta b}(k)$ , uniforme em  $k$ , haja visto que o primeiro termo na estimativa mencionada é a Transformada de Fourier de  $\delta b$ . Escolhemos  $|l| = \ln(\varepsilon^{-\theta/C})$



para  $0 < \theta < 1$ . Assim,  $e^{C|l|} = \varepsilon^{-\theta}$ . Tomando  $\varepsilon = \min\{1, \|\Lambda_{b_1} - \Lambda_{b_2}\|\}$  em combinação com a estimativa (7.4.4), temos que

$$|\widehat{\delta b}(k)| \leq C|\ln(\varepsilon)|^{-1}. \quad (7.4.5)$$

Como os parâmetros são assumidos serem limitados e com suporte compacto contido em  $\Omega$ , temos que  $\delta b \in L^2(\Omega)$  (e assim também em  $H^{-s}(R^n)$  para  $s > 0$ ) e  $\|\delta b\|_{L^2(\Omega)} \leq E$ . Seja  $k_0 > 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|\delta b\|_{H^{-s}(R^n)} &= \int_R k^{-2s} |\widehat{\delta b}|^2 dk = \int_{|k| < k_0} k^{-2s} |\widehat{\delta b}|^2 dk + \int_{|k| > k_0} k^{-2s} |\widehat{\delta b}|^2 dk \\ &\leq k_0^n (C|\ln(\varepsilon)|^{-1})^2 + k_0^{-2s} E^2. \end{aligned}$$

Tomando  $k_0 = (E/C|\ln(\varepsilon)|^{-1})^{2/(n+2s)}$  (usando Parseval e a estimativa (7.4.4)) obtemos que

$$\|b_1 - b_2\|_{H^{-s}(R^n)} \leq C E^{n/(n+2s)} |\ln(\varepsilon)|^{2s/(n+2s)}. \quad (7.4.6)$$

Finalmente, vamos traduzir a estimativa (7.4.6) em termos de  $\mu$ . Primeiramente, notemos que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mu_1 \nabla ((\mu_2 - \mu_1)/\mu_1)^{1/2}) &= (b_1 - b_2)(\mu_1 \mu_2)^{1/2} \quad \text{em } \Omega, \\ ((\mu_2 - \mu_1)/\mu_1)^{1/2} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

Notemos que esta é uma equação elíptica em  $((\mu_2 - \mu_1)/\mu_1)^{1/2}$  com termo de fonte  $(b_1 - b_2)(\mu_1 \mu_2)^{1/2}$ . Como  $0 < \underline{c} \leq \mu_1, \mu_2 \leq \bar{c} < \infty$ , temos das estimativas de regularidade elíptica (veja [19]) que

$$\bar{c}^{(-1/2)} \|(\mu_1 - \mu_2)^{1/2}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|(b_1 - b_2)\|_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (7.4.8)$$

Juntando as estimativas recentes e a definição de  $\varepsilon$ , temos que

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{H^1(\Omega)} \leq C |\ln(\varepsilon)|^{-\delta}, \quad (7.4.9)$$

para  $\delta = 2/(2+n)$ . Usando a imersão contínua de  $H^s(\Omega)$  em  $H^1(\Omega)$  e resultados de interpolação (veja [19]), concluímos que a estimativa (7.4.9) continua válida em  $H^\tau(\Omega)$  para algum  $n/2 \leq \tau < s$ . Para concluir, basta utilizar a imersão contínua de  $L^\infty(\Omega)$  em  $H^\tau(\Omega)$  (veja [19]).

**Observação 7.3.** *Para finalizar, notamos que boa parte das estimativas acima valem para  $\mu$  menos suave. Já a restrição na dimensão está intimamente relacionado com a imersão de contínua de  $L^\infty(\Omega)$  em  $H^\tau(\Omega)$ .*

## 7.5 Exercícios

Boa parte dos exercícios deste Capítulo são fundamentais para completar os argumentos nas demonstrações feitas no texto. Assim, sugerimos ao leitor que, durante a leitura do texto complete os detalhes das demonstrações, os quais são isomorfos a resolução dos exercícios aqui propostos.

**Exercício 7.1.** *Assuma que  $\Omega$  é uma região simplesmente conexa. Prove que, se um campo de vetores  $\vec{E}$  satisfaz (1.2.42), então existe uma função  $u$  tal que  $\nabla u = \vec{E}$ .*

*A função  $u$  do exercício é chamada de função potencial.*

**Exercício 7.2.** *Prove que  $\nabla \cdot (\text{rot } \vec{H}) = 0$ , para qualquer que seja o campo vetorial  $\vec{H}$  suficientemente diferenciável.*

**Exercício 7.3.** *Use o Teorema 1.2 para mostrar que o operador  $(DpN)$  como em (1.2.45) está bem definido, é linear e limitado.*

**Exercício 7.4.** *Refaça os detalhes do seguinte argumento. Se  $u$  é uma solução da equação (1.2.43), então  $v$  dado por (7.1.2) é uma solução da equação de Helmholtz (7.1.3).*

**Exercício 7.5.** *Seja  $v^1$  solução de (7.1.3) e dados de Neumann  $g = \frac{\partial v^1}{\partial \eta}$ . Defina  $w := v^2(g) - v^1$ . Mostre que  $w$  satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta w + b^2 w = (b^1 - b^2)v^1, & \text{em } \Omega, \\ w = 0, & \text{na } \partial\Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Exercício 7.6.** *Estabeleça a imersão contínua de  $L^\infty(\Omega)$  em  $H^r(\Omega)$ , em termos da inclusão de  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ . Veja [19]. Comente por que os resultados da Seção 7.4 não são verdadeiros caso a imersão acima não seja verdadeira.*



## Capítulo 8

# Regularização para Problemas Inversos: Teoria Linear

Passaremos a desenvolver as chamadas *Estratégias ou Métodos de Regularização* para Problemas Inversos. Sempre que procuramos solucionar um Problema Inverso, temos que contornar empecilhos como instabilidade e mal-condicionamento (má-colocação). Exemplos desta situação foram apresentados na Seção 1.1.2.

A maneira natural de solucionar um problema do tipo (1.0.2) (para dados exatos ou para dados perturbados por ruído) é inverter o operador de medidas  $\mathcal{M}$ . Mas, como foi exemplificado e como acontece na prática, nos deparamos muitas vezes (quase sempre) com operadores que não possuem inversa. Ou, se a inversa existe, esta é mal-condicionada (no caso de problemas em dimensão finita) ou ilimitada (no caso de dimensão infinita). Assim, o axioma de dependência contínua dos dados falha, produzindo soluções inadequadas para o problema.

Neste capítulo nos deteremos na teoria linear, em que assumiremos que a aplicação  $\mathcal{M}$  é linear. Por simplicidade, no que segue, denotaremos por  $x = (\mu, f)$ . Portanto, analisaremos a teoria de regularização para operadores  $Ax := \mathcal{M}(\mu, f)$  que sejam lineares em  $x$ . O estudo do método de regularização para problemas não lineares pode ser encontrado em [8, 15, 17, 44].

### 8.1 O Conceito de Regularização

Denominamos por *estratégia de regularização* o artifício matemático<sup>1</sup> de obtermos uma solução aproximada, digamos  $x_\alpha^\delta$ , de maneira **estável** e que **convirja** (em topologias adequadas), quando o nível de ruído converge para zero, para a solução  $x^\dagger$  do problema inverso considerado. Além disso, o parâmetro  $\alpha$  deve ser escolhido de maneira apropriada (seja lá o que isso signifique). Em

---

<sup>1</sup>Nós, matemáticos, gostamos de denominar os truques, as estratégias e outros artifícios por **métodos**.

termos gerais, uma *estratégia ou método de regularização* consiste em aproximar uma solução  $x^\dagger$  de um problema mal posto (1.0.2) por uma família (a um parâmetro  $\alpha$ ) de problemas bem postos. Mais precisamente:

**Definição 8.1.** *Sejam  $A : X \rightarrow Y$  um operador linear e limitado e  $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ . Para todo  $\alpha \in (0, \alpha_0)$ , seja*

$$R_\alpha : Y \rightarrow X$$

*um operador contínuo (não necessariamente linear). A família  $\{R_\alpha\}$  é chamada de uma **regularização** ou **uma família de operadores de regularização** (para  $A^\dagger$ ) se, para todo  $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ , existir uma regra para escolha do parâmetro  $\alpha := \alpha(\delta, g^\delta)$  tal que*

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \{\|R_\alpha g^\delta - A^\dagger g\| : g^\delta \in Y, \|g - g^\delta\| \leq \delta\} = 0 \quad (8.1.1)$$

*é satisfeita para  $\alpha := \alpha(\delta, g^\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ .*

**Observação 8.1.** *Note que não estamos requerendo que a família de operadores de regularização  $\{R_\alpha\}$  seja de operadores lineares. No caso em que  $\{R_\alpha\}$  é linear, então dizemos que o método de regularização é linear.*

**Definição 8.2.** *Uma estratégia de regularização  $(R_\alpha, \alpha)$  é dita **convergente** se  $x_\alpha := R_\alpha g$  converge para  $x^\dagger$ .*

A arte de aplicar métodos de regularização está sempre relacionada com o compromisso entre precisão e estabilidade. Ou seja, procuramos por aproximações  $x_\alpha^\delta$  de  $x^\dagger$ , que dependam continuamente dos dados com ruído  $g^\delta$  (estabilidade) e que converjam para  $x^\dagger$ , se o nível de ruído  $\delta$  convergir para zero. Aliado a isso tudo, o parâmetro de regularização  $\alpha$  deve ser escolhido de forma adequada. Existem basicamente duas formas de escolha do parâmetro de regularização. Estas formas de escolha para  $\alpha$  ficarão mais claras logo abaixo.

Queremos enfatizar que um método de regularização consiste:

- a) de uma estratégia para aproximar o operador inverso  $A^{-1}$  de maneira a evitar o mal condicionamento
- b) de uma regra para escolha de parâmetros de regularização, no sentido que, se o parâmetro de regularização é escolhido de acordo com essa regra, então a solução regularizada converge (em alguma norma) para a solução do problema, quando o nível de ruído tende para zero.
- c) do conceito de solução que estamos considerando e da topologia em que esse conceito de solução está imerso.

## 8.2 Resultados de Convergência

Diante ao apresentado até então, surgem as seguintes questões:

- (i) Como construir uma família de operadores de regularização?
- (ii) Como obter uma escolha de parâmetros para que um tal método de regularização convirja?
- (iii) É possível obtermos alguma performance “ótima” nesse caminho?

Para responder as questões (i) e (ii) acima, apresentaremos, logo abaixo, alguns métodos de regularização, divididos em duas classes: contínuos (por exemplo o Método de Tikhonov) e iterativos (por exemplo o Método de Landweber). Estes respondem, pelo menos em parte, as primeiras duas questões.

Para responder a (iii), ou seja, para assegurar que um método de regularização aplicado ao problema inverso (1.0.2) converge a uma solução e para expressar essa convergência em termos de taxas, é necessário obtermos algumas informações *a-priori* sobre a solução exata  $x^\dagger$  ou sobre  $g$ . Essas informações *a-priori* são formuladas em termos das *condições de fonte* (*source conditions*).

Como o próprio nome sugere, uma condição de fonte é algum tipo de informação *a priori* sobre a solução do problema. Em geral, aparece na forma de uma representação da solução  $x^\dagger$  em termos da imagem do operador  $A^*$  (ou  $A$ ), ou como potências da imagem do mesmo [7, 8, 22, 17, 29].

No nosso contexto, podemos dizer o seguinte:

**Teorema 8.1.** *Seja  $A : X \rightarrow Y$  linear e limitado.*

*i) Se  $x \in \text{Im}(A^*)$  e  $\|Ax\| \leq \tau$ , então*

$$\|x\| \leq C_1 \tau^{\frac{1}{2}}. \tag{8.2.2}$$

*ii) Se  $x \in \text{Im}(A^*A)$  e  $\|Ax\| \leq \tau$ , então*

$$\|x\| \leq C_2 \tau^{\frac{2}{3}}. \tag{8.2.3}$$

Demonstração: *i)* De  $x \in \text{Im}(A^*)$ , segue que existe  $g \in Y$ , com  $x = A^*g$  e  $\|g\| \leq C_1^{\frac{1}{2}}$ . Assim,

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x, A^*g \rangle = \langle Ax, g \rangle \leq \|Ax\| \|g\| \leq C_1^{\frac{1}{2}} \tau.$$

*ii)* De  $x \in \text{Im}(A^*A)$ , segue que existe  $z \in X$ , com  $x = A^*Az$  e  $\|z\| \leq C_2^{\frac{1}{2}}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, A^*Az \rangle = \langle Ax, Az \rangle \leq \tau \|Az\| = \tau (\langle Az, Az \rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= \tau (\langle z, x \rangle)^{\frac{1}{2}} \leq \tau (\|z\| \|x\|)^{\frac{1}{2}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Uma interpretação da condição i) no Teorema acima é a de que a inversa de  $A|_{K_C} : K_C \rightarrow A(K_C)$  é contínua em  $g$ , onde  $K_C := \{x : x = A^*g, \|g\| \leq C\}$ . Note que a limitação em ii) é melhor pois estamos assumindo mais condições na solução  $x$ .

**Exemplo 8.1** (Diferenciação nos dados). *Considere o operador*

$$\begin{aligned} A : L^2[0, 1] &\longrightarrow L^2[0, 1] \\ x &\longmapsto (Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds = g(t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

*Suponha que tenhamos uma informação a priori de que  $x \in \{v \in AC[0, 1] : v(1) = 0 \text{ e } v' \in L^2[0, 1]\}$  e que a norma da primeira derivada seja estimada por:*

$$\|x'\|_{L^2[0,1]}^2 \leq C.$$

*Claramente, o operador adjunto é dado por*

$$\begin{aligned} A^* : L^2[0, 1] &\longrightarrow L^2[0, 1] \\ g &\longmapsto (A^*g)(s) = - \int_s^1 g(r)dr. \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

*Assim, se  $\|Ax\| \leq \tau$ , então*

$$\begin{aligned} \|x\|_{L^2[0,1]}^2 &= - \int_0^1 x'(t) \int_0^t x(s)dsdt = - \int_0^1 x'(t)Ax(t)dt \\ &\leq \|x'\| \|Ax\| \leq C\tau. \end{aligned}$$

Existem basicamente duas formas de escolha do parâmetro de regularização: uma escolha *a-priori*, ( $\alpha = \alpha(\delta)$ ) ou uma escolha *a-posteriori* ( $\alpha = \alpha(\delta, g^\delta)$ ), dependendo do método de regularização utilizado. Passaremos a estudar cada um dos casos com um pouco mais de detalhes.

Uma pergunta que pode ser feita é: Existe uma escolha de parâmetros de regularização  $\alpha$  que dependa somente dos dados  $g^\delta$  e não dependa do nível de ruído  $\delta$ ? A resposta é a seguinte:

**Proposição 8.1.** *Seja  $A : X \rightarrow Y$  um operador linear limitado. Suponha que existe  $\{R_\alpha\}$  uma regularização para  $A^\dagger$ , com uma escolha de parâmetros  $\alpha$  que dependa somente de  $g^\delta$  mas não dependa de  $\delta$ , tal que o método de regularização  $(R_\alpha, \alpha)$  seja convergente, para todo  $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ . Então  $A^\dagger$ , é limitado.*

Demonstração: Seja  $\alpha = \alpha(\delta)$ . Pela definição de método de regularização convergente, temos que

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \{\|R_{\alpha(g^\delta)}g^\delta - A^\dagger g\| : g^\delta \in Y, \|g - g^\delta\| \leq \delta\} = 0, \quad (8.2.6)$$

e, portanto,  $R_{\alpha(g)}g = A^\dagger g$  para todo  $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ . Logo, de (8.2.6), segue que para qualquer sequência  $\{g_n\} \in \mathcal{D}(A^\dagger)$  que converge para  $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ ,

$$A^\dagger g_n = R_{\alpha(g_n)}g_n \longrightarrow A^\dagger g,$$

e, assim,  $A^\dagger$  é limitado no  $\mathcal{D}(A^\dagger)$ . Pelo Teorema 2.7, temos que  $\mathcal{D}(A^\dagger) = Y$ . ■

A Proposição 8.1 nos ensina que uma escolha de parâmetros para um método de regularização convergente para problemas mal postos deve, obrigatoriamente, levar em conta o nível de ruído  $\delta$ .

### 8.2.1 Escolha *a priori* do Parâmetro de Regularização

Uma escolha do parâmetro de regularização *a-priori* ( $\alpha = \alpha(\delta)$ ) é, teoricamente, feita antes de qualquer cálculo numérico na tentativa de resolver o problema inverso. Desta forma, não depende do cálculo atual, digamos o resíduo  $\|Ax_\alpha^\delta - g^\delta\|$ .

Por enquanto, para o caso de  $A$  ser um operador linear, temos:

**Proposição 8.2.** *Para todo  $\alpha > 0$ , suponha que  $R_\alpha$  um operador contínuo. Então a família  $R_\alpha$  é uma regularização para  $A^\dagger$  se*

$$R_\alpha \longrightarrow A^\dagger \text{ pontualmente no } \mathcal{D}(A^\dagger) \text{ quando } \alpha \longrightarrow 0. \quad (8.2.7)$$

Neste caso, existe, para cada  $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ , uma escolha *a priori* para  $\alpha$  tal que  $x_\alpha := R_\alpha g$  convirja para uma solução de  $Ax = g$ .

Demonstração: Fixe  $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$  qualquer. Pela hipótese, existe um função monótona  $\gamma : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  com  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma(\varepsilon) = 0$  tal que, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\|R_{\gamma(\varepsilon)}g - A^\dagger g\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da continuidade de  $R_{\gamma(\varepsilon)}$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existe um  $\rho(\varepsilon)$  tal que

$$\|z - g\| \leq \rho(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \|R_{\gamma(\varepsilon)}z - R_{\gamma(\varepsilon)}g\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que a função  $\rho(\varepsilon)$  é estritamente monótona, contínua e  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\varepsilon) = 0$ . Portanto, a inversa  $\rho^{-1}$  existe na imagem de  $\rho$ , é estritamente monótona, contínua e satisfaz  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho^{-1}(\delta) = 0$ .

Defina  $\alpha := \gamma(\rho^{-1}(\delta))$ . Note que  $\alpha$  é monótona e satisfaz  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0$ . Como  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ , uma simples desigualdade triangular mostra que

$$\|R_{\alpha(\delta)}g^\delta - A^\dagger g\| \leq \varepsilon.$$

Isso demonstra a nossa afirmação. ■



Quando estamos resolvendo um problema inverso, temos que ter sempre em mente o quanto queremos, de fato, aproximar a solução do problema inverso. Vamos ser mais específicos.

Suponha que  $Im(A)$  não é fechada, assim,  $A^\dagger$  é não limitada (pelo Teorema 2.7). Seja  $\{R_{\alpha(\delta)}\}$  uma estratégia linear de regularização para o problema  $Ax = g^\delta$ . Seja  $g^\delta \in Y$  satisfazendo  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ , então

$$\begin{aligned} \|R_{\alpha(\delta)}g^\delta - A^\dagger g\| &\leq \|x_{\alpha(\delta)} - A^\dagger g\| + \|R_{\alpha(\delta)}g^\delta - x_{\alpha(\delta)}\| \\ &= \|x_{\alpha(\delta)} - A^\dagger g\| + \|R_{\alpha(\delta)}g^\delta - R_{\alpha(\delta)}g\| \\ &\leq \|x_{\alpha(\delta)} - A^\dagger g\| + \delta \|R_{\alpha(\delta)}\|. \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

Notamos que, na estimativa (8.2.8) temos dois efeitos competindo. O primeiro termo é o efeito da regularização: quanto menor for  $\alpha(\delta)$ , melhor é a solução aproximada  $x_{\alpha(\delta)}$  para  $x^\dagger$ . O segundo termo é o efeito da má-colocação do problema inverso: quando  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ,  $\|R_{\alpha(\delta)}\| \rightarrow \infty$  (pelo Exercício 8.3). Faça uma comparação entre a estimativa (8.2.8) e a estimativa (1.1.9). Qual o papel de  $h$  em (1.1.9)?

O caso em que temos igualdade na equação (8.2.8) é, sem sombra de dúvidas, o **pior caso**. Mas, temos que trabalhar com a hipótese de que o pior caso aconteça. Assim, a importância de escolher  $\alpha$  de forma apropriada (e positivo) fica evidente, mesmo que tenhamos que abrir mão de aproximar, o tanto quanto queríamos, o problema original.

Alguns técnicas de escolha *a priori* para o parâmetro  $\alpha$  são bem conhecidas e amplamente usadas. Uma delas é a chamada de **curva L**. Não entraremos em detalhes aqui. Para interessados sugerimos [8, 17].

Assim, para obtermos uma estratégia ótima de solução para problemas inversos com uma escolha *a priori* do parâmetro de regularização, temos que ser capazes de escolher valores apropriados para  $\alpha$  de forma a balancearmos a equação (8.2.8). Uma maneira de construir uma família de regularização adequadamente será apresentada logo mais na Seção 8.3 em termos dos valores espectrais. Essa técnica está baseada na construção das chamadas *funções filtro* [7, 8, 29] ou nas funções de truncamento. Nos Capítulos 9 e 10 apresentaremos outras formas de escolher o parâmetro de regularização.

Da estimativa (8.2.8), segue que:

**Proposição 8.3.** *Seja  $\{R_\alpha\}$  uma estratégia linear de regularização. Para cada  $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ , seja  $\alpha$  uma escolha a priori para o parâmetro de regularização. Então,  $(R_\alpha, \alpha)$  é uma estratégia de regularização convergente se e só se*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad e \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \|R_{\alpha(\delta)}\| = 0.$$

### 8.2.2 Escolha *a posteriori* do Parâmetro de Regularização

Uma escolha *a posteriori* do parâmetro de regularização é feita via uma comparação entre o resíduo (ou a **discrepância**), i.e.,

$$\|Ax_\alpha^\delta - g^\delta\| \leq \tau\delta, \quad (8.2.9)$$

e o nível de ruído  $\delta$ . Esta escolha é chamada de *Princípio da Discrepância*.

**Observação 8.2.** *Uma motivação heurística para tal escolha é a seguinte: Queremos resolver  $Ax = g$ , mas só conhecemos  $g^\delta$  com  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ . Assim, pedir que, para uma solução aproximada  $x_\alpha^\delta$ , com  $\|Ax_\alpha^\delta - g^\delta\| < \delta$ , não faz sentido. Ou seja, o melhor que podemos esperar é que tenhamos um resíduo da ordem de  $\delta$ .*

Voltando a analisar a equação (8.2.8), vemos que quanto menor o parâmetro de regularização, pior é a estabilidade. Assim, devemos escolher  $\alpha$  *a posteriori* o **maior** possível tal que a *discrepância* (8.2.9) seja satisfeita. Notamos que, se  $\delta = 0$ , então o princípio da discrepância nunca é atingido. Neste caso, tomamos  $\alpha := \alpha(g, \delta = 0) = +\infty$ . Disto segue o Teorema:

**Teorema 8.2.** *Um método de regularização  $(R_\alpha, \alpha)$ , onde  $\alpha := (\delta, g^\delta)$  é escolhido de acordo com o princípio da discrepância (8.2.9), é convergente  $\forall g \in \text{Im}(A)$ .*

Demonstração: Veja [17, Teorema 4.17]. ■

## 8.3 Regularização por Truncamento

Nesta seção construiremos o primeiro **método de regularização** específico destas notas. Nos deteremos aos detalhes do caso particular em que o operador  $A$  é linear e compacto. Para o caso em que  $A$  é um operador linear limitado qualquer, os resultados são muito bem apresentados em [17].

Vamos direto ao problema a ser considerado.

Seja  $A$  um operador linear e compacto com um sistema singular  $(\sigma_n, e_n, f_n)$ . Considere o problema de encontrar  $x$  na equação

$$Ax = g^\delta.$$

Como  $g^\delta$  pode não pertencer a  $\text{Im}(A)$ , temos que nos contentar em encontrar uma melhor aproximação  $x^\dagger = A^\dagger g^\delta$  da solução exata  $x$ . Ou, equivalentemente, encontrar entre as soluções das equações normais

$$A^*Ax = A^*g^\delta,$$

a solução  $x^\dagger$  que tem a menor norma.

Do Teorema de Picard 1.1, temos que uma possibilidade de solução seria

$$x^\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{-2} \langle A^* g^\delta, e_j \rangle e_j. \quad (8.3.10)$$

Vimos na Observação 1.2 que usar a equação (8.3.10) não é uma boa alternativa para calcular uma aproximação para a solução  $x^\dagger$  do problema inverso acima, uma vez que  $A^*A$  também é compacto e, assim,  $\sigma_j \rightarrow \infty$ .

Para  $\alpha \in (0, \alpha_0)$  e  $\lambda \in [0, \|A\|^2]$ , defina a função (contínua a direita)

$$f_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{se } \lambda \geq \alpha \\ 0, & \text{se } \lambda < \alpha. \end{cases}$$

Portanto, pelo Teorema da Aplicação Espectral,

$$\begin{aligned} x_\alpha^\delta &:= f_\alpha(A^*A)A^*g^\delta = \sum_{\substack{j=1 \\ \sigma_j^2 \geq \alpha}}^{\infty} \sigma_j^{-2} \langle A^*g^\delta, e_j \rangle e_j = \sum_{\substack{j=1 \\ \sigma_j^2 \geq \alpha}}^{\infty} \sigma_j^{-2} \langle g^\delta, Ae_j \rangle e_j \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ \sigma_j^2 \geq \alpha}}^{\infty} \sigma_j^{-2} \langle g^\delta, \sigma_j f_j \rangle e_j = \sum_{\substack{j=1 \\ \sigma_j^2 \geq \alpha}}^{\infty} \sigma_j^{-1} \langle g^\delta, f_j \rangle e_j. \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

A definição de  $x_\alpha^\delta$  como na equação (8.3.11) pode ser vista como uma versão *truncada* da expansão em valores singulares (2.5.30).

**Definição 8.3.** *O método dado pela equação (8.3.11) é chamado de **expansão truncada em valores singulares**.*

**Observação 8.3.** *Calcular  $x_\alpha^\delta$  por  $x_\alpha^\delta = A_\alpha^\dagger g^\delta$  é um método de projeção sobre os auto-espacos de  $A^*A$ . Ainda, o nível de truncamento  $\alpha$ , que decide quando os valores singulares são trocados por 0, age como uma escolha a priori do parâmetro de regularização.*

**Teorema 8.3.** *O método de expansão truncada em valores singulares é um método de regularização.*

Demonstração: Note que  $A_\alpha$  satisfaz a Proposição 8.2. ■

## 8.4 Exercícios

**Exercício 8.1.** *Prove que o adjunto do operador  $A$  definido pela equação (8.2.4) é o operador dado pela equação (8.2.5).*

**Exercício 8.2.** *Suponha  $A$  um operador linear limitado com  $\text{Im}(A)$  fechada. Construa um operador de regularização para o problema inverso  $Ax = g$ . Que regra foi usada na construção do parâmetro de regularização? (Sujestão: Usar o Teorema 2.7)*

**Observação 8.4.** *O exercício acima mostra que, no caso em que o operador  $A$  possui imagem fechada, a **pseudo-inversa** é uma possível regularização para o problema inverso.*

**Exercício 8.3.** *Mostre que se uma família de operadores lineares converge uniformemente para um operador linear, então este limite é contínuo. Use isto para justificar porquê não podemos requerer a convergência uniforme na Proposição 8.2. Ainda, mostre que, no caso em que  $\text{Im}(A)$  não é fechada, então  $\|R_\alpha\| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} +\infty$ .*

**Exercício 8.4.** *Mostre que  $x_\alpha^\delta$  dado em (8.3.11) pode ser calculado como  $x_\alpha^\delta = A_\alpha^\dagger g^\delta$ , onde  $A_\alpha$  é um operador com imagem de dimensão finita definido por*

$$A_\alpha x = \sum_{\substack{j=1 \\ \sigma_j^2 \geq \alpha}}^{\infty} \sigma_j \langle x, e_j \rangle f_j.$$

**Exercício 8.5.** *Preencha os detalhes da demonstração do Teorema 8.3.*



## Capítulo 9

# Regularização de Tikhonov: Teoria Linear

Com a mesma filosofia da teoria geral de regularização para problemas inversos, a **regularização de Tikhonov** é um compromisso entre precisão e estabilidade. O objetivo deste capítulo é estabelecermos tal compromisso. Nestas notas, trataremos exclusivamente do caso em que o operador  $A$  é linear. O estudo do método de regularização de Tikhonov para problemas não lineares pode ser encontrado em [8, 15, 17, 44].

### 9.1 Convêrgencia

Nesta seção, consideraremos o caso em que o operador  $A$  é linear e limitado. Com essa hipótese, estamos interessados em encontrar, de forma estável, uma aproximação para a solução do problema inverso

$$Ax = g^\delta,$$

para medidas conhecidas do erro  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ .

Assim, como estudamos no Capítulo 8, uma solução regularizada requer uma estratégia mais adequada que tentar resolver as equações normais

$$A^*Ax = A^*g^\delta. \tag{9.1.1}$$

Ou, de forma equivalente, encontrar um mínimo para o problema variacional de mínimos quadrados

$$J(x) = \frac{1}{2} \|Ax - g^\delta\|^2.$$

Lembrando, tudo o que queremos é "inverter" o operador  $A$  de maneira estável. Mais que isso, não queremos errar muito ao fazer essa inversão, isto é, queremos manter o resíduo  $\|Ax - g^\delta\|$  controlado. Veja a estimativa (8.2.8). Então, formalmente, gostaríamos de inverter de forma estável o operador

$A^*A$ . Pelo Teorema da Aplicação Espectral 2.12, isto equivale a calcular  $g(A^*A)$ , onde  $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Portanto, uma solução aproximada para a equação (9.1.1) é dada por  $x^\delta = g(A^*A)A^*g^\delta$ .

Como o espectro de  $A^*A$  pode estar muito próximo de zero e até mesmo conter o zero, uma estratégia de calcular  $x^\delta$ , como  $x^\delta = g(A^*A)A^*g^\delta$  não é possível, ou, se é possível, é muito instável.

Qual é a estratégia para obter uma solução aproximada de (1.0.2) de maneira estável? Afastar o espectro de  $A^*A$  de zero.

Seja  $0 < \alpha \in [0, \alpha_0]$ , defina

$$\varphi_\alpha(\lambda) := g(\lambda + \alpha) = \frac{1}{\lambda^2 + \alpha}. \quad (9.1.2)$$

A função  $\varphi_\alpha(\cdot)$  é dita ser a *função filtro* para o método de regularização de Tikhonov.

Do Teorema da Aplicação Espectral, temos que

$$\varphi_\alpha(A^*A) = (A^*A + \alpha I)^{-1}. \quad (9.1.3)$$

Segue do Exercício 9.8 que a escolha de  $x_\alpha^\delta$ , da forma

$$x_\alpha^\delta = (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*g^\delta \quad (9.1.4)$$

é uma solução regularizada, definida via a equação linear

$$(A^*A + \alpha I)x_\alpha^\delta = A^*g^\delta. \quad (9.1.5)$$

Esta última equação pode ser pensada como uma regularização para as equações normais (9.1.1). Este método é chamado de **Regularização de Tikhonov**<sup>1</sup>.

**Exercício 9.1.** *Seja  $A$  um operador linear e compacto entre espaços de Hilbert com um sistema singular dado por  $(\sigma_j, e_j, f_j)$ . Mostre que a solução regularizada  $x_\alpha^\delta$  na equação (9.1.4) tem a forma*

$$x_\alpha^\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \alpha} \langle g^\delta, f_j \rangle e_j. \quad (9.1.6)$$

Use o mesmo raciocínio para mostrar que  $x^\delta = g(A^*A)A^*g^\delta$  satisfaz

$$x^\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_j} \langle g^\delta, f_j \rangle e_j. \quad (9.1.7)$$

**Observação 9.1.** *Fazendo uma comparação entre (9.1.7) e (9.1.6), vemos claramente o resultado de estabilidade da equação (9.1.6): o erro em  $\langle g^\delta, f_j \rangle$  é propagado com um fator de  $\frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \alpha}$ , o qual é sempre limitado quando  $j \rightarrow \infty$ .*

*Em (9.1.7), o fator de propagação é  $\frac{1}{\sigma_j}$ .*

<sup>1</sup>Muitas vezes é chamado de *Regularização de Tikhonov-Phillips*.

Como nem sempre estamos trabalhando com operadores compactos e, mesmo se esse for o caso, a determinação de um sistema singular de um operador é uma tarefa muito custosa do ponto de vista numérico e, teoricamente complicada do ponto de vista matemático. Seria ideal termos uma outra forma de determinar uma solução pela regularização de Tikhonov. Isto é dado pelo teorema abaixo que trata de uma versão variacional da regularização de Tikhonov:

**Teorema 9.1.** *Seja  $x_\alpha^\delta$  como na equação (9.1.4). Então  $x_\alpha^\delta$  é o único minimizador do funcional de Tikhonov*

$$J_\alpha(x) := \|Ax - g^\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2. \quad (9.1.8)$$

Demonstração: Para  $\alpha > 0$ , o funcional  $J_\alpha$  é estritamente convexo e coercivo. Assim,  $J_\alpha$  possui um único minimizador que deve satisfazer a condição necessária (e neste caso também suficiente) de primeira ordem

$$J'_\alpha(x).h = 0 \quad \text{para todo } h \in X. \quad (9.1.9)$$

Disto, segue que

$$\begin{aligned} 0 = J'_\alpha(x).h &= 2\langle Ax - g^\delta, Ah \rangle + 2\alpha\langle x, h \rangle \\ &= 2\langle A^*Ax - A^*g^\delta + \alpha Ix, h \rangle, \end{aligned} \quad (9.1.10)$$

para todo  $h \in \mathcal{H}_1$ . Portanto, (9.1.10) é equivalente a (9.1.4). ■

**Observação 9.2.** *Note que, qualquer minimizador do funcional de Tikhonov (9.1.8) pertence a  $\mathcal{N}(A)^\perp$ . Com efeito, pois, caso contrário, poderíamos fazer a segunda parte do funcional crescer, mantendo a primeira parte constante.*

O parâmetro  $\alpha$  no funcional (9.1.8) é o parâmetro de regularização. Minimização em (9.1.8) é um compromisso entre minimizar a norma do resíduo  $\|Ax - g^\delta\|$  e tomar o tamanho do **termo de penalização**  $\|x\|$  pequeno e, assim, forçar a estabilidade. A escolha apropriada do parâmetro  $\alpha$  é ainda um problema e deve ser feita *a priori*. Como  $\alpha$  é o parâmetro que estabelece este compromisso, muitos autores sugerem sua escolha através da chamada **curva L**. Um boa referência para a construção da curva L é [8].

**Observação 9.3.** *Notemos que a definição de  $x_\alpha^\delta$  como em (9.1.4) só tem sentido para operadores lineares. Mas, o problema de minimização (9.1.8) pode ser formulado para operadores não-lineares [8, 15, 17, 44].*

## 9.2 Semi-Convergência

A definição da solução regularizada, pela minimização do funcional de Tikhonov (9.1.8), nos dá diretamente resultados de convergência e estabilidade, como:



**Teorema 9.2.** *Seja  $x_\alpha^\delta$  definida por (9.1.4),  $g \in \text{Im}(A)$  com  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ . Se  $\alpha := \alpha(\delta)$  é tal que*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad e \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} = 0, \quad (9.2.11)$$

então

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} x_{\alpha(\delta)}^\delta = A^\dagger g. \quad (9.2.12)$$

Demonstração: Seja  $\delta_n \rightarrow 0$  qualquer. Definimos  $\alpha_n := \alpha(\delta_n)$  e  $x_n := x_{\alpha_n}^{\delta_n}$ . Seja  $J_n$  o funcional de Tikhonov (9.1.8) com  $\alpha = \alpha_n$  e  $x_n$  seu correspondente minimizante (que existe e é único, pelo Teorema 9.1). Seja  $x^\dagger := A^\dagger g$ . Então, por definição de  $x_n$ , temos

$$\begin{aligned} \alpha_n \|x_n\|^2 &\leq J_n(x_n) \leq J_n(x^\dagger) = \|Ax^\dagger - g^{\delta_n}\|^2 + \alpha_n \|x^\dagger\|^2 \\ &\leq \delta_n^2 + \alpha_n \|x^\dagger\|^2, \end{aligned}$$

e, assim,

$$\|x_n\|^2 \leq \frac{\delta_n^2}{\alpha_n} + \|x^\dagger\|^2. \quad (9.2.13)$$

Portanto, por hipótese,  $\{x_n\}$  é uniformemente limitada. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu [29],  $\{x_n\}$  possui uma subsequência que converge fraco<sup>2</sup> para  $z \in \mathcal{H}$ . Como  $A$  é linear e limitado,

$$Ax_{n_k} \rightharpoonup Az. \quad (9.2.14)$$

Novamente, a definição de  $x_{n_k}$  implica que

$$\|Ax_{n_k} - g^{\delta_{n_k}}\|^2 \leq J_{n_k}(x_{n_k}) \leq \delta_{n_k}^2 + \alpha_{n_k} \|x^\dagger\|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Segue de (9.2.14) que

$$Az = g. \quad (9.2.15)$$

Da Observação 9.2, temos que  $x_n \in \mathcal{N}(A)^\perp$  e, assim,  $z \in \mathcal{N}(A)^\perp$  (Prove). Pelo Teorema 2.6 e sua demonstração, obtemos  $z = x^\dagger$ . Assim,  $x_{n_k} \rightharpoonup x^\dagger$ . Aplicando o mesmo argumento para todas as subsequências, obtemos que

$$x_n \rightharpoonup x^\dagger. \quad (9.2.16)$$

**Afirmção:**  $x_n \rightarrow x^\dagger$ .

Assuma que exista  $\varepsilon > 0$  tal que  $\|x_{n_k}\| \leq \|x^\dagger\| - \varepsilon$ . Então, o mesmo argumento de extração de subsequências acima implica que  $\|z\| \leq \|x^\dagger\| - \varepsilon$ , contradizendo (9.2.16). Logo,

$$\liminf \|x_n\| \geq \|x^\dagger\|. \quad (9.2.17)$$

<sup>2</sup>Uma sequência em um espaço de Hilbert é **fracamente convergente** para  $z \in \mathcal{H}$  se para todo  $h \in \mathcal{H}$  temos  $\langle x_n, h \rangle \rightarrow \langle z, h \rangle$ . Notação:  $x_n \rightharpoonup z$ .

De (9.2.13), temos

$$\liminf \|x_n\| \leq \|x^\dagger\|. \quad (9.2.18)$$

Juntando as últimas três estimativas, temos que  $x_n \rightarrow x^\dagger$ . ■

### 9.2.1 Taxas de convergência

Segue da definição de solução regularizada pelo método de Tikhonov que

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\| \leq \sup_{\lambda \in \Sigma(A)} |\lambda \varphi_\alpha(\lambda)| \|g - g^\delta\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}. \quad (9.2.19)$$

Assim, se  $\alpha \sim \delta$ , obtemos a seguinte ordem de convergência

$$\|x^\dagger - x_\alpha^\delta\| = \mathcal{O}(\sqrt{\delta}). \quad (9.2.20)$$

## 9.3 Regularização de Tikhonov e a Inversa Generalizada

De acordo com a definição variacional,  $A^\dagger g$  é o vetor  $x \in X$  de menor norma que minimiza o funcional  $\|Ax - g\|$ . Por outro lado, a ideia da regularização de Tikhonov é minimizar ambos: o funcional,  $\|Ax - g\|$ , e a norma,  $\|x\|$ , através da minimização do funcional de Tikhonov (9.1.8).

Pelo Teorema 9.1, a única solução  $x_\alpha$  satisfaz

$$x_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*g.$$

Segue, do Teorema 9.2, que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_\alpha = A^\dagger g.$$

Com esse resultados obtemos:

**Corolário 9.1.** *Seja  $A$  um operador linear e limitado satisfazendo a hipótese 2.1. Então,*

$$A^\dagger = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*,$$

*uniformemente no espaço  $\mathcal{L}(Y, X)$  dos operadores lineares limitados.*

Para obtermos um limitante para o erro com este método, considere  $\lambda \in \Sigma(A^*A)$ . Então temos que

$$|\lambda \varphi_\alpha(\lambda) - 1| = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} \leq \frac{\alpha}{\|A^\dagger\|^{-2} + \alpha}.$$

Assim, segue que

$$\|(A^*A + \alpha I)^{-1} A^* - A^\dagger\| \leq \frac{\alpha \|A^\dagger\|^3}{1 + \alpha \|A^\dagger\|^2}. \quad (9.3.21)$$

**Exercício 9.2.** *Preencha os detalhes na demonstração da estimativa (9.3.21).*

## 9.4 Regularização de Tikhonov para Tomografia Computadorizada

Como vimos antes, o método de regularização de Tikhonov produz soluções estáveis e convergentes para a solução do problema  $Ax = g^\delta$ , como função do nível de ruído nos dados.

Nesta seção, adaptaremos a teoria desenvolvida anteriormente para o problema da TC. Para tal, assumiremos que os dados  $p_i^\delta$  são obtidos por medidas, tal que,  $p_j = \mathcal{R}_j f$  na norma de  $L^2(\Omega)$ , para um conjunto de raios- $X$  com  $j = 1, \dots, N$ . De acordo com a Subseção 1.2.1, temos que

$$\mathcal{R}_j f = (A(:, j), f) \quad j = 1, \dots, N,$$

onde  $(\cdot, \cdot)$  representa o produto interno em  $L^2(\Omega)$  e  $A(:, j)$  representa a coluna  $j$  da matriz  $A$ , dada na Subseção 1.2.1.

**Lema 9.1.** Definindo,  $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$  por

$$\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_N)^T, \quad (9.4.22)$$

temos que o operador adjunto  $\mathcal{R}^* : \mathbb{R}^N \rightarrow L^2(\Omega)$  é dado por

$$\mathcal{R}^* r = \sum_{j=1}^N A(:, j) r_j. \quad (9.4.23)$$

Demonstração: Fica como exercício para o leitor. ■

Como  $\mathcal{R}$  é linear, o funcional de Tikhonov (9.1.8) consiste em minimizar

$$J(f) := \|\mathcal{R}f - p^\delta\|^2 + \alpha \|f\|^2.$$

Pelo Teorema 9.1, a única solução regularizada para TC, dada pelo método de regularização de Tikhonov, é

$$\varphi_\alpha = \mathcal{R}^* r \quad (S + \alpha I)r = p^\delta, \quad (9.4.24)$$

onde  $S = \mathcal{R}\mathcal{R}^* = (A(:, k), A(:, j))$  para  $k, j = 1, \dots, N$ .

## 9.5 Exercícios

**Exercício 9.3.** *Dê um exemplo de um operador linear que possui espectro não-vazio e que não possui autovalores. Isso pode acontecer no caso em que  $A$  é uma matriz, isto é, em dimensão finita?*

**Exercício 9.4.** *Seja  $A$  um operador linear limitado entre espaços de Hilbert. Mostre que o espectro de  $A^*A$  é real e positivo.*

**Exercício 9.5.** *Dê um exemplo de um operador linear limitado  $A$  tal que  $0$  seja um elemento do espectro de  $A$ . Existe operadores auto-adjuntos tais que  $0$  seja um autovalor? Se afirmativo, dê exemplos. Sugestão: procure exemplos nos espaços de seqüências.*

**Exercício 9.6.** *Mostre que se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ , então  $\lambda^2$  é um autovalor de  $A^*A$ . Seja  $A$  seja uma matriz inversível. Mostre que  $1/\lambda$  é um autovalor de  $A^{-1}$ .*

**Exercício 9.7.** *Suponha que  $A^*A$  seja inversível. Considere  $x^\dagger = g(A^*A)A^*g$  e  $x^\delta = g(A^*A)A^*g^\delta$ . Use o exercício acima para mostrar que*

$$\|x^\dagger - x^\delta\|^2 \leq (g(A^*A))^2 \|A^*\|^2 \|g - g^\delta\|^2.$$

*O que acontece com  $\|x^\dagger - x^\delta\|$  como uma função dos autovalores de  $A^*A$ , para dados com ruído, satisfazendo  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ .*

**Exercício 9.8.** *Seja  $A$  um operador linear e limitado entre espaços de Hilbert. Mostre que, para todo  $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ , o operador  $A^*A + \alpha I$  é linear, limitado, injetivo e sobrejetivo e, assim,  $(A^*A + \alpha I)^{-1}$  existe e é limitada. Sugestão: Use o Teorema do Gráfico Fechado, [30], para mostrar a limitação da inversa.*

**Exercício 9.9.** *Um funcional  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  é dito ser **coercivo** se  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} J(x) = +\infty$ . Mostre que, se  $J$  é convexo e coercivo, então, este atinge um mínimo. Ainda, se  $J$  é estritamente convexo e coercivo, mostre que o mínimo é único.*

**Exercício 9.10.** *Mostre que dado um funcional  $J$  como no exercício acima, então a condição de otimalidade de primeira ordem é necessária e também suficiente para  $x$  ser um minimizante de  $J$ .*

**Exercício 9.11.** *Verifique a desigualdade em (9.2.19) no caso em que  $A$  é compacto e com um sistema singular dado por  $(\sigma_j, e_j, f_j)$ .*

**Exercício 9.12.** *Demonstre o Corolário 9.1. Sugestão: Use o que você sabe da função  $\varphi_\alpha(x) = (\alpha + x)^{-1}$ ,  $\alpha > 0$ , e o Teorema da Aplicação Espectral.*

**Exercício 9.13.** *Mostre que  $S = \mathcal{R}\mathcal{R}^* = (A(:,k), A(:,j))$  para  $k, j = 1, \dots, N$ .*

**Exercício 9.14.** *Use o método de regularização de Tikhonov para encontrar uma solução aproximada para o problema do Exercício 1.2. Como deve ser escolhido  $\alpha$  nesse caso?*



## Capítulo 10

# Regularização por Métodos Iterativos: Teoria Linear

Como vimos no Capítulo 8, solucionar o problema inverso (1.0.2) de forma estável, isto é, de forma que condiz com a realidade dos dados obtidos, implica em encontrar uma forma de aproximar o operador inverso por uma família de operadores contínuos. Ou seja, necessitamos de um método de **regularização**.

Uma alternativa para regularização de operadores são os *métodos iterativos de regularização*. A vantagem de tais métodos é que eles possuem propriedades regularizantes [27, 29, 8, 17].

Gauss demonstrou que a melhor maneira de determinar um parâmetro desconhecido de uma equação do tipo (1.0.2), é minimizando a soma dos quadrados dos resíduos<sup>1</sup>, isto é,

$$\min_{x \in \mathcal{H}_1} \frac{1}{2} \|A(x) - g\|^2. \quad (10.0.1)$$

Assumindo algumas propriedades do operador  $A$ , podemos provar que o minimizador de (10.0.1), caso exista, deve satisfazer a condição necessária de primeira ordem

$$A'(x)^* A(x) = A'(x)^* g. \quad (10.0.2)$$

Uma possibilidade para encontrar uma solução de (10.0.2) é interpretá-la como uma iteração de ponto fixo

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad (10.0.3)$$

para o operador

$$\Phi(x) = x + A'(x)^*(g - A(x)). \quad (10.0.4)$$

Em muitos exemplos práticos (e até mesmo teóricos) é quase impossível verificar analiticamente quando o operador  $\Phi$  é contrativo ou não. No contexto de problemas não-lineares, esta dificuldade é ainda maior, [27, 17].

---

<sup>1</sup>Tal método é conhecido hoje em dia como **método de Mínimos Quadrados**.

Muitos métodos iterativos para resolver (1.0.2) são baseados na solução da equação normal (10.0.2), via sucessivas iterações, partindo de um chute inicial  $x_0$ . Observamos que tal chute, em particular para problemas não-lineares, costuma conter informações *a priori* sobre a solução do problema.

Nesse capítulo, nos dedicaremos a alguns métodos do tipo gradiente, mais especificamente, ao método de Landweber, ao método de descida máxima e algumas estratégias do tipo Kaczmarz (ART e Landweber Kaczmarz).

Neste manuscrito, nos deteremos ao estudo de métodos iterativos, considerando o caso em que o operador  $A$  é linear. O caso em que  $A$  é não linear possui tratamento detalhado em [15, 17, 27].

## 10.1 Método de Landweber

Nessa seção, assumiremos que o operador  $A$  na equação (1.0.2) é linear e limitado. Com essa hipótese, uma maneira de resolvermos (10.0.2) é considerarmos a iteração

$$x_{k+1} = x_k + \gamma A^*(g - Ax_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10.1.5)$$

em que  $\|A\|^{-2} \geq \gamma > 0$  é um parâmetro de relaxação, de forma que a iteração tenha a propriedade de descida. Esse foi o ponto de partida de Landweber [31], em 1951, ao estudar equações integrais de primeira espécie, quando propôs o método que hoje leva o nome de **Método de Regularização de Landweber**.

No caso de dados com ruído  $g^\delta$ , denotando as iterações por  $x_k^\delta$ , chegamos a *iteração de Landweber*

$$x_{k+1}^\delta = x_k^\delta + A^*(g^\delta - Ax_k^\delta). \quad (10.1.6)$$

**Observação 10.1.** *Note que a equação (10.1.6) é equivalente a pré-multiplicar a equação  $Ax = g^\delta$  por  $\gamma^{\frac{1}{2}}$  e, então, iterar como em (10.1.5). Dada a limitação de  $\gamma$ , sem perda de generalidade, podemos supor que  $\|A\| \leq 1$  e iterar como em (10.1.6).*

Nesta seção, a menos que façamos menção em contrário, admitiremos que  $\|A\| \leq 1$ .

Abaixo, apresentaremos resultados de convergência da iteração de Landweber (10.1.6). As técnicas utilizadas na demonstração de convergência são relativamente simples e bem conhecidas de métodos iterativos para problemas diretos. Observamos ainda que obtemos a mesma iteração (10.1.6) partindo de um chute inicial  $x_0 = 0$ .

### 10.1.1 Convergência

Nesta subseção, provaremos que a sequência  $\{x_k\}$  de iterados pelo método de Landweber converge para uma solução aproximada do problema (1.0.2).

Para tal, temos que definir o que entendemos por uma solução aproximada. Denotaremos por  $x^\dagger := A^\dagger g$ , como a solução de mínimos quadrados com norma mínima para o problema (1.0.2). Aqui  $A^\dagger$  denota a pseudo-inversa de  $A$ , definida no Capítulo 8.

Começaremos dando condições necessárias e suficientes para a iteração (10.1.5) convergir.

**Teorema 10.1.** *Se  $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ , então a sequência  $x_k$  gerada pela iteração de Landweber (10.1.5) converge para  $x^\dagger = A^\dagger g$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Se  $g \notin \mathcal{D}(A^\dagger)$ , então  $\|x_k\| \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ .*

Demonstração: De forma recursiva, podemos escrever  $x_k$  em (10.1.5) como

$$x_k = \sum_{j=0}^{k-1} (I - A^*A)^j A^*g. \quad (10.1.7)$$

Como  $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ , então  $A^*g = A^*Ax^\dagger$ . Assim,

$$x^\dagger - x_k = x^\dagger - A^*A \sum_{j=0}^{k-1} (I - A^*A)^j x^\dagger = (I - A^*A)^k x^\dagger. \quad (10.1.8)$$

Definimos  $r_k(\lambda) = (1 - \lambda)^k$ . Como, por hipótese  $\|A\| \leq 1$ , segue que o espectro de  $A^*A$  é um subconjunto de  $(0, 1]$ . Notemos que, para  $\lambda \in \Sigma(A^*A) \subset (0, 1]$ ,  $r_k(\lambda)$  converge para zero uniformemente quando  $k \rightarrow \infty$ . Pelo Teorema da Aplicação Espectral [30, 45, 36],

$$x^\dagger - x_k = r_k(A^*A)x^\dagger. \quad (10.1.9)$$

Logo,  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^\dagger$ . ■

O Teorema 10.1 nos ensina que  $\{x_k\}$ , gerada pela iteração de Landweber, converge para uma solução de mínimos quadrados da equação (1.0.2) quando  $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ . Como, em geral, dados perturbados  $g^\delta$  são tal que  $g^\delta \notin \mathcal{D}(A^\dagger)$ , então, ainda do Teorema 10.1, sabemos que a sequência  $x_k^\delta$  diverge. A pergunta é: Qual é o fator de propagação destes erros?

**Lema 10.1.** *Sejam  $g, g^\delta$  com  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$  e  $x_k$  e  $x_k^\delta$  obtidos pelas respectivas iterações de Landweber (10.1.5) e (10.1.6). Então,*

$$\|x_k - x_k^\delta\| \leq \sqrt{k}\delta, \quad k \geq 0. \quad (10.1.10)$$

Demonstração: Pela linearidade de  $A$ , temos que

$$x_k - x_k^\delta = \sum_{j=0}^{k-1} (I - A^*A)^j A^*(g - g^\delta).$$



Como  $\|A\| \leq 1$ , segue que  $(I - A^*A)$  é um operador semi-definido positivo com  $\|I - A^*A\| \leq 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (I - A^*A)^j A^* \right\|^2 &= \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (I - A^*A)^j (I - (I - A^*A)^k) \right\|^2 \\ &\leq \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (I - A^*A)^j \right\|^2 \leq k, \end{aligned}$$

e o Lema segue. ■

Note que, na presença de erro nos dados temos

$$\|A^\dagger g - x_k^\delta\| \leq \|A^\dagger g - x_k\| + \|x_k - x_k^\delta\|. \quad (10.1.11)$$

Esta é a estimativa fundamental para a iteração de Landweber.

A estimativa (10.1.11) nos mostra que o erro total possui duas componentes, um *erro de aproximação* que diminui lentamente e um *erro nos dados* que cresce na ordem de no máximo  $\sqrt{k}\delta$ . Isso nos leva a seguinte conclusão: Para valores de  $k$  pequenos, o erro nos dados é desprezível e a iteração parece convergir para a solução exata  $A^\dagger g$ . Quando  $\sqrt{k}\delta$  atinge a magnitude da ordem do erro de aproximação, o erro propagado nos dados torna-se grande e a aproximação tende a piorar. Veja Figura 1.1. Assim, segue que a propriedade de regularização por métodos iterativos, para problemas mal postos, depende fortemente de um **critério de parada** que detecte a transição entre convergência e divergência do método. O índice da iteração faz o papel do parâmetro de regularização. Já, o critério de parada faz o papel da regra de escolha do parâmetro. Conseqüentemente, um critério de parada apropriado deve levar em conta a informação adicional do nível de ruídos  $\delta$ .

**Lema 10.2.** *A norma do resíduo  $g^\delta - Ax_k^\delta$  é sempre monótona não-crescente durante a iteração.*

Demonstração: De fato, pela definição da iteração de Landweber

$$\begin{aligned} g^\delta - Ax_k^\delta &= g^\delta - A(x_{k-1}^\delta + A^*(g^\delta - Ax_{k-1}^\delta)) \\ &= (I - A^*A)(g^\delta - Ax_{k-1}^\delta). \end{aligned}$$

Como  $\|I - A^*A\| \leq 1$ , o Lema segue. ■

Por outro lado, se  $g^\delta \notin \mathcal{D}(A)$ , pelo Teorema 10.1, a iteração  $x_k^\delta$  diverge para infinito. Portanto, um resíduo pequeno não implica que a aproximação para solução é melhor. Veja a estimativa (10.1.11).

Uma alternativa para a escolha do critério de parada é o **princípio da discrepância**: a iteração é parada no índice  $k_* = k(\delta, g^\delta)$  quando, pela primeira vez,

$$\|g^\delta - Ax_{k(\delta, g^\delta)}\| \leq \tau\delta, \quad \tau > 2 \text{ fixo.} \quad (10.1.12)$$

O próximo Teorema garante que, enquanto a discrepância (10.1.12) não é atingida, a aproximação para a solução não piora.

**Teorema 10.2.** *[Monotonia] Sejam  $g \in \mathcal{D}(A)$ ,  $x^\dagger$  a solução de norma mínima de (1.0.2) e  $g^\delta$  satisfazendo  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ . Se (10.1.12) é satisfeita, então*

$$\|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\| \leq \|x_k^\delta - x^\dagger\|. \quad (10.1.13)$$

Demonstração: Fazendo

$$\begin{aligned} & \|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\|^2 - \|x_k^\delta - x^\dagger\|^2 = 2\langle x_k^\delta - x^\dagger, x_{k+1}^\delta - x_k^\delta \rangle + \|x_{k+1}^\delta - x_k^\delta\|^2 \\ & = 2\langle x_k^\delta - x^\dagger, A^*(g^\delta - Ax_k^\delta) \rangle + \langle A^*(g^\delta - Ax_k^\delta), A^*(g^\delta - Ax_k^\delta) \rangle \\ & = 2\langle Ax_k^\delta \pm g^\delta - g, g^\delta - Ax_k^\delta \rangle + \langle g^\delta - Ax_k^\delta, AA^*(g^\delta - Ax_k^\delta) \rangle \\ & = 2\langle g^\delta - g, g^\delta - Ax_k^\delta \rangle - \|Ax_k^\delta - g^\delta\|^2 \\ & \quad - \langle g^\delta - Ax_k^\delta, (I - AA^*)(g^\delta - Ax_k^\delta) \rangle. \end{aligned}$$

Como  $I - A^*A$  é semi-definido positivo, segue que

$$\|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\|^2 - \|x_k^\delta - x^\dagger\|^2 \leq \|Ax_k^\delta - g^\delta\|(2\|g - g^\delta\| - \|Ax_k^\delta - g^\delta\|).$$

Como  $g^\delta$  satisfaz (1.0.3) e  $k < k_*$ , a afirmativa segue.  $\blacksquare$

Como comentado anteriormente, no caso de dados corrompidos por ruído, a iteração de Landweber deve ser parada após uma quantidade finita de passos. O próximo Teorema mostra que o princípio da discrepância implica nessa importante propriedade para a iteração de Landweber.

**Teorema 10.3.** *Seja  $\tau > 1$  em (10.1.12). Então, o princípio de discrepância determina um índice de parada  $k_* = k_*(\delta, g^\delta)$ , é finito para a iteração de Landweber, com  $k(\delta, g^\delta) = \mathcal{O}(\delta^{-2})$ .*

Demonstração: Seja  $\{x_k^\delta\}$  dada por (10.1.5). Sabemos que

$$\|x^\dagger - x_k^\delta\|^2 - \|x^\dagger - x_{k+1}^\delta\|^2 \geq \|g - Ax_k^\delta\|^2.$$

Somando sobre  $k = 1$  até  $j$  e levando em conta a monotonia dos resíduos dado pelo Lema 10.2, temos

$$\|x^\dagger - x_j^\delta\|^2 - \|x^\dagger - x_{j+1}^\delta\|^2 \geq \sum_{k=1}^j \|g - Ax_k^\delta\|^2 \geq k\|g - Ax_j^\delta\|^2.$$

Indutivamente, podemos escrever  $g - Ax_j^\delta = (I - AA^*)^j(g - Ax_0)$ , segue que

$$\|(I - AA^*)^j(g - Ax_0)\| = \|g - Ax_j^\delta\| \leq k^{-\frac{1}{2}}\|x^\dagger - x_1^\delta\|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|g^\delta - Ax_j^\delta\| &= \|(I - AA^*)^j(g^\delta - Ax_0)\| \leq \|(I - AA^*)^j(g^\delta - g)\| \\ &\quad + \|(I - AA^*)^j(g - Ax_0)\| \leq \delta k^{-\frac{1}{2}} \|x^\dagger - x_1^\delta\|. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, o lado direito é menor que  $\tau\delta$ , se  $k > \frac{\|x^\dagger - x_1\|^2}{(\tau-1)^2\delta^2}$ . Logo,  $k(\delta, g^\delta) \leq c\delta^{-2}$ , onde  $c$  só depende de  $\tau$ . ■

Para obtermos taxas é preciso fazermos hipóteses sobre a solução  $x^\dagger$ . Tais hipóteses são conhecidas como **condições de fonte**. Condições de fonte mais comuns na literatura impõem que  $x^\dagger$  pertença a imagem do operador  $A^*$  ou pertença a imagem de potências do operador  $A^*A$ . Por exemplo, considere a condição de fonte

$$x^\dagger \in \text{Im}((A^*A)^\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}_*^+. \quad (10.1.14)$$

Esta condição impõem que a solução  $x^\dagger$  pertença a imagem do operador  $(A^*A)^\theta$ .

**Exercício 10.1.** *Mostre que o operador  $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$  está bem definido. O domínio e imagem de  $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$  são subconjuntos de que espaços vetoriais? Interprete geometricamente a condição de fonte (10.1.14).*

**Teorema 10.4.** *Suponha a condição de fonte (10.1.14) satisfeita para  $\theta = 1/2$ . Se  $g \in \text{Im}(A)$  e o princípio de discrepância (10.1.12) é válido, então, a iteração de Landweber possui ordem de convergência  $k(\delta, g^\delta) = \mathcal{O}(\delta^{-1})$ .*

Demonstração: Veja [17, Teorema 6.5]. ■

## 10.2 Método de Máxima Descida e a Inversa Generalizada

Agora, vamos nos ater no método conhecido como **Máxima Descida ou Steepest Descent** proposto por Cauchy por volta de 1847, para resolver sistemas de equações não-lineares. Com a ideia de representar a solução de um sistema de equações não-lineares por meio do mínimo de um funcional não negativo, Cauchy construiu uma sequência, de forma iterativa, que passa do iterado corrente para o seguinte na direção em que o funcional decresce mais rápido. Por essa propriedade, o método de Cauchy também é conhecido como método de Máxima Descida.

Aqui, apresentaremos alguns dos resultados para aproximarmos  $A^\dagger g$ , onde  $A$  é um operador que satisfaz a Hipótese 2.1, obtidos por Nashed [7]. Nashed aplicou o método de máxima descida juntando as equações lineares como uma única equação de operador linear  $Ax = g$ . Antes disso, vamos a algumas considerações iniciais.

Seja  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional não-negativo. Denotemos por  $x^* \in \mathcal{H}$  um ponto tal que

$$J(x^*) = \inf\{J(x) : x \in \mathcal{H}\}. \quad (10.2.15)$$

Suponhamos que  $J$  seja Fréchet diferenciável em cada ponto de  $\mathcal{H}$ .

Dado um ponto  $x_0$ , queremos minimizar  $J$  andando na direção em que  $J$  decresce de forma mais rápida. Assim, devemos escolher uma direção  $z \in \mathcal{H}$  tal que a derivada direcional

$$DJ(x_0, z) = \langle z, \nabla J(x_0) \rangle,$$

é a menor possível.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$- \|z\| \|\nabla J(x_0)\| \leq \langle z, \nabla J(x_0) \rangle DJ(x_0, z),$$

e a igualdade só acontece se  $z$  é um múltiplo positivo de  $-\nabla J(x_0)$ . Assim, começando em  $x_0$ , a direção de maior descida de  $J$  é  $z = -\nabla J(x_0)$ . Se  $\alpha > 0$  é o tamanho do passo na direção  $-\nabla J(x_0)$ , obtemos uma nova aproximação para  $x^*$  por

$$x_1 = x_0 - \alpha_0 \nabla J(x_0).$$

O parâmetro  $\alpha_0$  é escolhido de forma que  $x_1$  minimize  $J$  sobre a reta que passa por  $x_0$  na direção  $-\nabla J(x_0)$  e, assim, deve satisfazer

$$\frac{d}{d\alpha} J(x_0 - \alpha \nabla J(x_0))|_{\alpha=\alpha_0} = 0.$$

A sequência iterativa  $\{x_k\}$  gerada pelo método de máxima descida é dada por

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla J(x_k),$$

onde

$$\frac{d}{d\alpha} J(x_k - \alpha \nabla J(x_k))|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$

Suponhamos que o operador  $A$  satisfaz a Hipótese 2.1. Pelo Teorema 2.5, a solução de mínimos quadrados de  $Ax = g$  é justamente o mínimo do funcional  $J(x) = \frac{1}{2} \|Ax - g\|^2$ . Desta forma, somos levados a aplicar o método de de descida máxima para o funcional  $J$ .

**Exercício 10.2.** Defina  $r := \nabla J(x) = A^*(Ax - g)$  (que está bem definido pelo exercício 10.6). Mostre que o valor ótimo de  $\alpha$  é dado por

$$\alpha = \frac{\|r\|^2}{\|Ar\|^2}.$$

Assim, a sequência  $\{x_k\} \subset X$  pelo método de descida máxima é dada por

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k r_k, \\r_k &= A^*(Ax_k - g), \\ \alpha_k &= \frac{\|r_k\|^2}{\|Ar_k\|^2}.\end{aligned}\tag{10.2.16}$$

**Observação 10.2.** *Observamos que se  $r_k = 0$ , então  $x_k$  é uma solução de mínimos quadrados e o método pára em  $x_k$ . Se tivermos um critério para garantir que  $x_k$  é a solução de menor norma entre todas as soluções de mínimos quadrados, obteremos que  $x_k = x^\dagger$ .*

**Exercício 10.3.** *Mostre que se  $Ar_k = 0$ , então  $r_k = 0$ . Assim, a sequência gerada pelo algoritmo (10.2.16) está bem definida.*

Seguiremos os passos de Nashed [7], na demonstrações abaixo.

**Lema 10.3.** *Seja  $A$  satisfazendo a Hipótese (2.1). Então,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0.$$

Demonstração: De

$$J(x_{k+1}) = \frac{1}{2} \|Ax_k - \alpha_k Ar_k - g\|^2 = J(x_n) - \frac{1}{2} \frac{\|r_k\|^2}{\|Ar_k\|^2}.$$

Recursivamente, obtemos que

$$J(x_{k+1}) = J(x_0) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \frac{\|r_j\|^2}{\|Ar_j\|^2}.$$

Como  $J(x) \geq 0$ ,  $\forall x$ , temos que

$$\|A\|^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} \|r_j\|^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|r_j\|^2}{\|Ar_j\|^2} \leq 2J(x_0).$$

Portanto,  $\|r_k\| \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . ■

**Teorema 10.5.** *Seja  $A$  satisfazendo a Hipótese 2.1. Então, a sequência gerada pelo método de descida máxima converge para uma solução de mínimos quadrados de  $Ax = g$ , para qualquer  $x_0 \in X$ . A sequência converge a  $x^\dagger$  se e somente se,  $x_0 \in \text{Im}(A^*)$ .*

Demonstração: Escrevendo a iteração (10.2.16) de forma recursiva temos que

$$x_{k+1} = x_0 - \sum_{j=0}^k \alpha_j r_j. \quad (10.2.17)$$

**Afirmção**  $\{x_n\}$  é uma sequência de Cauchy. De fato

$$x_m - x_n = - \sum_{j=n}^m \alpha_j r_j \in \text{Im}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp. \quad (10.2.18)$$

Portanto, existe  $\eta > 0$  tal que

$$\eta^2 \|x_m - x_n\|^2 \leq \langle A^* A(x_m - x_n), x_m - x_n \rangle = \|A(x_m - x_n)\|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle A^* A(x_m - x_n), x_m - x_n \rangle &\leq \|A^*(Ax_m - Ax_n)\| \|x_m - x_n\| \\ &\leq \eta^{-1} (\|A^*(Ax_m - g)\| + \|A^*(Ax_n - g)\|) \|A(x_m - x_n)\|. \end{aligned}$$

Como  $r_j \rightarrow 0$ , temos que  $r_m - r_n = A^* A(x_m - x_n) \rightarrow 0$  quando  $m, n \rightarrow \infty$ . Como  $\text{Im}(A) = \mathcal{N}(A^*)^\perp$  é fechada, segue do Teorema do Gráfico Fechado [30], que  $A^*$  possui inversa limitada quando restrito a  $\text{Im}(A) = \mathcal{N}(A^*)^\perp$ .

Portanto,  $\|A(x_m - x_n)\| \leq M$  e

$$\eta^3 \|x_m - x_n\|^2 \leq M(r_m + r_n) \rightarrow 0 \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Logo,  $\{x_k\}$  é Cauchy e, assim, converge para algum  $u \in X$ . Pela continuidade de  $A$ , temos

$$\|A^* Au - A^* g\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^* Ax_k - A^* g\| = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0,$$

donde concluímos que  $u$  é uma solução de mínimos quadrados.

Para finalizar, lembremos que qualquer solução de mínimos quadrados é da forma  $x^\dagger \oplus \mathcal{N}(A)$  (Teorema 2.5). Como  $\text{Im}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$ , segue que  $x^\dagger$  é a única solução de mínimos quadrados na  $\text{Im}(A^*)$ . Se  $x_0 \in \text{Im}(A^*)$ , então, de (10.2.17), segue que  $x_k \in \text{Im}(A^*)$  para todo  $k$ . Como  $\text{Im}(A^*)$  é fechada,  $u = x^\dagger$ .

Caso  $x_0 \notin \text{Im}(A^*)$ , então  $x_0 = x'_0 + P_{\mathcal{N}(A)} x_0$ , onde  $x'_0 \in \mathcal{N}(A)^\perp = \text{Im}(A^*)$  e  $P_{\mathcal{N}(A)} x_0 \neq 0$ . Como  $A^* A P_{\mathcal{N}(A)} x_0 = 0$ , de (10.2.17), temos:

$$x_k = x'_0 - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j r_j + P_{\mathcal{N}(A)} x_0 \longrightarrow x^\dagger + P_{\mathcal{N}(A)} x_0.$$

Isto completa a demonstração. ■

### 10.3 Métodos tipo Kaczmarz

Dedicaremos esta seção a um método de regularização para resolver problemas inversos que aparecem na forma de sistemas de equações

$$A_i(x) = g_i \quad i \in \{1, \dots, M\}. \quad (10.3.19)$$

Uma maneira de resolver o problema (10.3.19) é considerarmos o operador  $\mathbb{A} := (A_1, \dots, A_M)$  e  $Y = (g_1, \dots, g_M)$  e resolver a equação

$$\mathbb{A}(x) = Y,$$

usando as técnicas que foram apresentadas acima.

A principal ideia de métodos tipo Kaczmarz é resolver o sistema (10.3.19), de maneira cíclica, onde cada equação do sistema é considerado em separado. Nas próximas subseções apresentaremos o método ART (Algebraic Reconstruction Techniques) e o método de Landweber-Kaczmarz como exemplos de tais estratégias.

#### 10.3.1 Método ART

Uma das técnicas mais usadas em diagnósticos médicos para Tomografia Computadorizada, até pouco tempo, é o método ART. Este método representa a ideia de métodos do tipo Kaczmarz de uma maneira simples de entender. Faremos a construção do método iterativo ART para o caso em que  $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{iN})$ , onde  $i \in \{1, \dots, M\}$ , representa uma linha de um sistema linear escrito na forma (10.3.19). Desta maneira, a iteração ART usa conceitos básicos de Álgebra Linear.

**Iteração:** Dado  $x_0$  um ponto inicial, projetamos  $x_0$  ortogonalmente sobre o hiperplano determinado pela primeira equação do sistema (10.3.19), isto é, sobre  $a_{11}x^1 + \dots + a_{1N}x^N = g_1$ , onde  $x^j$  é a  $j$ -ésima coordenada do vetor  $x$ . Ao vetor projeção ortogonal, chamamos de primeiro iterado  $x_1$ . De posse do vetor  $x_1$  projetamos ortogonalmente sobre a segunda linha do sistema (10.3.19) e obtemos  $x_2$ . Aplicamos este procedimento, sucessivamente, até  $M$ , obtemos  $x_M$ . De maneira cíclica, projetamos  $x_{mod(M)}$  sobre a equação  $mod(M)$  do sistema (10.3.19). A figura 10.1 mostra a iteração ART para um sistema quadrado de ordem 2.

Assim, a iteração é dada por

$$x_n = x_{n-1} - \left( \frac{\langle A_i, x_{n-1} \rangle - g_i}{\|A_i\|^2} \right) (A_i)^T \quad (10.3.20)$$

Observamos que um dos defeitos do método ART é seu alto custo computacional. Ainda, a taxa de convergência pode ser muito lenta ou até mesmo divergir. Assim, às vezes é necessária a introdução de parâmetros de correção na equação (10.3.20) de forma a melhorar a performance do método<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Hoje em dia, novos métodos ganharam terreno, [39, 38]. Atualmente, o método Filtered Backprojection é o mais usado em Tomografia Computadorizada. Este consiste em uma estratégia para resolver a Transformada de Radon Inversa.

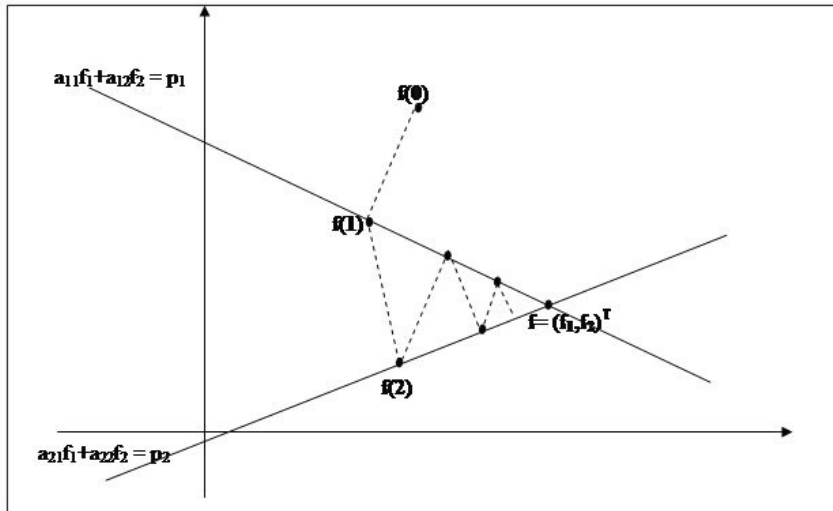


Figura 10.1: Geometria do algoritmo ART.

### 10.3.2 Método de Landweber-Kaczmarz

O método de Landweber-Kaczmarz consiste em aplicar o método de Landweber para resolver (10.3.19) de forma cíclica. Isto é, a iteração é definida como

$$x_{k+1}^\delta = x_k^\delta + \omega_k A'_{[k]}(x_k^\delta)(g^\delta - A_{[k]}(x_k^\delta)), \quad (10.3.21)$$

onde  $[k] := k \text{ mod}(M) \in \{0, \dots, M - 1\}$  e  $i = [k] + 1$ . O parâmetro  $\omega_k$  é definido como

$$\omega_k := \begin{cases} 1 & \text{se } \|A_{[k]}(x_k^\delta) - g_{[k]}^\delta\| > \tau\delta, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O parâmetro  $\omega_k$  determina o critério de parada para o método de Landweber-Kaczmarz. A iteração é parada no primeiro índice  $k_* = k_*(\delta, g_{[k]}^\delta)$  tal que

$$\omega_{k_*+j} = 0 \quad \text{para } j = \{0, \dots, M - 1\}. \quad (10.3.22)$$

Notamos que, um tal critério de parada dado pela equação (10.3.22) significa dizer que

$$x_{k_*}^\delta = x_{k_*+1}^\delta = \dots = x_{k_*+M-1}^\delta, \quad (10.3.23)$$

isto é,  $k_*$  é escolhido como o índice que faz com que  $x_{k_*}^\delta$  seja igual em um ciclo.

Convergência para a iteração de Landweber-Kaczmarz segue similar ao feito para o método de Landweber. As hipóteses são similares as feitas para o método de Landweber para cada  $A_{[k]}$ .



## 10.4 Aplicação: Tomografia Computadorizada

Como aplicação, apresentaremos os resultados obtidos nas Seções 10.2 e 10.3 para o problema de  $TC$  com uma quantidade limitada de dados, [38, 39].

Seja  $L^2(D)$  o espaço de Hilbert de todas as funções quadrado integráveis no disco unitário  $D \subset \mathbb{R}^2$  e  $Y := \{g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} : \|g\|^2 := \int_0^2 g(t)t dt < \infty\}$ .

Consideraremos o sistema

$$A_j x = g_j, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (10.4.24)$$

onde cada  $A_j := L^2(D) \rightarrow Y$ , é dada por

$$(A_j x) := \frac{1}{\pi} \int_{S^1} x(\xi_j + t\theta) d\Omega(\theta), \quad t \in [0, 2], \quad (10.4.25)$$

A equação (10.4.25) corresponde a uma versão circular da Transformada de Radon que foi introduzida na Subseção 1.2.1. Resolver (10.4.25) é um passo crucial em TC. Consideraremos o caso em que os dados são obtidos por integração numérica. Ainda, supomos que o centro de integração  $\xi_j$  corresponde a posição de cada detector.

Nesta aplicação, consideraremos somente o caso especial em que cada

$$\xi_j = \left( \sin \left( \frac{\pi j}{N-1} \right), \cos \left( \frac{\pi j}{N-1} \right) \right)$$

está uniformemente distribuído no semi-círculo  $S_+^1 := \{\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \partial D : \xi^1 \geq 0\}$ . Assim, os dados são medidos em uma única parte da fronteira de  $D$  (veja a figura 10.2). Portanto, temos poucos dados. É provado, por exemplo em [39, 38], que certos detalhes de  $x$  fora da região de detecção não podem ser reconstruídos. Tais resultados são conhecidos como invisibilidade.

Temos duas possibilidades. A primeira é considerar

$$\begin{aligned} \mathbb{A} = (A_0, \dots, A_{N-1})^T : L^2(D)^N &\longrightarrow Y^N \\ x &\longmapsto \mathbb{A}x = (g_0, \dots, g_{N-1})^T = g. \end{aligned}$$

Com essa configuração podemos aplicar a iteração de Landweber linear (10.1.6), a iteração de Landweber-Kaczmarz ou a iteração de descida máxima (10.2.16).

A segunda possibilidade é aplicar o método de Landweber-Kaczmarz para o sistema de equações lineares (10.4.25). Para nosso teste numérico, optamos pela segunda.

A solução  $x^\dagger$  é mostrada no lado esquerdo da figura 10.2. Do lado direito da figura 10.2, vemos a figura que consiste da superposição de funções características e um kernel Gaussiano que representa os dados do problema, com  $N = 50$  medidas. Os dados  $g_j = A_j x^\dagger$  são calculados por integração numérica de forma a adicionar 4% de ruído.

A figura 10.3 mostra a solução regularizada  $x_{k\delta}^\delta$ , os métodos Landweber-Kaczmarz e steepest descent com uma estratégia tipo Kaczmarz.

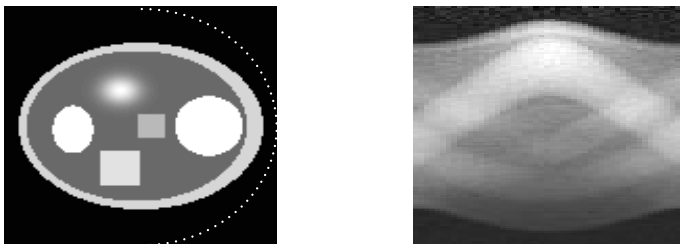


Figura 10.2: Do lado direito a solução e do esquerdo os dados com 4% de ruídos.

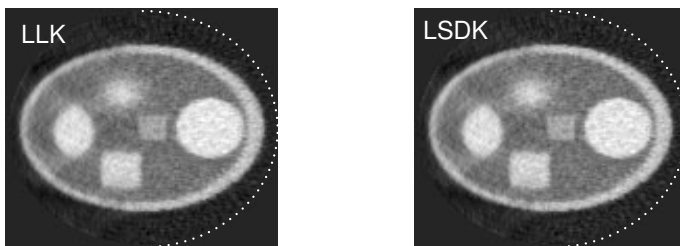


Figura 10.3: Do lado direito a solução aproximada pela regularização de Landweber e do esquerdo por steepest-descent, com estratégias tipo Kaczmarz.

## 10.5 Exercícios

**Exercício 10.4.** *Mostre que se  $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ , então  $A^*g = A^*Ax^\dagger$ . Sugestão: use a inversa generalizada. Consulte o Apêndice 2.4.*

**Exercício 10.5.** *Faça um gráfico comparando os resultados obtidos nos Lemas 10.1 e 10.2 com a estimativa (10.1.11). Compare com a figura 1.1.*

**Exercício 10.6.** *Prove que se  $A$  é um operador linear e limitado, então  $J(x) = \frac{1}{2}\|Ax - g\|^2$  é Fréchet diferenciável e  $\nabla J(x) = A^*(Ax - g)$ .*

**Exercício 10.7.** *Mostre o Lema 10.3 sem a hipótese de  $A$  possuir imagem fechada.*

**Exercício 10.8.** *Suponha que existam constantes  $C, M, m > 0$  tais que  $m\|x\|^2 \leq \langle A^*Ax, x \rangle \leq M\|x\|^2$ ,  $\forall x \in \text{Im}(A^*)$  e que  $A$  satisfaça a Hipótese 2.1. Mostre que o método steepest descent possui um limitante de erro*

dados por

$$\|x^\dagger + P_{N(A)}x_0 - x_n\| \leq C \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2.$$

**Exercício 10.9.** Considere a reta de equação  $a_{1N}x_1 + \cdots + a_{iN}x_N = g_i$  em  $\mathbb{R}^N$ . Mostre que a projeção ortogonal de  $v \in \mathbb{R}^N$  sobre a reta acima satisfaz a equação (10.3.20).

**Exercício 10.10.** Mostre que  $\langle A_i, x_n \rangle = g_i$ . Interprete esse resultado geometricamente.

**Exercício 10.11.** Use a iteração (10.3.20) para obter uma solução do problema de tomografia descrita pela figura 1.6.

**Exercício 10.12.** Mostre que o método de Landweber-Kaczmarz (10.3.21), com o critério de parada (10.3.22), é um método de regularização. Sugestão: consulte [27].

**Exercício 10.13.** Use a iteração de Landweber-Kaczmarz (10.3.21) para encontrar uma solução do problema de tomografia proposto na Figura 1.6. Compare com o método ART.

**Exercício 10.14.** Prove que cada operador  $A_j$  é linear, limitado e satisfaz  $\|A_j\| \leq 1$ . Mostre ainda que o operador adjunto é dado por  $(A_j^*g)(\xi) = g \frac{(|\xi_j - \xi|)}{\sqrt{\pi}}$ .

# Bibliografia

- [1] ABLOWITZ, M. J.; FOKAS, A. S. A. S. *Complex Variables*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000.
- [2] AMBARTSUMIAN, R. A life in astrophysics. selected papers of viktor a. ambartsumian. *Astrophysics*, Springer New York, v. 41, p. 328–330, 1998. ISSN 0571-7256.
- [3] ANGER, G. *Inverse problems in differential equations*. New York: Plenum Press, 1990. 255 p.
- [4] BAL, G. Introduction to inverse problems. In: . New York: Department of Applied Physics and Applied Mathematics, Columbia University, 2004, (Lectures Notes). p. 3–93.
- [5] BARBER D.C.; BROWN, B. Applied potential tomography. *J. Phys. E: Sci. Instrum.*, v. 17, p. 723–733, 1984.
- [6] BARRETO, A. S. Introdução as transformadas de Radon. In: *Lectures Notes: Symposium on Spectral and Scattering Theory, realizado em Recife e Serrambi, de 11 a 22 de Agosto de 2003*. [S.l.]: online: <http://www.math.purdue.edu/~sabarre/papers.html>, 2003. p. 1–22.
- [7] BAUMEISTER, J. *Stable solution of inverse problems*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1987. viii+254 p. (Advanced Lectures in Mathematics).
- [8] BAUMEISTER, J.; LEITÃO, A. *Topics in inverse problems*. [S.l.]: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2005. viii+193 p. (Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]). , 25° Colóquio Brasileiro de Matemática. [25th Brazilian Mathematics Colloquium].
- [9] BERTERO, M.; BOCCACCI, P. *Introduction to inverse problems in imaging*. Bristol: Institute of Physics Publishing, 1998. xii+351 p.
- [10] BUZUG, T. *Computer Tomography - From Photom Statistics to Modern Cone-Beam CT*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008. vii+511 p.
- [11] CALDERÓN, A. P. On an inverse boundary value problem. *Comput. Appl. Math.*, v. 25, n. 2-3, p. 133–138, 2006.

- [12] CEZARO, A. D. *Métodos de Regularização tipo Level Set para Problemas Inversos*. Florianópolis -SC: Universidade Federal de Santa Catarina, 2006. iii+48 p. ISBN <http://www.tede.ufsc.br/teses/PMTM0139.pdf>.
- [13] CEZARO, A. D.; CEZARO, F. T. D. Problemas Inversos e a Matemática da Tomografia Computadorizada. In: *V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática - João Pessoa - PB*. [S.l.]: online: <http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm>, 2010. p. iii+80.
- [14] CEZARO, A. D.; CEZARO, F. T. D. *Problemas Inversos em Tomografias*. São Carlos, SP: SBMAC, 2012. 132 p. (Notas em Matemática Aplicada, v. 59).
- [15] CEZARO, A. D.; LEITÃO, A. Problemas Inversos: Uma Introdução. In: *I Colóquio de Matemática da Região Sul - Santa Maria - RS*. [S.l.]: <http://w3.ufsm.br/colmatsul/>, 2010. p. ii-160.
- [16] (ED.), O. S. *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*. Berlin Heidelberg: Springer, 2011. xiii+1607 p.
- [17] ENGL, H. W.; HANKE, M.; NEUBAUER, A. *Regularization of inverse problems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1996. viii+321 p. (Mathematics and its Applications, v. 375).
- [18] EPSTEIN, C. L. *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2003.
- [19] EVANS, L. C. *Partial differential equations*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998. xviii+662 p. (Graduate Studies in Mathematics, v. 19).
- [20] GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix computations*. Third. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1996. xxx+698 p. (Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences).
- [21] GROETSCH, C. W. *Generalized inverses of linear operators: representation and approximation*. New York: Marcel Dekker Inc., 1977. viii+165 p. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, No. 37.
- [22] GROETSCH, C. W. *The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind*. Boston, MA: Pitman (Advanced Publishing Program), 1984. iv+104 p. (Research Notes in Mathematics, v. 105).
- [23] GROETSCH, C. W. *Inverse problems in the mathematical sciences*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1993. vi+152 p. (Vieweg Mathematics for Scientists and Engineers).
- [24] HADAMARD, J. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. [S.l.]: Dover Publications, New York, 1953. iv+316 p.

- [25] HUTTON, B. F. The origins of spect and spect/ct. *European journal of nuclear medicine and molecular imaging*, v. 41, p. S3–16, 2014.
- [26] ISAKOV, V. *Inverse problems for partial differential equations*. Second. New York: Springer, 2006. xiv+344 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 127).
- [27] KALTENBACHER, B.; NEUBAUER, A.; SCHERZER, O. *Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems*. [S.l.]: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008. viii+194 p. (Radon Series on Computational and Applied Mathematics, v. 6).
- [28] KELLER, J. B. Inverse problems. *Amer. Math. Monthly*, v. 83, n. 2, p. 107–118, 1976.
- [29] KIRSCH, A. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. New York: Springer-Verlag, 1996. x+282 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 120).
- [30] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1989. xvi+688 p. (Wiley Classics Library).
- [31] LANDWEBER, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. *Amer. J. Math.*, v. 73, p. 615–624, 1951.
- [32] LOUIS, A.; QUINTO, E. Local tomographic methods in sonar. In: *Surveys on solution methods for inverse problems*. Vienna: Springer, 2000. p. 147–154.
- [33] LOUIS, A. K. Inverse problems in medicine. In: *Applications of mathematics in industry and technology (Siena, 1988)*. Stuttgart: Teubner, 1989. p. 277–287.
- [34] LOUIS, A. K. Application of the approximate inverse to 3D X-ray CT and ultrasound tomography. In: *Inverse problems in medical imaging and nondestructive testing (Oberwolfach, 1996)*. Vienna: Springer, 1997. p. 120–133.
- [35] MAIZLIN, Z.; VOS, P. Do we really need to thank the beetles for the financing of the development of the computed tomography scanner? *Journal of Computer Assisted Tomography*, v. 36, p. 161–164, 2012.
- [36] MEYER, C. *Matrix analysis and applied linear algebra*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2000. xii+718 p. With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX) and a solutions manual (iv+171 pp.).
- [37] MUELLER, J.; SILTANEN, S. *Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications*. New York: SIAM, 2012. XIIIi+351 p. (Computational Science and Engineering).

- [38] NATTERER, F. *The mathematics of computerized tomography*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2001. xviii+222 p. (Classics in Applied Mathematics, v. 32). Reprint of the 1986 original.
- [39] NATTERER, F.; WÜBBELING, F. *Mathematical methods in image reconstruction*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2001. xii+216 p. (SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation).
- [40] PLATÃO. *A República: Coleção A Obra - Prima de cada Autor*. São Paulo SP: Martin Claret, 2002.
- [41] RADON, J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten [on the determination of functions by their integral values along certain manifolds]. In: *75 years of Radon transform (Vienna, 1992)*. [S.l.]: Int. Press, Cambridge, MA, 1994, (Conf. Proc. Lecture Notes Math. Phys., IV). p. 324–339.
- [42] RAMM, A. G.; KATSEVICH, A. I. *The Radon transform and local tomography*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996. xviii+485 p.
- [43] SALO, M. Calderón problem. In: *Lectures Notes*. [S.l.]: Springer, 2008. p. 1–59.
- [44] SCHERZER, O. et al. *Variational methods in imaging*. New York: Springer, 2009. xiv+320 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 167).
- [45] STRANG, G. *Linear algebra and its applications*. Second. New York: Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1980. xi+414 p.
- [46] UHLMANN, G. Electrical impedance tomography and Calderón's problems. In: *Lectures Notes: CIMPA - Summer School on Inverse Problems and Applications- Santiago - Chile, Jan. 2010*. [S.l.]: online: <http://indico.cmm.uchile.cl>, 2010. p. 1–42.
- [47] ZUBELLI, J. P. *An introduction to inverse problems. Examples, methods and questions*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1999. iv+87 p. (22º Colóquio Brasileiro de Matemática. [22nd Brazilian Mathematics Colloquium]). Appendix A by the author and Luis Orlando Castellano Pérez.

# Índice

- Abel
  - equação integral de , 49
- aproximação
  - de Born, 60
- bem posto, 2
- coeficientes
  - de atenuação, 13
- condição
  - de fonte, 100
  - de radiação, 18
- critério de parada, 98, 105
- curva L, 89
  
- diferenças simétricas, 7
- Dirichlet
  - problema de, 21
- distribuição
  - de Dirac, 53
- equação
  - de Helmholtz, 18
  - do transporte, 15
  - normal, 87
- Eratósthene, 22
- erro
  - de aproximação, 98
  - nos dados, 98
- espaço
  - $L^p(\mathbb{R}^n)$ , 27
  - de Banach, 42
  - de Hilbert, 27
- espectro, 97
- estimativa
  - de erro, 7
  - fundamental, 98
  
- fator integrante, 16, 25
- funcional
  - coercivo, 93
  - de Tikhonov, 89
- função
  - característica de um conjunto, 22
  - de Hankel, 61
  - filtro, 88
  - potencial, 75
  - radial, 49
- fórmula
  - de Cauchy, 52
  - de Green, 53
  - de Plemelj, 55
  
- Gauss, 95
  
- Hadamard, 2
  
- identidade
  - de Parseval, 28
- iteração
  - ART, 104
  - de Landweber, 96
  
- lei de Beer, 10
  
- mal-posto, 2
- Maxwell
  - equações de, 20
- medidas
  - de reflexão, 62
  - de transmissão, 62
- método
  - ART, 104
  - das características, 25
  - de Landweber, 96
  - de Landweber-Kaczmarz, 105



- de mínimos quadrados, 95
  - de separação de variáveis, 10
  - de Tikhonov, 87
  - iterativo de regularização, 95
  - tipo Kaczmarz, 104
- operador
- Dirichlet-para-Newmann, 22
  - Neumann-to-Dirichlet, 22
- parâmetro
- de regularização, 89
- Platão, 22
- princípio
- da discrepância, 98
  - de superposição, 59
- problema
- de condutividade inversa, 21
  - de espalhamento, 19
  - de espalhamento inveros, 19
  - de Riemann Hilbert, 16, 51
  - direto, 2
  - inverso, 2
  - inverso de identificação, 2
  - inverso de reconstrução, 2
- pseudo-inversa, 97
- Radon, 12
- ruído, 2
- sistemas de equações, 104
- solução
- de quadrados mínimos, 97
  - fundamental, 53
- série de Neumann, 65
- teorema
- da Aplicação Espectral, 88, 97
  - da Projeção, 37
  - das Fatias de Fourier, 45
  - de Fubini, 45
  - do Gráfico Fechado, 93
- termo de penalização, 89
- Tomografia, 8
- computadorizada, 9
  - PET, 15
  - por difração, 17
  - por emissão, 15
  - por fluorescência óptica, 19
  - SPECT, 15
- tomografia
- elétrica por impedância, 69
- Transformada
- de Fourier, 27
  - de Fourier Inversa, 27
  - de Hilbert, 48
  - de Radon, 12
  - de Radon Atenuada, 16