

Volume 95, 2023

Corpo Editorial

Sandra Mara Cardoso Malta (Editor Chefe)

Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC

Petrópolis, RJ, Brasil

Eduardo V. O. Teixeira (Editor Executivo)

University of Central Florida - UCF

Orlando, FL, EUA

Lilian Markenzon

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Marcelo Sobottka

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis, SC, Brasil

Paulo F. de Arruda Mancera

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho- UNESP

Botucatu, SP, Brasil

Sandra Augusta Santos

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Campinas, SP, Brasil

Tânia Schmitt

Universidade de Brasília - UnB

Brasília, DF, Brasil

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex, com as figuras em .eps, .pdf e etc.** e ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo. O idioma pode ser Português ou Espanhol.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
<http://https://proceedings.science/notas-sbmac>

Uma introdução aos modos normais não-lineares de sistemas mecânicos

Gustavo Brattstroem Wagner

gustavogbw@gmail.com

Rubens Sampaio

rsampaio@puc-rio.br

Roberta Lima

robertalima@puc-rio.br

Departamento de Engenharia Mecânica

Centro Técnico Científico

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil

2023

Coordenação Editorial: Mateus Bernardes

Coordenação Editorial da Série: Sandra M. C. Malta

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Copyright ©2023 by Eliana Xavier Linhares de Andrade, Cleonice Fátima Bracciali e Rogério da Silva. Direitos reservados, 2023 pela SBMAC. A publicação nesta série não impede o autor de publicar parte ou a totalidade da obra por outra editora, em qualquer meio, desde que faça citação à edição original.

Catálogo elaborado pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Wagner, Gustavo

Uma introdução aos modos normais não-lineares de sistemas mecânicos - São Carlos, SP :

SBMAC, 2023, 131 p., 21,5 cm - (Notas em Matemática Aplicada; v. 95)

ISBN 978-65-86388-16-9 e-ISBN 978-65-86388-19-0

1. Modos normais não-lineares
 2. Problemas de valor de contorno periódico
 3. Método do balanço harmônico
 4. Método do tiro
 5. Continuação numérica
- I. Wagner, Gustavo II. Sampaio, Rubens
III. Lima, Roberta . IV. Título. V. Série

CDD - 51

Agradecimentos

Agradecemos à Faperj e ao CNPq.

Conteúdo

Prefácio	xiii
1 Modos normais lineares e não-lineares	1
1.1 O sistema linear vibratório mecânico mais simples	1
1.2 Sistemas vibratórios massa-mola com múltiplos graus de liberdade	4
1.3 Modos normais lineares	7
1.3.1 Problema de autovalor	7
1.3.2 Problema de valor de contorno periódico	15
1.4 Modos normais não-lineares	19
1.5 Exercícios	33
2 Método do Balanço Harmônico	35
2.1 Série de Fourier	36
2.1.1 Ortogonalidade	37
2.1.2 Aproximação discreta	39
2.2 Abordagem de resíduos ponderados	42
2.3 MBH para problemas de mecânica dos sólidos	45
2.4 Solução das equações do MBH	49
2.5 Método da Alternância Frequência-Tempo	57
2.6 Exercícios	64
3 Método do tiro	67
3.1 Integrador de Newmark	68
3.2 Resíduo do tiro	73
3.3 Solução das equações do método do tiro	74
3.4 Análise de estabilidade	77
3.5 Exercícios	85
4 Continuação numérica de soluções periódicas	87
4.1 Predição	89
4.1.1 Método da secante	90
4.1.2 Método da tangente	90
4.1.3 Tamanho do passo	91

4.2	Correção	92
4.2.1	Restrição local	93
4.2.2	Restrição ortogonal	94
4.2.3	Restrição de comprimento de arco	95
4.3	Algoritmo	95
4.4	Exercícios	97
5	Aplicações dos MNN	101
5.1	Curva de ressonância	102
5.2	Detecção e cálculo de isolas	106
5.2.1	Apropriação de força	108
5.2.2	Balanço de energia	111
5.2.3	Procedimento de cálculo	112
5.3	Transmissão irreversível de energia	115
5.4	Exercícios	124
	Bibliografia	125
	Índice	131

Prefácio

Modos normais para sistemas lineares se referem a uma situação em que apenas a inércia e a rigidez atuam em um sistema. Nesse caso o problema de achar soluções de um sistema linear se reduz a resolver um problema de autovalores. Com os autovalores e os autovetores se determinam famílias de soluções periódicas que dependem apenas das características do sistema linear e suas características independem de energia. Para o caso não-linear a situação muda muito. Não é mais possível determinar as soluções a partir de um problema de autovalores e as características das soluções periódicas variam com a energia.

Rosenberg, nos anos 60, observou que a determinação de frequência e modos pode ser feita de maneira alternativa ao problema de autovalor, resolvendo um problema com condições periódicas. O período da solução encontrada é relacionado à frequência natural do sistema e a razão entre os deslocamentos é utilizada para definir os modos. Porém, adotando essa estratégia, que é equivalente à fornecida pelo problema de autovalor no caso linear, no caso não-linear surgem novidades. Uma delas é que os modos dependem da energia do sistema, que no caso de sistemas lineares normais é conservada.

Uma característica de sistemas lineares é a superposição de soluções, uma combinação linear de soluções também é uma solução do sistema. Esse fato implica que as soluções do problema de autovalores fornecem uma base para o espaço de soluções de um problema linear. No caso não-linear esse resultado não é válido e, aparentemente, não há sentido em calcular modos não-lineares, pois o espaço de soluções não é um espaço vetorial. Como se mostrará nesse livro, a perda da superposição não leva a perda de importância. Os modos não-lineares estão diretamente associados a dinâmica do sistema e são fundamentais para se entender como as soluções mudam com a energia do sistema e como novas soluções podem surgir. Uma série de situações, como localização da energia, aparentemente inexplicáveis, são facilmente explicáveis através dos modos não-lineares. Situações como enrijecimento, aumento da frequência com o aumento da energia de um sistema, e relaxamento (também chamado de amolecimento), o caso contrário, são também explicáveis com os modos não-lineares. Um fenômeno interessante de

transmissão irreversível de energia entre diferentes graus de liberdade do sistema (também chamado de bombeamento de energia) pode ser melhor compreendido quando se conhece os modos não-lineares.

Modos não-lineares são ligados a dinâmica de sistemas e ajudam no seu entendimento. Nesse livro, que mostra uma primeira visão do assunto, por motivos didáticos, se tratará apenas de sistemas discretos conservativos. Se deixará de lado sistemas contínuos e dissipativos. O enfoque é na parte computacional — balanço harmônico, método do tiro, continuação — e com dois capítulos dissertando sobre modos não-lineares e sua importância.

O assunto é atual e o número de publicações vem aumentando consideravelmente. Porém, esse é o primeiro livro em português sobre esse tema!

Rio de Janeiro, 11 de março de 2023.

Gustavo Wagner
Rubens Sampaio
Roberta Lima

Capítulo 1

Modos normais lineares e não-lineares

Este livro é sobre modos normais não-lineares de sistemas mecânicos. As técnicas desenvolvidas aqui podem ser aplicadas na Matemática, Física, Engenharia, etc, mas todos os modelos desenvolvidos serão na área de Mecânica, mais especificamente em Vibrações Mecânicas.

Para contextualizar os leitores não habituados com problemas de Vibrações Mecânicas, neste capítulo, alguns conceitos básicos da área, fundamentais para o entendimento do livro, serão abordados. Iniciaremos apresentando o sistema massa-mola vibratório mecânico mais simples, um sistema linear, livre, conservativo e com apenas um grau de liberdade. Depois apresentaremos os sistemas vibratórios massa-mola com múltiplos graus de liberdade livres, conservativos. Primeiro trataremos dos sistemas lineares, para os quais podem ser definidos os modos normais lineares (MNLs). Faremos uma revisão das metodologias de cálculo dos MNLs e suas respectivas propriedades. Em seguida, entraremos no tema central do livro, os modos normais não-lineares (MNNs) segundo Rosenberg, definidos para os sistemas não lineares. Métodos de cálculo de aproximações para os MNNs são brevemente discutidos, e serão tratados mais a fundo nos capítulos posteriores.

1.1 O sistema linear vibratório mecânico mais simples

O sistema linear vibratório mecânico mais simples, ilustrado na Figura 1.1, é composto por uma partícula de massa m ligada a uma parede (fixa) através de uma mola. Considera-se que a mola não tem massa, ou seja, é uma mola abstrata, mas tem um comprimento não-deformado (comprimento quando não há forças atuando sobre a mola) l_0 [30]. Considera-se também que a mola é linear, isto é, existe uma relação linear entre força aplicada

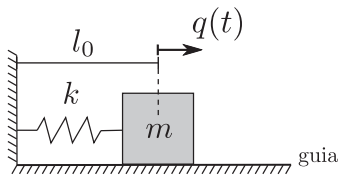


Figura 1.1: Sistema massa-mola linear de um grau de liberdade.

sobre a mola e a deformação dela (variação de comprimento em relação a l_0). Nessa relação, a razão entre força aplicada e deformação é igual a uma constante k , chamada de rigidez da mola.

A partícula se desloca sobre uma guia horizontal lisa. Como o sistema tem apenas uma partícula com um movimento unidimensional, diz-se que o sistema tem um grau de liberdade. Para localizar a posição da partícula ao longo do tempo na guia, diferentes parametrizações podem ser adotadas. Em cada uma delas, um ponto de referência é usado. Por exemplo, como mostrado na Figura 1.1, podemos medir a posição da partícula de forma que o valor da posição seja igual à deformação da mola. Chamaremos essa posição, que é função do tempo, de q . Outra possibilidade de parametrização seria medir a posição da partícula a partir da parede.

Definida uma parametrização, é possível escrever a força aplicada sobre a mola em função dessa parametrização. Para a parametrização q , por exemplo, no instante t , essa força é $f(t) = kq(t)$. Dado que a partícula exerce uma força f sobre a mola, pela terceira lei de Newton, conhecida como lei da ação e reação, a mola exercerá sobre a partícula uma força de mesma intensidade, mesma direção e sentido contrário, ou seja $-f$.

Sendo q a posição da partícula, a primeira derivada de q em relação ao tempo \dot{q} representa a velocidade e a segunda derivada \ddot{q} a aceleração. Pela segunda lei de Newton, podemos escrever que a massa da partícula multiplicada pela aceleração dela é igual a soma das forças que atuam sobre a massa. Considerando que o sistema é livre, ou seja, não existem forças externas sendo aplicadas sobre a massa, a única força que atua sobre ela é a força feita pela mola. Assim temos

$$m\ddot{q}(t) + kq(t) = 0. \quad (1.1.1)$$

A equação diferencial ordinária de segunda ordem Eq. (1.1.1) é chamada de equação de movimento ou equação da dinâmica do sistema. Essa equação depende da parametrização escolhida. Ela rege a dinâmica do sistema. Por exemplo, para esse sistema vibratório mais simples, estabelece uma relação, válida para todo instante t , entre aceleração e posição da partícula.

Outra forma de obter a Eq. (1.1.1) é através do método de Lagrange, um método energético. Para aplicar o método em um sistema mecânico, primeiro escreve-se a função de Lagrange \mathcal{L} dada pela diferença entre as energias cinética \mathcal{T} e potencial \mathcal{V} presentes no sistema usando a parame-

trização escolhida. No caso do sistema em questão, a energia potencial se restringe à energia elástica da mola. Como a partícula se move em uma guia horizontal, a energia potencial gravitacional é constante e não tem influência na dinâmica. Por isso, não precisa ser considerada. Assim

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2(t) - \frac{1}{2}kq^2(t). \quad (1.1.2)$$

Para um sistema conservativo e livre, a equação da dinâmica pode ser obtida por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (1.1.3)$$

Desenvolvendo os termos da Eq. (1.1.3), obtêm-se a Eq. (1.1.1).

Quando o sistema é perturbado, tirado do repouso, são dadas condições iniciais de posição $q(0)$ e velocidade $\dot{q}(0)$ não nulas para a partícula e um movimento é iniciado. A resposta do sistema ao longo do tempo será dada pela solução do problema de valor inicial composto pela Eq. (1.1.1), que rege a dinâmica do sistema, e pelas condições iniciais fixadas. Uma proposta inicial para a solução é dada pela equação

$$q(t) = e^{st}, \quad (1.1.4)$$

onde s é uma incognita que precisa ser determinada. Substituindo a Eq. (1.1.4) na Eq. (1.1.1), obtêm-se

$$(ms^2 + k)e^{st} = 0. \quad (1.1.5)$$

Como $e^{st} \neq 0$, tem-se que

$$ms^2 + k = 0. \quad (1.1.6)$$

A Eq. (1.1.6) representa um polinômio conhecido como polinômio característico. As raízes desse polinômio são

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \mathbf{i}, \quad (1.1.7)$$

onde $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. Encontramos duas possíveis soluções para a equação diferencial. A resposta do sistema q é escrita então como uma combinação linear das duas soluções encontradas. Sendo α e β os pesos utilizados na combinação linear, escreve-se

$$\begin{aligned} q(t) &= \alpha e^{(+\sqrt{\frac{k}{m}} \mathbf{i}t)} + \beta e^{(-\sqrt{\frac{k}{m}} \mathbf{i}t)} \\ &= \underbrace{(\alpha + \beta)}_a \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + \underbrace{i(\alpha - \beta)}_b \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right). \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Chamando $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, é possível reescrever a Eq. (1.1.8) como

$$q(t) = a \cos(\omega_n t) + b \sin(\omega_n t) = A \cos(\omega_n t - \theta), \quad (1.1.9)$$

onde os coeficientes A e θ , que representam a amplitude e fase do movimento, devem ser calculados de forma que q satisfaça as condições iniciais de posição e velocidade fixadas. Nota-se que o movimento oscilatório ocorre na frequência ω_n chamada de frequência natural do sistema. Essa frequência depende apenas de parâmetros do sistema, no caso, massa, m , e rigidez, k .

Análise energética do sistema massa-mola: multiplicando a Eq. (1.1.1) por \dot{q} , obtêm-se

$$m\ddot{q}(t)\dot{q}(t) + kq(t)\dot{q}(t) = 0 \quad (1.1.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2(t) + \frac{1}{2}kq^2(t) \right] = 0.$$

Os termos $\frac{1}{2}m\dot{q}^2$ e $\frac{1}{2}kq^2$ representam respectivamente as energias cinética da massa e potencial elástica da mola. A Eq. (1.1.10) mostra que a soma dessas duas energias é constante, ou seja, o sistema é conservativo. A resposta do sistema livre é caracterizada por uma troca entre as energias na frequência natural ω_n . A energia total presente no sistema livre é fixada através das condições iniciais de posição e velocidade.

Feita essa breve apresentação do sistema linear vibratório mecânico mais simples, com apenas um grau de liberdade, vamos introduzir sistemas vibratórios massa-mola com mais de um grau de liberdade.

1.2 Sistemas vibratórios massa-mola com múltiplos graus de liberdade

Trabalharemos com sistemas compostos por mais de uma partícula conectadas por molas. Consideraremos que as partículas se movem sobre uma guia horizontal lisa. Supondo que o sistema seja composto por n partículas e cada uma delas tem um movimento unidimensional, diz-se que o sistema tem n graus de liberdade. Dessa forma, para parametrizar a dinâmica, são necessárias n variáveis.

Duas possíveis configurações de sistemas com duas partículas são mostradas na Figura 1.2. O sistema superior da Figura 1.2 é dito um sistema não restrito. Assim como no caso de sistemas com um grau de liberdade, quando trabalhamos com sistemas com mais de um grau de liberdade, um dos objetivos é prever o movimento quando o sistema é perturbado. Para isso, precisamos inicialmente equacionar a dinâmica do sistema. Para o caso de um sistema com n graus de liberdade, a dinâmica é dada por um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem. Uma forma de obter as equações é através do método de Lagrange. Para ilustrar o procedimento, serão desenvolvidos dois exemplos a seguir.

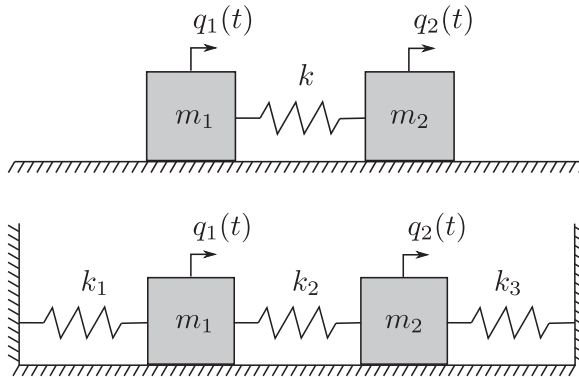


Figura 1.2: Sistemas massa-mola linear de dois graus de liberdade.

Exemplo 1.1. Considere o sistema superior da Figura 1.2. O sistema é composto por duas partículas de massas m_1 e m_2 e por uma mola linear de rigidez k e comprimento não-deformado l_0 . Para parametrizar a dinâmica, escolhemos usar q_1 e q_2 para medir as posições das massas e m_1 e m_2 respectivamente. Consideramos que a força na mola é nula se $q_1 = q_2 = 0$. Para obter a dinâmica do sistema através do método de Lagrange, iniciamos escrevendo a função de Lagrange \mathcal{L} dada pela diferença entre as energias cinética \mathcal{T} e potencial \mathcal{V} presentes no sistema usando a parametrização escolhida. A energia cinética é dada pela soma das energias dos movimentos de cada uma das massas e a energia potencial pela energias elásticas da mola. Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{T} - \mathcal{V} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2(t) + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2(t) - \frac{1}{2}k(q_2(t) - q_1(t))^2. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Supondo que o sistema superior ilustrado na Figura 1.2 seja conservativo e livre, as equações da dinâmica podem ser obtidas fazendo-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Desenvolvendo-se os termos da Eq. (1.2.12) obtêm-se

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + kq_1 - kq_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{q}_2 - kq_1 + kq_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Escrevendo a Eq. (1.2.13) em notação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}, \quad (1.2.14)$$

onde \mathbf{M} e $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ são matrizes simétricas e representam as matrizes de massa e rigidez dos sistema, respectivamente. O vetor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ representa os deslocamentos do sistema, e $\dot{\mathbf{q}}$ and $\ddot{\mathbf{q}}$ são as primeiras e segundas derivadas em relação ao tempo t , respectivamente.

Exemplo 1.2. Considere o sistema inferior da Figura 1.2. O sistema é composto por duas partículas de massas m_1 e m_2 e por três molas lineares de rigidezes k_1 , k_2 e k_3 e comprimentos não-deformados l_1 , l_2 e l_3 . O sistema é colocado entre duas paredes que distam $l_1 + l_2 + l_3$. Para parametrizar a dinâmica, escolhemos usar q_1 e q_2 para medir as posições da massas e m_1 e m_2 respectivamente. Consideramos que as forças nas molas são nulas se $q_1 = q_2 = 0$. Para obter a dinâmica do sistema através do método de Lagrange, iniciamos escrevendo a função de Lagrange \mathcal{L} dada pela diferença entre as energias cinética \mathcal{T} e potencial \mathcal{V} presentes no sistema usando a parametrização escolhida. A energia cinética é dada pela soma das energias dos movimentos de cada uma das massas e a energia potencial pela soma das energias elásticas das molas. Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{T} - \mathcal{V} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2(t) + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2(t) - \left(\frac{1}{2}k_1q_1^2(t) + \frac{1}{2}k_2(q_2(t) - q_1(t))^2 + \frac{1}{2}k_3q_2^2(t) \right). \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Supondo que o sistema inferior ilustrado na Figura 1.2 seja conservativo e livre, as equações da dinâmica podem ser obtidas fazendo-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Desenvolvendo-se os termos da Eq. (1.2.16) obtêm-se

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2 q_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{q}_2 - k_2 q_1 + (k_2 + k_3) q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Escrevendo a Eq. (1.2.17) em notação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}. \quad (1.2.18)$$

Considere um sistema linear com n graus de liberdade livre cuja equação de movimento é escrita como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (1.2.19)$$

onde \mathbf{M} e $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são duas matrizes simétricas e representam as matrizes de massa e rigidez dos sistema, respectivamente. Além disso, \mathbf{M} é definida como sendo uma matriz positiva definida. O sistema é conservativo, i.e., não possui mecanismos de dissipação ou geração de energia, não possui termos giroscópicos e nem termos que representam forças circulatorias. O vetor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ representa os deslocamentos do sistema, e $\dot{\mathbf{q}}$ and $\ddot{\mathbf{q}}$ são as primeiras e segundas derivadas em relação ao tempo t , respectivamente. A constante inteira n representa o número de graus de liberdade do sistema.

Quando o sistema é perturbado, tirado do repouso, são dadas condições iniciais de posição $q(0)$ e velocidade $\dot{q}(0)$ para cada uma das partículas. A resposta do sistema ao longo do tempo será dada pela solução do problema de valor inicial composto pela Eq. (1.2.19), que rege a dinâmica do sistema, e pelas condições iniciais fixadas.

No cálculo da solução desse problema aparecem os modos de vibração normais para sistemas lineares definidos a seguir.

1.3 Modos normais lineares

Duas abordagens para o cálculo dos respectivos modos normais lineares de sistemas mecânicos são apresentadas a seguir. A primeira envolve a solução de um problema de autovalor e é a abordagem considerada clássica para o cálculo de modos normais lineares. O principal motivo para essa ser a abordagem mais usual provém do reduzido custo computacional (algoritmos eficientes para solução de problemas de autovalor) e das propriedades algébricas existentes em autovalores e autovetores. A segunda abordagem, ao invés de um problema de autovalor, lida com um problema de valor de contorno periódico, onde os modos são extraídos através de soluções periódicas do sistema.

1.3.1 Problema de autovalor

A apresentação a seguir sobre o cálculo dos MNLs e suas principais propriedades pode ser encontrada de forma mais completa em [41]. Iniciamos o processo propondo uma solução para a Eq. (1.2.19). Um *Ansatz* (proposta inicial) para essa solução é

$$\mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{q}}e^{st}, \quad (1.3.20)$$

onde s é um escalar e $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ um vetor constante não nulo. Nota-se que este *Ansatz* corresponde ao produto de um termo espacial constante $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ com um termo temporal e^{st} . A proposta feita corresponde a uma solução síncrona, isto é, uma solução em que os deslocamentos de todos os graus

de liberdade do sistema tenham a mesma dependência temporal, no caso, e^{st} . No caso de um solução oscilatória, isso impõe que todos os graus de liberdade atinjam seus deslocamentos máximos e mínimos simultaneamente (movimento uníssono). Substituindo a Eq. (1.3.20) na Eq. (1.2.19), obtêm-se

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{q}} = \lambda\mathbf{M}\tilde{\mathbf{q}}, \quad (1.3.21)$$

onde $\lambda = -s^2$. A Eq. (1.3.21) consiste em um problema de autovalor, também conhecido como problema de valor característico. Neste caso, o problema é dito generalizado por ser definido através duas matrizes, que neste caso são simétricas e com coeficientes reais. As respectivas soluções e propriedades deste tipo de problema se tornam mais evidente se o problema de autovalor for primeiro reescrito em termo de apenas uma matrix real, isto é, na forma de um problema de autovalor padrão. Isso poderia ser facilmente obtido pré-multiplicando ambos os lados da Eq. (1.3.21) por \mathbf{M}^{-1} . No entanto, importantes propriedades não seriam evidenciadas porque não se pode garantir a simetria de $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_s$. Por isso, deve-se primeiro decompor a matriz de massa da seguinte forma

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^T\mathbf{P}, \quad (1.3.22)$$

onde $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não-singular. Inserindo a Eq. (1.3.22) na (1.3.21), obtêm-se

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{q}} = \lambda\mathbf{P}^T\mathbf{P}\tilde{\mathbf{q}}. \quad (1.3.23)$$

Em seguida, pode-se definir uma transformação linear

$$\mathbf{P}\tilde{\mathbf{q}} = \phi, \quad (1.3.24)$$

cuja respectiva transformação inversa é dada por

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{P}^{-1}\phi. \quad (1.3.25)$$

Inserindo a Eq. (1.3.24) e a Eq.(1.3.25) na Eq. (1.3.23), e pré-multiplicando ambos os lados por $(\mathbf{P}^T)^{-1}$, o problema de autovalor é reduzido para

$$\mathbf{A}\phi = \lambda\phi \quad (1.3.26)$$

onde

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}^T)^{-1}\mathbf{K}\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{K}^T\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}^T. \quad (1.3.27)$$

A simetria de \mathbf{A} ocorre somente pelo fato de \mathbf{K} ser simétrico e porque a relação $(\mathbf{P}^T)^{-1} = (\mathbf{P}^{-1})^T$ existe. A equação (1.3.26) representa o mesmo problema de autovalor definido pela Eq. (1.3.21), no entanto em sua forma padrão. Antes de discutir a natureza das respectivas soluções, pode-se reescrever a Eq. (1.3.26) ainda como

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\phi = \mathbf{0} \quad (1.3.28)$$

onde $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade. Baseado em resultados da álgebra linear [69, 65], pode-se afirmar que um sistema de n equações lineares homogêneas com n variáveis possui uma solução não trivial se, e apenas se, a matriz de coeficientes for singular. Como estamos procurando uma solução não trivial da Eq. (1.3.28), podemos escrever

$$\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}] = 0 \quad (1.3.29)$$

A equação (1.3.29) representa um polinômio de grau n conhecida como polinômio característico. As respectivas n raízes deste polinômio λ_r ($r = 1, 2, \dots, n$), contadas com multiplicidade algébrica, correspondem aos autovalores da matriz \mathbf{A} . Para cada autovalor λ_r existe um respectivo vetor ϕ_r que satisfaz

$$(\mathbf{A} - \lambda_r\mathbf{I})\phi_r = \mathbf{0} \quad \text{para } r = 1, \dots, n. \quad (1.3.30)$$

Esse vetor corresponde ao chamado autovetor de \mathbf{A} associado ao autovalor λ_r . Como a Eq. (1.3.30) é homogênea, qualquer múltiplo de ϕ_r também é uma solução do problema, o que significa que a norma do autovetor não é definida, apenas sua direção. Uma normalização é então necessária. Uma conveniente normalização amplamente utilizada consiste em restringir todos os autovetores a terem norma unitária. Isso é feito impondo

$$\phi_r^T \phi_r = 1, \quad \text{para } r = 1 \dots n. \quad (1.3.31)$$

Considerando essa normalização e pre-multiplicando a Eq. (1.3.30) por ϕ_r^T , obtêm-se o seguinte resultado

$$\phi_r^T \mathbf{A} \phi_r = \lambda_r, \quad \text{para } r = 1 \dots n. \quad (1.3.32)$$

A normalização adotada é conveniente e será utilizada a seguir durante a apresentação de importantes propriedades dos autovalores e autovetores. Vale destacar que a maioria das propriedades são consequências da simetria de \mathbf{A} .

Soluções reais: Considera-se a hipótese em que um autovalor e um respectivo autovetor (λ_r, ϕ_r) sejam complexos. Como \mathbf{A} é real, o complexo conjugado deste par de solução, (λ_r^*, ϕ_r^*) , também precisa ser uma solução do problema. Por isso, ambos os pares de solução satisfazem o problema de autovalor

$$\mathbf{A}\phi_r = \lambda_r\phi_r \quad (1.3.33)$$

$$\mathbf{A}\phi_r^* = \lambda_r^*\phi_r^*. \quad (1.3.34)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Eq. (1.3.33) por $(\phi_r^*)^T$ e pré-multiplicando ambos os lados da Eq. (1.3.34) por ϕ_r^T , obtêm-se, ao subtrair uma equação resultante da outra e considerando a simetria de \mathbf{A} , o seguinte resultado

$$(\phi_r^*)^T \mathbf{A} \phi_r - \phi_r^T \mathbf{A} \phi_r^* = 0 = \lambda_r (\phi_r^*)^T \phi_r - \lambda_r \phi_r^T \phi_r^* = (\lambda_r - \lambda_r^*) \|\phi_r\|, \quad (1.3.35)$$

onde $\|\phi_r\|$ é a norma L^2 de ϕ_r . Essa norma precisa ser positiva para qualquer vetor não nulo, o que resulta em

$$\lambda_r - \lambda_r^* = 0. \quad (1.3.36)$$

Para satisfazer a Eq. (1.3.36), os autovalores precisam ser reais. Além disso, sendo a matriz \mathbf{A} e os respectivos autovalores reais, os autovetores associados também precisam ter obrigatoriamente componentes reais.

Ortogonalidade dos autovetores: Primeiramente considera-se dois autovalores distintos, λ_r and λ_j , cujos respectivos autovetores sejam ϕ_r e ϕ_j . Ambos os pares de solução precisam satisfazer as condições

$$\mathbf{A}\phi_r = \lambda_r\phi_r \quad (1.3.37)$$

$$\mathbf{A}\phi_j = \lambda_j\phi_j. \quad (1.3.38)$$

Ao pré-multiplicar Eq. (1.3.37) por $(\phi_j)^T$ e Eq. (1.3.38) por ϕ_r^T , calcular a transposta da segunda equação e subtrair da primeira, obtêm-se o seguinte resultado

$$\phi_j^T \mathbf{A}\phi_r - (\phi_r^T \mathbf{A}\phi_j)^T = 0 = \lambda_r \phi_j^T \phi_r - \lambda_j \phi_r^T \phi_j = (\lambda_r - \lambda_j) \phi_j^T \phi_r \quad (1.3.39)$$

Sendo os autovalores distintos, Eq. (1.3.39) é satisfeita se, e somente se,

$$\phi_j^T \phi_r = 0, \quad \text{para } r, j = 1 \dots, n \quad \text{e} \quad r \neq j. \quad (1.3.40)$$

Equação (1.3.40) mostra que dois autovetores associados a autovalores distintos de uma matriz real e simétrica são mutualmente ortogonais. Além disso, considerando esse resultado e pre-multiplicando a Eq. (1.3.37) por ϕ_j^T , obtêm-se

$$\phi_j^T \mathbf{A}\phi_k = 0, \quad \text{para } k, j = 1 \dots, n \quad \text{e} \quad k \neq j. \quad (1.3.41)$$

Equação (1.3.41) mostra que, além de serem mutualmente ortogonais, os autovetores associados a autovalores distintos de \mathbf{A} são também ortogonais em relação a \mathbf{A} .

Para o caso em que algum autovalor possua multiplicidade, é possível mostrar que os autovetores associados a esse autovalor também podem ser mutualmente ortogonais e ortogonais em relação a \mathbf{A} . Leitores interessados podem olhar a prova em [20]. No entanto, os autovetores associados a autovalores com multiplicidade não são unicamente definidos uma vez que qualquer combinação linear desses vetores também é um autovetor. Em resumo, é possível afirmar que todos os autovetores de uma matriz real e simétrica podem ser escritos como vetores ortogonais independentemente da multiplicidade dos autovalores associados.

Combinando a normalização unitária dos autovetores e a ortogonalidade dos mesmos, é possível escrever

$$\phi_j^T \phi_r = \delta_{rj} \quad \text{para } r, j = 1, \dots, n \quad (1.3.42)$$

$$\phi_j^T \mathbf{A} \phi_r = \lambda_r \delta_{rj} \quad \text{para } r, j = 1, \dots, n, \quad (1.3.43)$$

onde $\delta_{r,j}$ representa o delta de Kronecker.

A seguir, analisa-se como a ortogonalidade dos autovetores ϕ_r pode ser estendida para os autovetores $\tilde{\mathbf{q}}_r$ do problema de autovalor original definido na Eq. (1.3.21). Para isso, resgata-se a relação entre esses autovetores definida pela transformação linear \mathbf{P} , definida na Eq. (1.3.24), e pela respectiva transformação inversa \mathbf{P}^{-1} , definida na Eq. (1.3.25). Resulta-se então que

$$\phi_r = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{q}}_r, \quad \tilde{\mathbf{q}}_r = \mathbf{P}^{-1} \phi_r, \quad \text{para } r = 1, \dots, n. \quad (1.3.44)$$

Ao substituir essa primeira relação na Eq. (1.3.42), é possível escrever

$$\phi_j^T \phi_r = \tilde{\mathbf{q}}_j^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{q}}_r = \tilde{\mathbf{q}}_j^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{q}}_r = \delta_{rj}, \quad \text{para } r, j = 1 \dots, n \quad (1.3.45)$$

que mostra que os autovetores $\tilde{\mathbf{q}}_r$ são ortogonais em relação a matriz de massa \mathbf{M} . Deve-se chamar atenção aqui para o fato da Eq. (1.3.45) ter utilizado a normalização unitária definida na Eq. (1.3.31), de forma que $\tilde{\mathbf{q}}_j^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{q}}_r$ seja igual a 1 quando $r = j$. Outros valores poderiam ser obtidos caso outras normalizações fossem adotadas, no entanto a ortogonalidade dos autovetores em relação a \mathbf{M} continuaria existindo.

De forma similar, substituindo agora a transformada definida pela Eq. (1.3.44) na Eq. (1.3.42) e considerando a definição de \mathbf{A} feita pela Eq. (1.3.27), obtêm-se como resultado

$$\phi_j^T \mathbf{A} \phi_r = \phi_j^T (\mathbf{P}^T)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1} \phi_r = \tilde{\mathbf{q}}_j^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{q}}_r = \lambda_r \delta_{rj} \quad \text{para } r, j = 1, \dots, n \quad (1.3.46)$$

Equação (1.3.46) mostra que os autovetores $\tilde{\mathbf{q}}_r$ são também ortogonais em relação a matriz de rigidez \mathbf{K} . A normalização unitária foi mais uma vez considerada na Eq. (1.3.46), mas novamente sem influenciar na propriedade de ortogonalidade.

Sinais dos autovalores: Até o momento foi estabelecido que os autovalores são números reais, mas nada foi dito em relação aos seus respectivos sinais. Quando o sistema conservativo e livre foi definido pela Eq.(1.2.19), supôs-se que a matriz de massa \mathbf{M} fosse positiva definida. Dessa forma, os coeficientes dessa matriz não interferem nos respectivos sinais dos autovalores. Logo, apenas a natureza da matriz de rigidez \mathbf{K} é responsável pelos sinais dos autovalores.

Se a matriz de rigidez \mathbf{K} for positiva definida, o sistema analisado se torna positivo definido e todos os autovalores λ_r são positivos. Nesse caso, é possível introduzir uma notação conveniente e definida por

$$\lambda_r = \omega_r^2 \quad \text{para } r = 1, \dots, n. \quad (1.3.47)$$

Relembrando que $\lambda = -s^2$, é possível concluir que, para cada autovalor λ_r , existe um par correspondente de expoentes s puramente complexos e conjugados

$$s_r, s_r^* = \pm i\omega_r \quad \text{para } r = 1, \dots, n. \quad (1.3.48)$$

Substituindo esses expoentes no *Ansatz* definido pela Eq. (1.3.20), é possível concluir que sistemas conservativos e naturais com matriz de rigidez positiva definida admite n famílias de movimentos síncronos descritos por

$$\mathbf{q}_r(t) = (a_r e^{i\omega_r t} + a_r^* e^{-i\omega_r t}) \tilde{\mathbf{q}}_r = A_r \cos(\omega_r t - \theta_r) \tilde{\mathbf{q}}_r \quad \text{para } r = 1, \dots, n. \quad (1.3.49)$$

O termo família foi utilizado porque os coeficientes A_r and θ_r , que representam as amplitudes e fases dos movimentos, ainda não foram definidos. Além disso, cada coeficiente a_r^* corresponde ao complexo conjugado de a_r porque $\mathbf{q}_r(t)$ precisa ser real. A equação (1.3.49) mostra que o movimento síncrono de sistemas positivos-definidos correspondem a funções harmônicas cuja frequência de oscilação ω_r é chamada de frequência natural do sistema. é importante notar que o valor da frequência natural depende apenas do problema de autovalor formado pelas matrizes de massa e rigidez. Isso significa que seu valor independe da energia do movimento síncrono definido por a_r ou A_r . O autovetor associado a essa frequência natural, $\tilde{\mathbf{q}}_r$, é chamado de um modo natural ou normal do sistema, e define a razão existente entre os deslocamentos dos graus de liberdade durante o movimento síncrono. Essa razão entre deslocamentos é constante ao longo do movimento, o que é uma característica dos sistemas lineares. O resultado obtido na Eq. (1.3.49) servirá de motivação para as próximas seções deste capítulo, onde o método alternativo para se obter modos normais a partir de um problema de valor de contorno periódico é discutido.

Exemplo 1.3. *Para ilustrar o procedimento de cálculo dos modos normais lineares a partir de um problema de autovalor para um sistema com matriz de rigidez \mathbf{K} positiva definida, considera-se o sistema massa-mola de dois graus de liberdade inferior da Figura 1.2, cuja equação de movimento foi obtida no Exemplo 1.2 e dada pela Eq. (1.2.18). Supondo $m_1 = m_2 = 1$ e $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, têm-se*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}. \quad (1.3.50)$$

Utilizando as matrizes de massa e rigidez, o problema de autovalor definido pela Eq. (1.3.21) pode ser construído. Para este exemplo, a solução corresponde aos seguintes pares de autovalores e autovetores

$$\lambda_1 = 1; \quad \tilde{\mathbf{q}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.3.51)$$

$$\lambda_2 = 3; \quad \tilde{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.3.52)$$

Os MNLs correspondem aos autovetores e as frequências naturais do sistema são as raízes quadradas dos autovalores. As duas famílias de soluções síncronas e periódicas formadas a partir dos autovalores e autovetores são

$$\mathbf{q}_1(t) = A_1 \cos(t - \theta_1) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.3.53)$$

e

$$\mathbf{q}_2(t) = A_2 \cos(\sqrt{3}t - \theta_2) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.3.54)$$

O vetor \mathbf{q} pode então ser escrito como uma combinação linear das duas famílias de soluções síncronas e periódicas encontradas

$$\mathbf{q}(t) = A_1 \cos(t - \theta_1) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + A_2 \cos(\sqrt{3}t - \theta_2) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.3.55)$$

Dadas condições iniciais para as duas partículas de posição e velocidade, onde os coeficientes A_1 , A_2 , θ_1 e θ_2 devem ser calculados de forma que q satisfaça as condições iniciais fixadas.

A título de curiosidade, aborda-se agora o caso em que a matriz de rigidez \mathbf{K} é apenas positiva semi-definida. Neste caso o sistema é positivo semi-definido e corresponde a um sistema não-restrito, como por exemplo ocorre no sistema superior da Figura 1.2. Nesse caso, os autovalores se tornam não-negativos, isto é, o sistema pode ter alguns autovalores zeros e outros positivos. O movimento síncrono associado a um determinado autovalores zero, definido aqui por λ_i , se torna

$$\mathbf{q}_i(t) = (a_i + tb_i)\tilde{\mathbf{q}}_i. \quad (1.3.56)$$

O movimento é divergente e por isso instável. Além disso, ele é não-oscilatório e não será o foco de estudo ao longo deste livro. O autovetor associado, $\tilde{\mathbf{q}}_i$, é identificado como sendo um modo de corpo rígido do sistema, modo no qual o sistema se desloca sem se deformar.

Exemplo 1.4. Para ilustrar o procedimento de cálculo dos MNLs a partir de um problema de autovalor para um sistema com matriz de rigidez \mathbf{K} positiva semi-definida, considera-se o sistema massa-mola de dois graus de liberdade superior da Figura 1.2, cuja equação de movimento foi obtida no Exemplo 1.1 e dada pela Eq. (1.2.14). Supondo $m_1 = m_2 = 1$ e $k = 1$, têm-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}. \quad (1.3.57)$$

Utilizando as matrizes de massa e rigidez, o problema de autovalor definido pela Eq. (1.3.21) pode ser construído. Para este exemplo, a solução corresponde aos seguintes pares de autovalores e autovetores

$$\lambda_1 = 0; \quad \tilde{\mathbf{q}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.3.58)$$

$$\lambda_2 = 2; \quad \tilde{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.3.59)$$

Os MNLs correspondem aos autovetores e as frequências naturais do sistema são as raízes quadradas dos autovalores. As duas famílias de soluções síncronas e periódicas formadas a partir dos autovalores e autovetores são

$$\mathbf{q}_1(t) = (a_1 + tb_1) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.3.60)$$

e

$$\mathbf{q}_2(t) = A_2 \cos(\sqrt{2}t - \theta_2) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.3.61)$$

O vetor \mathbf{q} pode então ser escrito como uma combinação linear das duas famílias de soluções síncronas encontradas

$$\mathbf{q}(t) = (a_1 + tb_1) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + A_2 \cos(\sqrt{2}t - \theta_2) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.3.62)$$

Dadas condições iniciais para as duas partículas de posição e velocidade, onde os coeficientes a_1 , b_1 , A_2 e θ_2 devem ser calculados de forma que q satisfaça as condições iniciais fixadas.

Por último, considera-se o caso da matriz de rigidez \mathbf{K} ser sinal-variante. Os autovalores podem ser negativos, zero ou positivos. Para um determinado autovalor negativo, λ_p , os expoentes s correspondem a dois valores reais definidos por

$$s_{2p-1}, s_{2p} = \pm \sqrt{\|\lambda_p\|}. \quad (1.3.63)$$

O expoente negativo, $s_{2p} = -\sqrt{\|\lambda_p\|}$, define um movimento que decai exponencialmente ao longo do tempo, enquanto o expoente positivo, $s_{2p-1} = +\sqrt{\|\lambda_p\|}$, define um movimento que diverge com o tempo. Por isso, caso o sistema apresente pelo menos um autovalor negativo, ele corresponde a um sistema instável.

Quando iniciamos o estudo de algum sistema mecânico, em geral, escolhemos parametrizar a dinâmica do sistema com variáveis físicas, intrínsecas ao sistema. Por exemplo, nos sistemas dos Exemplos 1.1 e 1.2, escolhemos uma parametrização q_1 e q_2 tal que as forças nas molas fossem nulas se $q_1 = q_2 = 0$. Para o sistema do Exemplo 1.2, uma outra possibilidade de

parametrização seria medir a posição de cada uma das partículas a partir da parede da direita, ou da esquerda.

O uso de variáveis físicas na parametrização resulta em uma dinâmica que é dada por uma equação diferencial acoplada. Para os sistemas lineares da forma da Eq. (1.2.19), uma base vetorial do espaço de soluções do sistema livre pode ser construída a partir dos modos lineares e utilizada posteriormente para desacoplar a equação diferencial que rege a dinâmica do sistema. A equação diferencial ordinária com múltiplos graus de liberdade que governa a dinâmica do sistema livre, e originalmente acoplada, é transformada através de uma mudança de coordenadas em um sistema de múltiplas equações diferenciais de um grau de liberdade, cujas soluções são conhecidas. Esse processo consiste no desacoplamento do sistema e a equação diferencial, antes escrita em coordenadas físicas, passa a ser escrita em coordenadas modais. A solução da dinâmica em coordenadas físicas pode ser então escrita posteriormente na forma de uma soma ponderada das soluções modais. Essa importante propriedade existente nas soluções dos sistemas lineares é chamada de superposição modal e é base da aplicação de análise modal nos mais variados problemas de dinâmica.

Outra importante propriedade exclusiva dos sistemas lineares é a independência energética dos modos, isto é, não existe variações na base modal em relação ao nível energético do sistema. Além disso, caso um sistema linear inicie seu movimento com toda energia concentrada em apenas um modo (através de condições iniciais específicas), ele permanecerá com o movimento restrito a esse modo indefinidamente. Não existe troca de energia entre os modos, uma propriedade chamada de invariância modal.

Análise modal é, provavelmente, a ferramenta de análise mais utilizada em dinâmica de estruturas. Sua popularidade é justificada pela vasta aplicabilidade dos conceitos modais nos problemas mais usuais enfrentados por engenheiros. Exemplos onde a análise modal é aplicada são: redução de modelo, predição de respostas, identificação de sistemas, atualização de modelos, modificações estrutural, controle de vibração, diagnóstico de problemas, acoplamento de subestruturas e monitoramento de integridade estrutural [26, 40, 9, 8, 16, 18, 5]. Mais referências sobre análise modal e suas aplicações podem ser encontradas nos anais da *International Modal Analysis Conferences* (IMAC).

1.3.2 Problema de valor de contorno periódico

Conforme mostrado pela Eq. (1.3.49), os movimentos síncronos dos sistemas lineares conservativos e naturais são definidos por funções harmônicas. Desta forma, além de serem síncronos, os movimentos são definidos também como periódicos. Isso motiva a criação de um procedimento alternativo através de um problema de valor de contorno periódico para se obter os MNLs, e não de um problema de autovalor.

A principal vantagem em se trabalhar com o problema de valor de con-

torno periódico para o cálculo dos MNLs é que essa abordagem pode ser estendida para o cálculo dos modos normais de sistemas não-lineares, como é explicado na Seção 1.4. Essa extensão não poderia ser feita com a abordagem baseada no problema de autovalor.

Para se construir um problema de valor de contorno periódico basta que seja adicionado uma restrição de periodicidade à equação de movimento, resultando em

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, & t \in [0, T] \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(T) \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}(T) \end{cases}, \quad (1.3.64)$$

onde T corresponde ao período da solução periódica, cujo valor não é conhecido a priori. A relação entre o período das soluções periódicas e as frequências naturais do sistema é dada por $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Quando comparado ao problema de autovalor definido pela Eq. (1.3.21), o custo computacional de se encontrar soluções de problemas de valores de contorno periódicos é significativamente maior, fazendo com que esse procedimento alternativo não seja utilizado na prática.

Para cada família de soluções periódicas definidas pela Eq. (1.3.49), os parâmetros A_r e θ_r não foram definidos e podem ter qualquer valor real. Conclui-se então que o problema de valor de contorno periódico definido pela Eq. (1.3.64) é indeterminado e admite infinita soluções, uma vez que ele não restringe nem a amplitude nem a fase da solução. Para limitar o número de soluções do problema, pode-se adicionar duas equações de restrições ao problema, resultando em

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, & t \in [0, T] \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(T) \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}(T) \\ \eta_a(\mathbf{q}(t), \epsilon) = 0 \\ \eta_p(\mathbf{q}(t), \gamma) = 0 \end{cases}, \quad (1.3.65)$$

onde η_a e η_p representam restrições de amplitude e fase das solução periódica, respectivamente. ϵ e γ são termos relacionados ao nível de energia e a fase desejada na resposta, respectivamente. Ambas as funções de restrição poderiam ser definidas, por exemplo, através da imposição de condições iniciais em um determinado grau de liberdade. O problema definido pela Eq. (1.3.65) passa a admitir apenas n soluções, isso é, o problema passa a ter um número de soluções igual ao número de graus de liberdade do sistema. Cada uma das soluções representa uma das n famílias de soluções periódicas em um dado nível energético. Uma vez obtido uma solução periódica, o MNL relacionado a essa solução podem ser calculados através da razão entre os deslocamentos dos graus de liberdade. Já a frequência natural do sistema pode ser calculado a partir do período encontrado.

Existem diversos métodos já estabelecidos na literatura que buscam soluções de problemas de valor de contorno periódico. Dois dos métodos mais populares são o Método do Balanço Harmônico (MBH) e o método do tiro, e serão tratados em detalhe nos capítulos 2 e 3 deste livro. Outros métodos também utilizados são o método de diferenças finitas e o método de mapa de Poincaré. Em ambos os casos, a equação diferencial e as restrições de periodicidade são transformadas em um único sistema de equações algébricas. As equações resultantes e as respectivas variáveis do problema algébrico dependem do método escolhido. As restrições de amplitude e fase, apesar de naturalmente algébricas, são também reescritas em função das novas variáveis do problema. Aproximações para as soluções periódicas são então obtidas, em geral, através de um método numérico como o método de Newton-Raphson. Esse procedimento pode ser resumido como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(T) \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}(T) \\ \eta_a(\mathbf{q}(t), \epsilon) = 0 \\ \eta_p(\mathbf{q}(t), \gamma) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow[\text{método do tiro}]{\text{MBH ou}} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \eta_a(\mathbf{x}, \epsilon) = 0 \\ \eta_p(\mathbf{x}, \gamma) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow[\text{Raphson}]{\text{Newton-}} \mathbf{x}(\epsilon, \gamma), \quad (1.3.66)$$

onde \mathbf{R} corresponde ao sistema algébrico gerado pelo método escolhido e \mathbf{x} representa as respectivas variáveis do novo problema. Quando utilizado o MBH, as variáveis do problema passam a ser a frequência fundamental e os coeficientes de Fourier da solução periódica. Quando o método do tiro é utilizado, as variáveis passam a ser o período fundamental e as condições iniciais que possibilitam a periodicidade da solução. A solução periódica, como pode ser vista na equação (1.3.66), depende exclusivamente dos valores escolhidos para ϵ e γ . Quando o método de Newton-Raphson é escolhido para calcular uma aproximação para a solução do problema algébrico, as n diferentes aproximações das soluções periódicas são encontradas através de n diferentes propostas iniciais para a solução. Pelo fato do método de Newton-Raphson ser um método local, cada proposta deve ser próximo de cada solução periódica, caso contrário pode não haver convergência para uma das aproximações. Muitas vezes, definir apropriadamente essas propostas iniciais pode ser a parte mais complicada do problema.

Para sistemas lineares, o período de uma determinada família de soluções periódicas e a relação existente entre os deslocamentos dos graus de liberdade se mantêm a mesma, independente do valor escolhido para ϵ e γ . Isso é uma característica exclusiva dos sistemas lineares e será mostrado em detalhe no exemplo a seguir.

Exemplo 1.5. *Vamos novamente considerar o sistema massa-mola definido no Exemplo 1.3. As famílias de soluções periódicas definidas pelas Eq. (1.3.53) e Eq. (1.3.54) foram obtidas através de um problema de autovalor. Neste exemplo, buscaremos as mesmas soluções, no entanto, através de*

um problema de valor de contorno periódico. O método escolhido corresponde ao MBH, que ainda será apresentado em detalhe no capítulo 2.

Iniciamos o processo de cálculo dos MNLs a partir do problema de valor de contorno periódico definido pela Eq. (1.3.66), onde as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} foram definidas no Exemplo 1.3. A busca pelas soluções periódicas começa propondo um Ansatz na forma de uma série de Fourier truncada, neste caso contendo apenas o primeiro harmônico

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} \cos(\omega t - \theta), \quad (1.3.67)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Neste caso, apenas o primeiro harmônico foi utilizado no Ansatz pelo fato do sistema ser linear. Posteriormente, harmônicos de ordem mais alta serão necessários para buscar aproximações mais precisas das soluções periódicas dos sistemas não-lineares. é importante ressaltar também que esse Ansatz satisfaz automaticamente as restrições de periodicidade do problema de valor de contorno periódico. Substituindo a Eq. (1.3.67) na equação de movimento, Eq. (1.3.50), obtêm-se

$$\begin{bmatrix} (2 - \omega^2) \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 \\ (2 - \omega^2) \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1 \end{bmatrix} \cos(\omega t - \theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.3.68)$$

A Eq. (1.3.68) precisa valer para qualquer instante, o que implica em

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (2 - \omega^2) \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 \\ (2 - \omega^2) \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \omega, \theta)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.3.69)$$

Na Eq. (1.3.69), $\mathbf{R}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \omega, \theta)$ representa o sistema de equações algébricas não-linear gerado pelo MBH, cujas variáveis são os coeficientes de Fourier, a frequência fundamental, e possivelmente, a fase do Ansatz, apesar desta última não ser o caso neste exemplo. No entanto, uma solução periódica para o sistema ainda não pode ser definida utilizando apenas esse sistema de equações, uma vez que não há uma restrição de amplitude e fase para a solução. Para isso, pode-se definir como restrição de amplitude o valor de algum coeficiente de Fourier, como por exemplo

$$\eta_a(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \omega, \theta, \epsilon) := \tilde{q}_1 - \epsilon = 0, \quad (1.3.70)$$

que impõe que \tilde{q}_1 tenha amplitude igual a ϵ . Para a restrição de fase, é usual buscar soluções periódicas que tenham fase igual a zero. Isso pode ser feito através da equação

$$\eta_p(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \omega, \theta, \gamma) := \theta - \gamma = 0. \quad (1.3.71)$$

e impondo que γ seja igual a zero.

Dessa forma, para obter uma solução periódica para esse sistema massa-mola definido no Exemplo 1.3, é necessário que seja resolvido o seguinte sistema algébrico não-linear

$$\begin{cases} (2 - \omega^2) \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 = 0 \\ (2 - \omega^2) \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1 = 0 \\ \tilde{q}_1 - \epsilon = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad (1.3.72)$$

Para este caso simples, o sistema pode ser resolvido analiticamente. Como o sistema possui apenas dois graus de liberdade, apenas duas soluções periódicas existem. As duas possíveis soluções para a Eq. (1.3.72) são

$$\begin{cases} \omega_1 = 1 \\ \tilde{q}_{1,1} = \epsilon \\ \tilde{q}_{1,2} = \epsilon \\ \theta_1 = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \omega_2 = \sqrt{3} \\ \tilde{q}_{2,1} = \epsilon \\ \tilde{q}_{2,2} = -\epsilon \\ \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (1.3.73)$$

Substituindo esses respectivos valores na Eq. (1.3.67), reconstrói-se famílias de solução periódicas que são equivalentes às definidas pelas Eq. (1.3.53) e Eq. (1.3.54). Nota-se que as frequências naturais do sistema, ω_1 e ω_2 , são constantes e independentes do nível de energia da solução (definido pelo parâmetro ϵ). Como será visto a seguir, isso é uma característica exclusiva dos sistemas lineares.

A figura 1.3 mostra as soluções periódicas obtidas para diferentes valores de ϵ . Nota-se que, para a primeira família de soluções periódicas (coluna da esquerda), todas as soluções apresentam um período igual a 2π , o que equivale uma frequência de oscilação igual a $\omega_1 = 1$ rad/s (valor da primeira frequência natural do sistema). Além disso, nota-se que os graus de liberdade se deslocam em fase e com a mesma amplitude para qualquer valor de ϵ . Isso fica evidente ao plotar $q_2(t)$ em função de $q_1(t)$ para todos os valores de ϵ , onde segmentos de retas com coeficientes angulares igual a 1 são obtidos. Através dessa constante relação entres os deslocamentos dos graus de liberdade, o primeiro MNL pode ser extraído e equivale a $\tilde{\mathbf{q}}_1 = [1 \quad 1]^T$.

Os mesmos comentários podem ser feitas a segunda família de soluções periódicas. As diferenças são que nesse caso o período das soluções é igual a $2\pi/\sqrt{3}$, o que equivale a uma frequência de oscilação igual a $\omega_2 = \sqrt{3}$ rad/s (segunda frequência natural do sistema), e a relação existente entre os deslocamentos dos graus de liberdade é -1, o que permite extrair o segundo MNL como sendo $\tilde{\mathbf{q}}_2 = [1 \quad -1]^T$.

1.4 Modos normais não-lineares

Várias aplicações clássicas de análise modal não podem ser estendidas para sistemas não-lineares [24, 17]. A principal razão para isso é a não existência

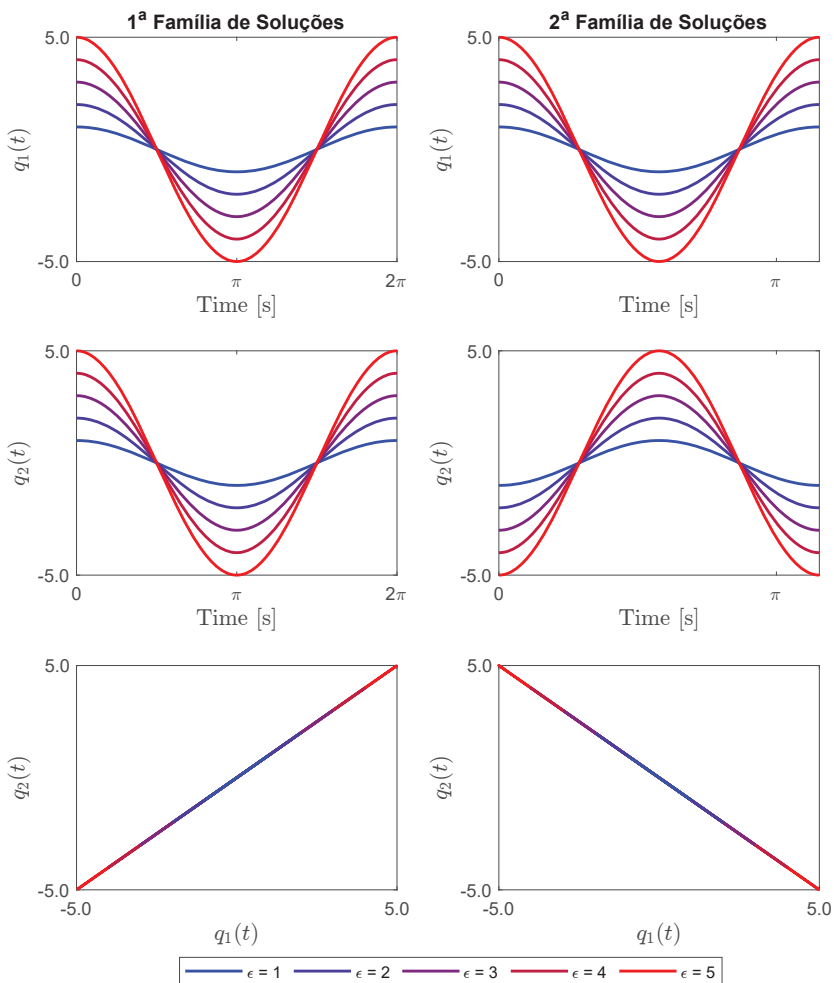


Figura 1.3: Soluções periódicas do sistema linear massa-mola de dois graus de liberdade utilizando uma série de Fourier truncada no primeiro harmônico.

da superposição modal nas respostas dos sistemas não-lineares. Além disso, a dependência energética nos modos não-lineares cria uma dificuldade adicional, visto que uma separação temporal-espacial não é possível nas soluções. No entanto, o conhecimento dos modos não lineares ainda é extremamente vantajoso uma vez que traz um completo entendimento das respostas dos sistemas no regime não-linear. Modos não-lineares são capazes de explicar fenômenos como enrijecimento/relaxamento das oscilações, localização das respostas, interação entre modos e definições de isolas (respostas isoladas de forçamentos harmônicos). Exemplos dessas aplicações são apresentadas no fim deste capítulo e no capítulo 5.

Apesar das primeiras contribuições relacionadas a modos não-lineares sejam atribuídas a Rosenberg ainda nos anos 60s [57, 59], essa área de pesquisa continua bastante ativa e com grandes contribuições ocorrendo nos últimos anos. Um grande esforço tem sido feito no desenvolvimento de procedimentos robustos para o cálculos de modos normais não-lineares de sistemas com grandes dimensões [51, 33], de sistemas não-conservativos [38, 52, 53, 35, 23], e de aplicação destes modos em reduções de modelos [68, 7]. Do ponto de vista numérico, procedimentos de cálculo dos MNNs para sistemas com não-linearidades locais (não-linearidades atuantes em apenas alguns graus de liberdade) já estão bastante maduros e robustos. No entanto, quando considerado o caso de estruturas flexíveis, onde a não-linearidades atuantes nos sistemas são distribuídas ao longo da estrutura (não-linearidades geométricas), desafios numéricos ainda persistem e têm sido tema de estudos [13, 66, 71, 73]. A identificação experimental dos MNNs também está em processo de desenvolvimento, onde o método tradicional de análise modal experimental está sendo ajustado para sistemas não lineares [48, 67, 47, 54, 55, 3]. Uma revisão contendo os principais desenvolvimentos em MNNs nos últimos anos podem ser encontrada em [34, 32, 46, 56, 1].

Atualmente existem duas definições de modos não-lineares amplamente reconhecidas na literatura: a dos modos normais não-lineares de Rosenberg [57, 59] e a das variedades invariantes de Shaw e Pierre [62, 63, 64]. Na definição das variedades, os conceitos de modos não-lineares são estendidos para os sistemas não-conservativos, o que a torna uma definição mais abrangente. No entanto, os procedimentos de cálculo propostos até o momento são limitados a casos de sistemas simples e com poucos graus de liberdade. Por outro lado, os procedimentos de cálculo dos MNNs seguindo a definição de Rosenberg estão mais evoluídos e por isso serão apresentados neste livro. A restrição dos MNNs de Rosenberg para sistemas conservativos pode parecer ser uma severa limitação a primeira vista, mas não é tão exclusiva como parece. Isso porque a dinâmica de sistemas dissipativos pode, muitas vezes, ser interpretada através da estrutura topológica e de bifurcação dos MNNs de sistemas conservativos associados [31]. Logo, os modos de Rosenberg trazem importantes informações sobre a dinâmica de sistemas, sendo eles conservativos ou não.

Os modos normais não-lineares (MNNs) definidos por Rosenberg são

restritos a sistemas conservativos. Dessa forma, os sistemas mecânicos não-lineares que serão abordados neste livro têm sua dinâmica modelada a partir da seguinte equação diferencial ordinária

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{0}, \quad (1.4.74)$$

onde $\mathbf{f}_{nl} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor genérico de forças não-lineares que dependem apenas dos deslocamentos do sistema.

Análogo ao caso dos sistemas lineares, busca-se inicialmente os MNNs a partir dos movimentos síncronos dos sistema não-lineares. No entanto, a não linearidade representada pelo vetor \mathbf{f}_{nl} impede que as soluções sejam escritas através da técnica de separação de variáveis, onde os termos temporais e espaciais podem ser escritos separadamente. Esse fato impede a criação de um problema de autovalor, cujas respostas permitiriam o desacoplamento do sistema. Logo, não é possível escrever a solução de um sistema não-lineares através da superposição modal.

Para demonstrar o fato descrito acima, imagina-se que as soluções síncronas dos sistemas não-lineares possam sim ser escritas através de um produto de termos temporais e espaciais independentes. Dessa forma, propondo o mesmo *Ansatz* definido pela Eq. (1.3.20) e substituindo-o na Eq. (1.4.74), obtêm-se a seguinte equação

$$\left(\mathbf{K} + s^2\mathbf{M}\right) \tilde{\mathbf{q}}e^{st} + \mathbf{f}_{nl}(\tilde{\mathbf{q}}, s) = \mathbf{0} \quad (1.4.75)$$

No entanto, a menos que \mathbf{f}_{nl} seja linear, Eq. (1.4.75) não pode ser escrita na forma de um problema de autovalor. Logo, não é possível calcular os MNNs como a solução de um problema de autovalor como é tradicionalmente feito para sistemas lineares. No entanto, soluções periódicas continuam a existir para sistemas não-lineares e podem ser obtidas diretamente através da solução de problemas de valores de contorno periódicos. Em outras palavras, apenas o procedimento alternativo descrito na seção 1.3.2 pode ser estendido para o cálculo de modos normais de sistemas não-lineares.

O problema de valor de contorno periódico que governa as soluções periódicas dos sistemas mecânicos não-lineares e conservativos pode ser escrito como

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{0}, & t \in [0, T] \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(T) \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}(T) \end{cases} \quad (1.4.76)$$

As soluções deste problema correspondem aos MNNs segundo a definição de Rosenberg. No entanto, assim como no caso linear, esse problema é indeterminado e possui infinitas soluções, uma vez que não há nenhuma restrição em relação a amplitude e a fase das soluções. Novamente, pode-se

adicionar duas equações de restrição ao problema, resultando em

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{0}, & t \in [0, T] \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(T) \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}(T) \\ \eta_a(\mathbf{q}(t), \epsilon) = 0 \\ \eta_p(\mathbf{q}(t), \gamma) = 0 \end{cases} \quad (1.4.77)$$

Assim como no caso linear, o problema definido pela Eq. (1.4.77) passa a ter um número finito de soluções, mas não está restrito a dimensão do sistema. Isso significa que é possível obter em alguns casos mais de n soluções periódicas para um determinado nível de energia. Essa é a primeira grande diferença entre MNL e MNN.

A solução do problema definido pela Eq. (1.4.77) pode ser encontrada da mesma forma como foi feita para o caso linear. Métodos como MBH e o método do tiro podem transformar o problema de valor de contorno periódico em um problema algébrico não-linear, cuja solução pode ser obtida através de um *solver* como o método de Newton-Raphson.

A seguir, dois exemplos são utilizados para mostrar as principais características dos MNNs. O Exemplo 1.6 busca mostrar a dependência energética dos MNNs através de uma aproximação simples das soluções periódicas. Já o Exemplo 1.7 mostra aproximações mais precisas para as soluções periódicas, onde as aproximações podem ter a participação harmônicos de ordem mais elevada.

Exemplo 1.6. *Para ilustrar o cálculo dos modo normais não-lineares, utiliza-se um simples sistema massa-mola de dois graus de liberdade, semelhante ao utilizado nos Exemplos 1.3 e 1.5, no entanto agora com uma mola não-linear (cúbica) fixada na primeira massa. O sistema é ilustrado pela Figura 1.4 A equação de movimento deste novo sistema é dado por*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5q_1^3(t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{nl}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}} \quad (1.4.78)$$

Este sistema não-linear apresenta um ponto de equilíbrio trivial (0,0). O teorema central de Lyapunov garante-se a existência de pelo menos duas famílias de soluções periódicas. Nota-se que, se este sistema estiver orbitando com um baixo nível de energia (próximo ao centro), os respectivos deslocamentos $q_1(t)$ e $q_2(t)$ são pequenos e o termo não-linear da equação pode ser desprezado por ser de ordem elevada. Logo, é esperado que o sistema não-linear tenha um comportamento próximo ao do sistema linearizado nestas condições. Consequentemente, é esperado que os MNNs sejam próximos aos MNLs do sistema linearizado para orbitas de baixa energia.

Para realizar o cálculo dos MNNs nesse exemplo, utiliza-se o MBH, que será discutido a fundo no capítulo 2. Para manter este exemplo simples,

utiliza-se um aproximação para a solução periódica na forma de uma série de Fourier truncada no primeiro harmônico. Essa aproximação é possivelmente imprecisa, mas permite ilustrar analiticamente a dependência energética nos MNNs.

O Ansatz para a solução periódica é definido como sendo

$$\mathbf{q} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} \cos(\omega t - \theta). \quad (1.4.79)$$

Para simplificar as manipulações algébricas a seguir, impõe-se neste momento uma restrição de fase para a solução periódica ao definir $\theta = 0$. Substituindo esse Ansatz na equação de movimento, obtêm-se

$$\begin{cases} [(2 - \omega^2) \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2] \cos \omega t + 0.5 \tilde{q}_1^3 \cos^3 \omega t = 0 \\ [(2 - \omega^2) \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1] \cos \omega t = 0 \end{cases}. \quad (1.4.80)$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$, pode-se reescrever a Eq. (1.4.80) como

$$\begin{cases} [(2 - \omega^2) \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 + \frac{3}{8} \tilde{q}_1^3] \cos \omega t + \frac{1}{8} \tilde{q}_1^3 \cos 3\omega t = 0 \\ [(2 - \omega^2) \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1] \cos \omega t = 0 \end{cases}. \quad (1.4.81)$$

Tendo em vista que o Ansatz corresponde a uma série de Fourier truncada na primeira ordem, o MBH exige um balanço dos coeficientes até o primeiro harmônico, o que resulta em

$$\begin{cases} (2 - \omega^2) \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 + \frac{3}{8} \tilde{q}_1^3 = 0 \\ (2 - \omega^2) \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1 = 0 \end{cases} \quad (1.4.82)$$

Através de algumas manipulações algébricas, pode-se reescrever analiticamente as expressões das amplitudes \tilde{q}_1 e \tilde{q}_2 em função de ω

$$\begin{cases} \tilde{q}_1 = \pm \sqrt{\frac{8(\omega^2-3)(\omega^2-1)}{3(\omega^2-2)}} \\ \tilde{q}_2 = \frac{\tilde{q}_1}{2-\omega^2} \end{cases} \quad (1.4.83)$$

O sistema de equações acima é indeterminado e permite infinitas soluções. Isso porque existem três variáveis (\tilde{q}_1 , \tilde{q}_2 e ω) e apenas duas equações. Na primeira linha do sistema acima, a raiz quadrada resultará em valores reais apenas para dois intervalos de ω , definidos aqui como sendo

$$\Omega_1 \in [1, \sqrt{2}[\quad e \quad \Omega_2 \in [\sqrt{3}, +\infty[\quad (1.4.84)$$

Nota-se que os valores inferiores de cada intervalo (1 rad/s e $\sqrt{3}$ rad/s) correspondem às frequências naturais do sistema linearizado. Por isso, diz-se que o intervalo Ω_1 está relacionado ao primeiro modo do sistema, e o

intervalo Ω_2 está relacionado ao segundo modo do sistema. Quando $\omega \in \Omega_1$, as amplitudes \tilde{q}_1 e \tilde{q}_2 têm mesmo sinal, representando então um modo em fase do sistema. Já quando $\omega \in \Omega_2$, as amplitudes passam a ter sinais opostos, o que caracteriza um modo fora de fase do sistema.

Para que o sistema definido na Eq. (1.4.83) possa a ter um número finito de solução, é necessário que uma restrição de amplitude seja imposta ao problema. Vale lembrar que a restrição de fase já foi incorporada à solução quando o Ansatz foi definido impondo $\theta = 0$. Para este exemplo, a restrição de amplitude será incorporada restringindo a energia mecânica do sistema. Como o sistema é conservativo, a energia mecânica é constante ao longo do tempo. Assim, a restrição de energia mecânica será definida apenas para $t = 0$, que por conta da restrição de fase $\theta = 0$, faz com que as velocidades de ambas as massas seja zero em $t = 0$. Por isso, a restrição de amplitude se resume a restringir apenas a energia potencial elástica do sistema. Dessa forma, a equação de restrição de amplitude pode ser escrita como sendo

$$\eta_a(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \omega, \epsilon) = \frac{\tilde{q}_1^2}{2} + \frac{(\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1)^2}{2} + \frac{\tilde{q}_2^2}{2} + 0.5 \frac{\tilde{q}_1^4}{4} - \epsilon = 0, \quad (1.4.85)$$

onde ϵ corresponde ao nível de energia desejado. Ao substituir as amplitudes \tilde{q}_1 e \tilde{q}_2 definidas na Eq. (1.4.83) na Eq. (1.4.85), obtêm-se uma única equação algébrica para ω em função de ϵ , o que mostra a dependência energética na frequência fundamental da solução periódica. Para cada nível de energia, existem duas soluções para ω , uma pertencendo ao intervalo Ω_1 e outra pertencendo ao intervalo Ω_2 . Essas soluções são mostradas na Figura 1.5 através de um gráfico Frequência-Energia. Essa ferramenta gráfica é muito utilizada para representar soluções de MNNs. Nota-se que para valores baixos de energia, as frequências fundamentais são aproximadamente constantes e com valores próximos ao do sistema linearizado associado (1 e $\sqrt{3}$ rad/s). Dessa forma, essa ferramenta nos permite determinar, fixado um critério de erro, um valor máximo de energia para o qual um modelo linear pode ser utilizado para aproximar a dinâmica de um sistema não-linear. Neste exemplo, esse valor estaria próximo a 0.1 J. Além disso, o gráfico Frequência-Energia nos permite visualizar se o sistema sofre um processo de enrijecimento, quando a frequência fundamental aumenta em função da energia, ou quando o sistema passa por um processo de relaxamento, quando a frequência fundamental diminui com o aumento da energia. Neste exemplo, o sistema sofre um processo de enrijecimento nos dois modos.

A partir dos valores obtidos para ω , pode-se calcular os valores das amplitudes \tilde{q}_1 e \tilde{q}_2 utilizando a Eq. (1.4.83). Isso mostra que as amplitudes também dependem do nível de energia, visto que ω depende de ϵ . A dependência energética nas soluções periódicas é a principal característica dos MNNs e o que os diferem dos MNLs.

Exemplo 1.7. No exemplo anterior, Exemplo 1.6, as soluções periódicas que caracterizam os MNNs foram aproximadas por uma série de Fourier

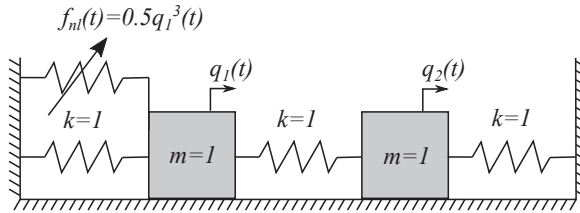


Figura 1.4: Sistema massa-mola de dois graus de liberdade com uma mola cúbica fixada na primeira massa.

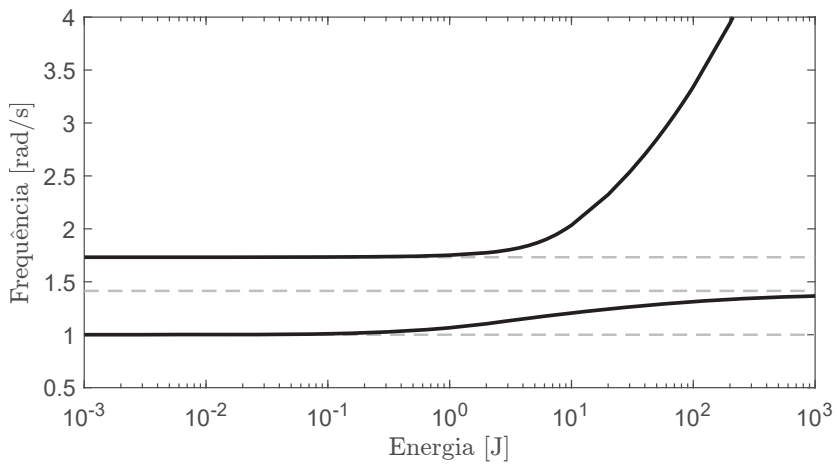


Figura 1.5: Gráfico Freqüência-Energia para os dois MNNs do Exemplo 1.6.

truncada no primeiro harmônico. Isso permitiu que uma expressão analítica para as amplitudes dos deslocamentos e para a frequência fundamental de oscilação em função da energia no sistema fosse obtida. No entanto, essa aproximação utilizando apenas o primeiro harmônico se afasta da solução periódica a medida que a energia do sistema aumenta e a não-linearidade se torna mais expressiva. Para melhorar a aproximação, uma série de Fourier truncada em ordem mais elevadas pode ser utilizada como Ansatz. Um melhor detalhamento deste método é discutido no capítulo 2.

Neste exemplo, as soluções periódicas do sistema abordado no Exemplo 1.6 são calculadas utilizando um série de Fourier truncada no sexto harmônico, o que resulta em ótimas aproximação das soluções periódicas. Para avaliar essas aproximações para diferentes níveis de energia, um processo de continuação numérica foi utilizada. Essa técnica e será discutida em detalhes no capítulo 4.

As aproximações das duas famílias de soluções periódicas, estendidas a partir dos MNLs do sistema linear associado, são mostradas na Figura 1.6. As curvas em azul representam aproximações das soluções periódicas para baixas energias, enquanto as curvas em vermelho representam aproximações das soluções periódicas para altas energias. Para as aproximações da primeira família de soluções periódicas (primeiro MNN), nota-se que o período da resposta é de aproximadamente 2π segundos para o menor nível de energia, o que corresponde a uma frequência fundamental de 1 rad/s. Esse mesmo valor encontrado foi para a primeira frequência natural do sistema linear discutido no Exemplo 1.5, que corresponde ao sistema linear associado ao sistema não-linear deste exemplo. No entanto, a medida que a energia aumenta, nota-se que o período da aproximação diminui. Isso condiz com o resultado visto na Figura 1.5, onde a frequência fundamental ($\omega = 2\pi/T$) do primeiro MNN aumenta com a energia, caracterizando assim um comportamento de enrijecimento. Nota-se também que os dois graus de liberdade se movimentam na mesma direção, e por isso caracterizam a extensão não-linear do primeiro MNL associado. No entanto, diferentemente do caso linear, as amplitudes dos deslocamentos não são iguais para um determinado valor de energia, especialmente para as aproximações com altos valores energéticos. Observa-se que o deslocamento $q_2(t)$ possui uma amplitude maior que $q_1(t)$ a medida que a energia aumenta. Além disso, as curvas não são mais puramente senoidais, já que possuem a participação de harmônicos de ordem mais alta. Essas últimas duas características fazem com que as curvas de q_2 em função de q_1 não seja mais definido por segmentos de retas como no caso linear (consequência dos harmônicos de ordem elevada), e muito menos tendo o mesmo coeficiente angular (dependência energética nas amplitudes).

Os mesmos comentários sobre a dependência energética nos períodos e nas amplitudes das aproximações podem ser feitas para a segunda família de soluções periódicas (segundo MNN). Neste caso, para baixos valores de energia, o período das aproximações é aproximadamente igual a $2\pi/\sqrt{3}$ segundos, o que corresponde a uma frequência fundamental de $\sqrt{3}$ rad/s (valor igual a

da segunda frequência natural do sistema linear associado). Com o aumento da energia, o período das aproximações diminui, desta vez com uma taxa maior que as aproximações para o primeiro MNN. A taxa de crescimento mais acelerada para a frequência fundamental do segundo MNN já tinha sido visto no gráfico Frequência-Energia na Figura 1.5, o que mostra que a simples aproximação das soluções periódicas com apenas o primeiro harmônico já contém valiosas informações sobre a dinâmica do sistema. Em relação as amplitudes dos deslocamento para a segunda família de soluções periódicas, nota-se que as amplitudes de $q_1(t)$ crescem rapidamente, enquanto $q_2(t)$ mantém uma amplitude aproximadamente constante. Para os valores altos de energia, pode-se dizer que o movimento do segundo MNN está praticamente restrito ao primeiro grau de liberdade. Isso significa que o sistema passa por um processo de localização, onde o movimento do sistema fica restrito a um subconjunto de graus de liberdade. Esse é o motivo pelo qual as curvas de q_2 em função de q_1 sejam aproximadamente horizontais para esse segundo MNN.

Diferentemente dos sistemas lineares, os sistemas não-lineares podem apresentar um número maior de MNNs (família de soluções periódicas) comparado ao número de graus de liberdade. Para sistemas discretos, é garantido através do teorema central de Lyapunov a existência de pelo menos n famílias de soluções periódicas ao redor de um ponto de equilíbrio do sistema. Além disso, para baixos níveis de energia, isso é, soluções próximas ao um centro que define um ponto de equilíbrio, as soluções periódicas que caracterizam cada MNN estão na vizinhança de um MNL do sistema linearizado. Logo, existem n família de soluções periódicas (MNN) que podem ser vistas como extensões não-lineares das soluções periódicas do sistema linearizado (MNLs). Isso foi mostrado ao comparar as soluções periódicas do Exemplo 1.5 com as aproximações do Exemplo 1.7.

A medida que essas soluções periódicas se distanciam do ponto de equilíbrio (soluções com maiores níveis de energia), é possível que haja o surgimento de novas famílias de soluções periódicas, isto é, o surgimento de novos MNNs. Quando isso acontece, diz-se que um ponto de bifurcação foi cruzado através a variação do parâmetro de energia. As novas famílias de soluções periódicas que surgem após esse ponto de bifurcação representam ressonâncias internas, e consistem em soluções periódicas que trocam a energia entre MNNs gradualmente. Como foi visto no Exemplo 1.7, as soluções periódicas de sistemas não-lineares contêm a participação de harmônicos de ordem mais elevada. Logo, como existe a dependência energética nas frequências fundamentais das soluções, existe também a dependência energética das frequências harmônicas, visto que essas são múltiplas da frequência fundamental. Assim, é possível que, para um determinado valor de energia ϵ^* , a frequência de algum harmônico de algum MNN se iguale a frequência de outro harmônico de um outro MNN. Quando isso acontece, existe o surgimento uma nova família de soluções periódicas (ponto de bifurcação) que representa essa in-

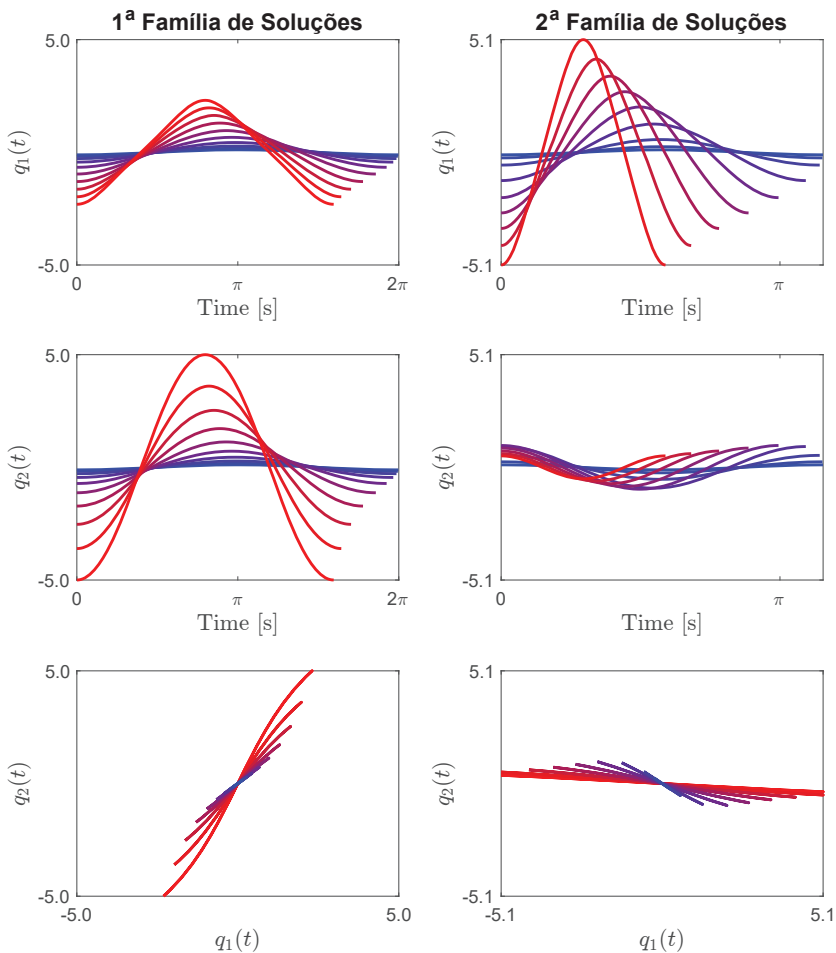


Figura 1.6: Aproximações das soluções periódicas do sistema não-linear massa-mola de dois graus de liberdade utilizando uma série de Fourier truncada no sexto harmônico.

teração entre modos. Esta nova família de soluções periódicas (novo MNN) mostra uma gradual troca de energia entre os modos relacionados a interação modal. Esse conceito de interação entre modos (ressonância interna) é mais fácil de ser explicado através de um exemplo.

Exemplo 1.8. *Considera-se neste exemplo novamente o sistema não-linear discutido nos Exemplos 1.6 e 1.7. No entanto, o cálculo das soluções periódicas que caracterizam os MNNs foi realizado para níveis de energia maiores que nos casos anteriores, ressaltando assim os efeitos da não-linearidade do sistema. A ordem de truncamento das aproximações foi mantido com seis harmônicos. A Fig 1.7 mostra o gráfico Frequência-Energia para os MMNs essa faixa maior de energia. As duas curvas pretas correspondem as frequências fundamentais, ω_1 e ω_2 , dos dois MNNs estendidos dos MNLs. Em azul, como referência, mostra-se o valor da frequência do terceiro harmônico do primeiro MNN, isto é, três vezes o valor de ω_1 . Para valores de energia limitadas pelas linhas verticais pontilhadas, é possível observar a existência de um laço na curva de ω_1 , que pode ser visto mais nítido através da curva $3\omega_1$. Consequentemente, para este intervalo, existe mais de 2 soluções periódicas para cada valor de energia. Esses laços, chamados na literatura de lúguas, representam a existência de uma interação entre modos. Neste exemplo, a interação ocorreu porque o valor do terceiro harmônico do primeiro MNN cruzou com a frequência fundamental do segundo MNN, iniciando assim uma troca gradativa de energia entre os modos. Essa interação é dita 3 por 1 (3:1), pois consiste na interação do terceiro harmônico com a frequência fundamental. Vale ressaltar outras interações entre modos existem, como por exemplo as interações 2:1 e 5:1, mas essas não foram computadas para manter esse exemplo simples.*

Para entender melhor essa interação entre modos, a Figura 1.8 mostra os deslocamentos dos dois graus de liberdade em sete diferentes pontos da curva ω_1 , tanto no ramo principal quanto na língua de interação. O ponto 1, por representar uma solução com baixa energia, corresponde ao primeiro MNL (modo em fase), onde a frequência é igual a 1rad/s e os graus de liberdade se movimentam de forma senoidal, em fase e com mesma amplitude. No ponto 2, a não-linearidade já se manifesta nas solução através de um aumento da frequência fundamental (enrijecimento), deslocamentos não-senoidais e com amplitudes distintas. No entanto, a contribuição do primeiro harmônico ainda é dominante nos deslocamentos neste ponto. é possível ver também uma tendência de localização do movimento no segundo grau de liberdade, $q_2(t)$, representado pela linha pontilhada vermelha. O ponto 3 corresponde ao primeiro ponto analisado na língua de interação. Neste ponto, é possível observar que o deslocamento do primeiro grau de liberdade, $q_1(t)$ (linha sólida azul), começa a ter uma participação maior do terceiro harmônico. Esse comportamento que fica mais evidente no ponto 4. Nestes dois pontos, é possível observar também uma tendência de redução da localização do movimento em $q_2(t)$. Ao chegar no ponto 5, o movimento corresponde in-

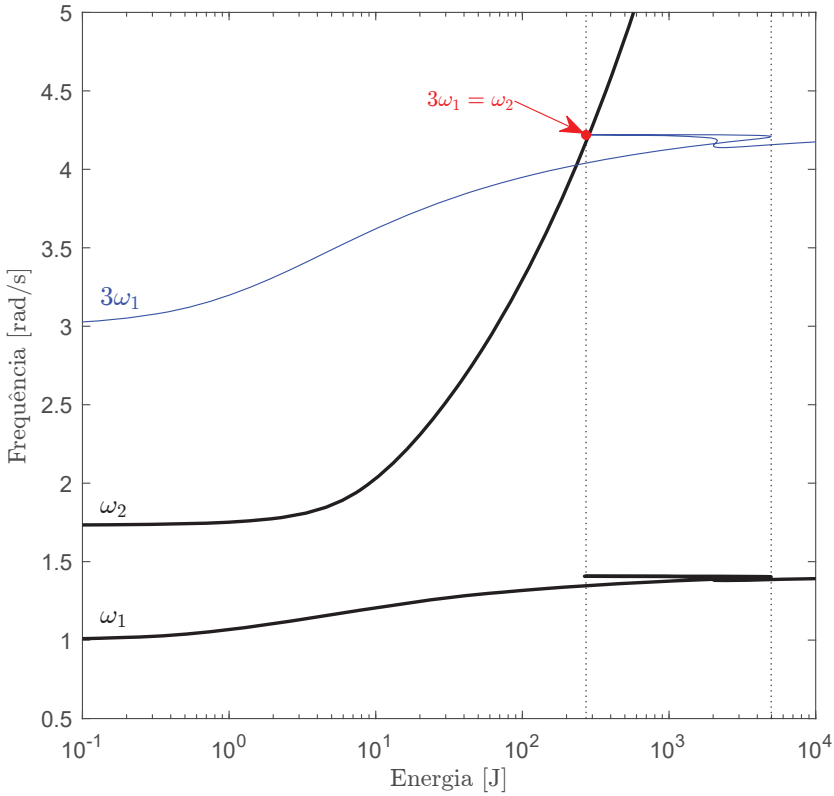


Figura 1.7: Gráfico Frequência-Energia mostrando a interação entre modos (ressonância interna) do sistema não-linear massa-mola de dois graus de liberdade.

teiramente ao segundo MNN, onde o terceiro harmônico é dominante e o movimento é localizado em $q_1(t)$. Seguindo o caminho da língua, o ponto 6 passa a ter um comportamento semelhante ao do ponto 4, no entanto defasado por π . A defasagem em MNNs é irrelevante, uma vez que ela é definida arbitrariamente pela restrição de fase da solução. O ponto 7 já pode ser definido como parte do ramo principal das soluções, isto é, fora da linha de interação. é possível observar que este último ponto volta a ter as principais características do primeiro MNN: primeiro harmônico dominante e localização do movimento em $q_2(t)$.

A última característica dos MNNs discutido neste capítulo corresponde ao conceito de estabilidade das soluções periódicas. Diferentemente dos MNLs, os MNNs podem ser caracterizados por soluções periódicas instáveis. Os conceitos de estabilidade de soluções periódicas será discutido a fundo no capítulo 3.

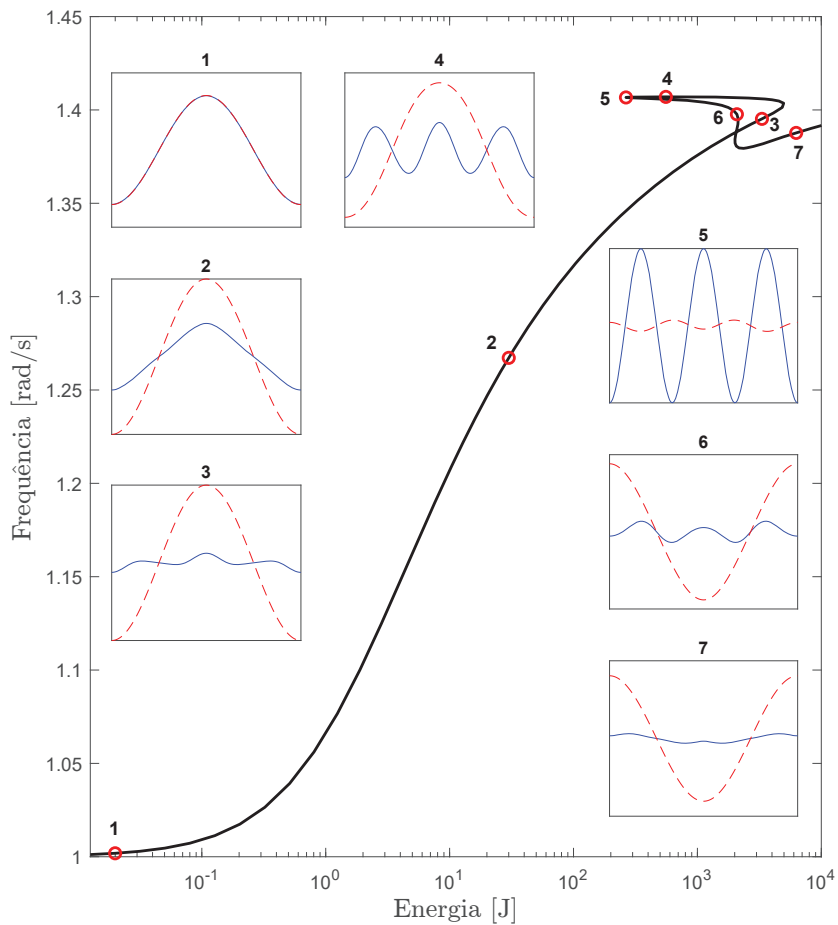


Figura 1.8: Soluções periódicas em ao longo do ramo principal do primeiro MNN e da 3:1 entre os modos representada pela língua.

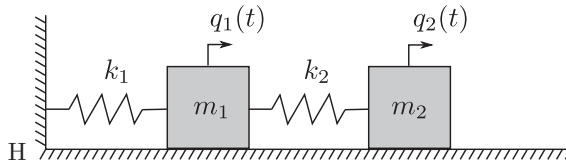


Figura 1.9: Sistema massa-mola linear de dois graus de liberdade.

1.5 Exercícios

1. Considere o sistema da Figura 1.9. O sistema é composto por duas partículas de massas m_1 e m_2 e por duas molas lineares de rigidezes k_1 e k_2 e comprimentos não-deformados l_1 e l_2 . Para parametrizar a dinâmica, escolhemos usar q_1 e q_2 para medir as posições das massas e m_1 e m_2 respectivamente. Consideramos que as forças nas molas são nulas se $q_1 = q_2 = 0$. Obtenha a dinâmica do sistema através do método de Lagrange. Calcule os modos normais lineares do sistema a partir de um problema de autovalor (suponha $m_1 = m_2 = 1$ e $k_1 = k_2 = 1$).
2. Cite semelhanças e diferenças entre os MNLs e os MNNs.
3. Explique porque os MNN não podem ser calculados através de um problema de autovalor.
4. O que são ressonâncias internas? Como elas são formadas?
5. Para um sistema não-linear, como os MNNs podem ser utilizados para definir níveis energéticos em que modelos lineares associados são aproximações aceitáveis?
6. Para um sistema discreto, quantos MNNs existem em baixos níveis de energia? Esse número pode aumentar ou diminuir com o aumento de energia?
7. A razão entre os deslocamentos dos graus de liberdade é constante ao longo de uma oscilação quando um sistema vibra em um dos seus MNL. O mesmo acontece quando um sistema vibra em um dos seus MNN?

Capítulo 2

Método do Balanço Harmônico

O Método do Balanço Harmônico (MBH) busca uma aproximação para a solução periódica de um problema de valor de contorno periódico. Essa aproximação é escrita na forma de uma série de Fourier truncada, cuja ordem de truncamento determina a precisão da aproximação. A melhora na aproximação com o aumento da ordem de truncamento é baseada no teorema de Fourier [60]. Em dinâmica de estruturas, as soluções periódicas podem ser bem aproximadas, em geral, utilizando apenas poucos harmônicos na série. A ordem de truncamento ideal depende, dentre outros fatores, da suavidade das soluções. Para um erro prescrito, quanto mais suave ela for, menor será a ordem de truncamento necessária para aproximá-la. Sistemas que apresentam algum tipo de descontinuidade no modelo precisam, em geral, de um maior número de harmônicos na série para terem suas soluções periódicas bem representadas. Essa característica tem um impacto no custo computacional do método, mas não inviabiliza sua utilização. Dessa forma, sistemas mecânicos que apresentam molas unidirecionais e impactos podem ser analisados, sem restrições, através do MBH.

Ao longo deste capítulo, uma suposição sobre a forma da aproximação (a de uma série de Fourier truncada) será utilizada e chamada ao longo do texto de Ansatz da solução. Quando este Ansatz é incorporado na equação diferencial que governa o problema, uma função resíduo é esperada uma vez que o Ansatz corresponde a apenas uma aproximação da solução periódica. Para o caso de modos normais não-lineares (MNN) definidos de acordo com Rosenberg (capítulo 1) [57, 58, 59], as soluções periódicas são definidas para sistemas autônomos (cujas equações de movimento não dependem explicitamente do tempo) e conservativos, o que implica em uma inevitável periodicidade das funções resíduos. Logo, pode-se representá-las também através de uma série de Fourier. Em resumo, o MBH exige que a função resíduo seja ortogonal ao subespaço vetorial gerado pela base do Ansatz. Isso consiste em impor que os coeficientes da série de Fourier da

função resíduo sejam iguais a zero até a ordem de truncamento do Ansatz. Para obter esse resultado, um sistema algébrico não-linear precisa ser resolvido, onde as incógnitas do problema são os coeficientes de Fourier e a frequência fundamental do Ansatz. A construção das equações algébricas consiste na principal etapa do MBH e se baseia em uma aproximação por resíduos ponderados. Quando sistemas de grande dimensão ou contendo complexas não-linearidades são considerados, uma solução analítica para o sistema de equações algébricas não-linear pode não existir, exigindo assim a necessidade da utilização de métodos numéricos para resolvê-lo, como por exemplo, o método de Newton-Raphson.

Esse capítulo inicia com uma revisão sobre série de Fourier e um dos possíveis erros associados a estimativa dos coeficientes através de sinais discretos, chamado aqui de mascaramento (*aliasing*). A consideração desse erro é importantes para a implementação do MBH utilizando o método de Alternância Frequência-Tempo (AFT), discutido no final deste capítulo. Na seção 2.2, o MBH é apresentado através de uma abordagem por resíduos ponderados considerando um sistema autônomo e conservativo genérico. Na seção 2.3, o MBH é então apresentado para sistema mecânicos tipicamente utilizados em dinâmica de estruturas. Na seção 2.4, discute-se como resolver numericamente o sistema de equações algébricas obtido pelo MBH.

2.1 Série de Fourier

Seja $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma função periódica de forma que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T)$ para qualquer valor de tempo $t \in \mathbb{R}$. A constante $T > 0$ representa o período fundamental da função, isto é, o menor intervalo de tempo em que $\mathbf{x}(t)$ se repete. De acordo com o teorema de Fourier, qualquer função periódica pode ser expandida como uma soma infinita de senos e cossenos

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}_0^{(c)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{x}}_k^{(c)} \cos(k\Omega t) + \tilde{\mathbf{x}}_k^{(s)} \sin(k\Omega t), \quad (2.1.1)$$

onde $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência fundamental e $k = 1, \dots, \infty$. O conjunto de vetores $\{\tilde{\mathbf{x}}_0^{(c)}; \tilde{\mathbf{x}}_k^{(c)}; \tilde{\mathbf{x}}_k^{(s)}\}_{k=1}^{\infty}$ corresponde ao conjunto de coeficientes de Fourier da função, e $\{1; \cos(k\Omega t); \sin(k\Omega t)\}_{k=1}^{\infty}$ consiste no conjunto de funções que compõem a base de Fourier, escritas aqui em sua representação trigonométrica. Na Eq. (2.1.1), o coeficiente $\tilde{\mathbf{x}}_0^{(c)}$ representa o valor médio do sinal. Já $\tilde{\mathbf{x}}_1^{(c)}$ e $\tilde{\mathbf{x}}_1^{(s)}$ são os coeficientes do primeiro harmônico, e $\tilde{\mathbf{x}}_k^{(c)}$ e $\tilde{\mathbf{x}}_k^{(s)}$ são os coeficiente de harmônicos de ordem mais elevada ($k > 1$). Nesta representação de funções periódicas, tanto os coeficientes quando as funções que compõem a base de Fourier são reais.

Essa série de Fourier que representa $\mathbf{x}(t)$ não é única e pode ser reescrita de uma forma equivalente, porém de forma mais compacta utilizando funções e coeficientes complexos. Através da fórmula de Euler, é possível reescrever

a Eq. (2.1.1) como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \tilde{\mathbf{x}}_0^{(c)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{x}}_k^{(c)} \cos(k\Omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{x}}_k^{(s)} \sin(k\Omega t) \\
 &= \tilde{\mathbf{x}}_0^{(c)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_k^{(c)}}{2} \left(e^{ik\Omega t} + e^{-ik\Omega t} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_k^{(s)} \mathbf{i}}{2} \left(e^{ik\Omega t} - e^{-ik\Omega t} \right) \\
 &= \tilde{\mathbf{x}}_0^{(c)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_k^{(c)} - \tilde{\mathbf{x}}_k^{(s)} \mathbf{i}}{2} e^{ik\Omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_k^{(c)} + \tilde{\mathbf{x}}_k^{(s)} \mathbf{i}}{2} e^{-ik\Omega t} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{x}}_k^{(e)} e^{ik\Omega t}. \tag{2.1.2}
 \end{aligned}$$

Na última linha da Eq. (2.1.2), os valores de k foram estendidos para valores inteiros negativos para permitir que a série fosse escrita de forma compacta. As relações existentes entre os coeficientes da representação trigonométrica ($\tilde{\mathbf{x}}_k^{(c)}$ e $\tilde{\mathbf{x}}_k^{(s)}$) com os coeficientes da representação exponencial ($\tilde{\mathbf{x}}_k^{(e)}$) da série de Fourier são dadas por

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_0^{(e)} = \tilde{\mathbf{x}}_0^{(c)}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_k^{(e)} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{x}}_k^{(c)} - \tilde{\mathbf{x}}_k^{(s)} \mathbf{i} \right), & \text{para } k > 0. \\ \tilde{\mathbf{x}}_k^{(e)} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{x}}_{-k}^{(c)} + \tilde{\mathbf{x}}_{-k}^{(s)} \mathbf{i} \right), & \text{para } k < 0 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Analisando os coeficientes $\tilde{\mathbf{x}}_k^{(e)}$, é possível observar a existência da propriedade de espelhamento conjugado, isso é,

$$\tilde{\mathbf{x}}_{-k}^{(e)} = \tilde{\mathbf{x}}_k^{(e)*},$$

onde \square^* representa o complexo conjugado do coeficiente. Essa propriedade adiciona, de certa forma, uma redundância na representação exponencial. Por isso, uma terceira representação para a série de Fourier de $\mathbf{x}(t)$, escrita de forma compacta e sem essa redundância pode ser definida como

$$\mathbf{x}(t) = \Re \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{x}}_k^{(r)} e^{ik\Omega t} \right\},$$

onde

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_0^{(r)} = \tilde{\mathbf{x}}_0^{(e)}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_k^{(r)} = 2\tilde{\mathbf{x}}_k^{(e)}, & \text{para } k > 0 \end{cases} \tag{2.1.4}$$

2.1.1 Ortogonalidade

Uma importante propriedade das funções que compõem a base de Fourier é a ortogonalidade. Na representação trigonométrica, a ortogonalidade entre

as funções pode ser resumida através dos seguintes produtos internos

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(j\Omega t) \cos(k\Omega t) dt = \begin{cases} 0, & \text{para } j \neq k \\ 1/2, & \text{para } j = k \end{cases} \quad (2.1.5)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(j\Omega t) \sin(k\Omega t) dt = \begin{cases} 0, & \text{para } j \neq k \\ 1/2, & \text{para } j = k \end{cases} \quad (2.1.6)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(j\Omega t) \sin(k\Omega t) dt = 0 \quad \text{para qualquer } j, k. \quad (2.1.7)$$

Os coeficientes de Fourier podem então ser facilmente calculados a partir desta propriedade. Realizando o produto interno entre $\mathbf{x}(t)$ e os elementos da base $\{1; \cos(k\Omega t); \sin(k\Omega t)\}_{k=1}^{\infty}$, um por vez, e usando os resultados das Eqs. (2.1.5-2.1.7), os coeficientes de Fourier podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}(t), 1 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) dt = \tilde{\mathbf{x}}_0^{(c)} \\ \langle \mathbf{x}(t), \cos(k\Omega t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) \cos(k\Omega t) dt = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_k^{(c)}}{2}; \quad k = 1, \dots, \infty \\ \langle \mathbf{x}(t), \sin(k\Omega t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) \sin(k\Omega t) dt = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_k^{(s)}}{2}; \quad k = 1, \dots, \infty \end{aligned}$$

A ortogonalidade também pode ser mostrada para as funções base de Fourier na representação exponencial, $\{e^{ik\Omega t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Primeiro, é necessário mostrar que a integral de qualquer elemento da base entre os limites 0 e T resulta em

$$\int_0^T e^{ik\Omega t} dt = \left. \frac{e^{ik\frac{2\pi}{T}t}}{ik\frac{2\pi}{T}} \right|_0^T = \begin{cases} T & \text{para } k = 0 \\ 0 & \text{para } |k| > 0 \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Apesar da expressão do meio na equação acima ser indeterminada para $k = 0$, seu limite é bem definido para $k \rightarrow 0$. O resultado da Eq. (2.1.8) pode ser utilizado para definir o produto interno entre quaisquer vetores da base

$$\begin{aligned} \langle e^{ik\Omega t}, e^{im\Omega t} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\Omega t} e^{-im\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(k-m)\Omega t} dt = \begin{cases} 1 & \text{para } k = m \\ 0 & \text{para } k \neq m \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

A equação (2.1.9) mostra que a base de Fourier na representação exponencial é ortogonal. Essa propriedade pode ser novamente utilizada para definir o coeficiente de Fourier da Eq. (2.1.2). Multiplicando ambos os lados da equação por $e^{-ik\Omega t}/T$ e integrando entre os limites 0 e T , obtêm-se como

resultado

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) e^{-ik\Omega t} dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{x}}_m^{(e)} e^{im\Omega t} e^{-ik\Omega t} dt \\ &= \tilde{\mathbf{x}}_k^{(e)} + \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq k}}^{\infty} \tilde{\mathbf{x}}_m^{(e)} e^{i(m-k)\Omega t} dt}_{=0}, \end{aligned}$$

de forma que

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^{(e)} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) e^{-ik\Omega t} dt. \quad (2.1.10)$$

Uma vez que os coeficientes de Fourier $\{\tilde{\mathbf{x}}_0; \tilde{\mathbf{x}}_k^{(c)}; \tilde{\mathbf{x}}_k^{(s)}\}_{k=1}^{\infty}$ ou $\{\tilde{\mathbf{x}}_k^{(e)}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ tenham sido calculados, $\{\tilde{\mathbf{x}}_k^{(r)}\}_{k=0}^{\infty}$ pode ser também calculado a partir das relações definidas pelas Eqs. (2.1.3) e (2.1.4).

Na discussão a seguir, até o final deste livro, será utilizada apenas a representação exponencial para a série de Fourier. Por isso, os sobrescritos (e) , (s) , (c) e (r) não serão mais utilizados nos coeficientes de Fourier para diferenciar as possíveis representações.

2.1.2 Aproximação discreta

Para algumas funções periódicas, a integral definida na Eq. (2.1.10) pode não ter uma expressão fechada. Além disso, quando trabalhando com dados experimentais, apenas algumas finitas amostras de $\mathbf{x}(t)$ estão disponíveis. Em diversos casos, essas restrições podem ser superadas utilizando uma integração numérica para avaliar os coeficientes de Fourier. Uma forma eficiente de fazer isso é através da transformação discreta de Fourier. No entanto, duas possíveis distorções podem surgir nesta aproximação: o mascaramento (*aliasing*) e o vazamento (*leakage*) [8]. Apenas a primeira delas será abordada neste livro porque se pressupõe que, para os cálculos dos modos normais lineares (MNN), os sinais periódicos serão amostrados com perfeita periodicidade, eliminando assim a possibilidade da existência de vazamento.

Seja $\{\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(j\Delta t)\}_{j=0}^{N-1}$ o conjunto de amostras de $\mathbf{x}(t)$ igualmente espaçadas com um incremento de tempo $\Delta t = T/N$ ao longo do intervalo de tempo $[0, T[$. Uma aproximação de tempo-discreto para os coeficientes da série de Fourier, definidos na Eq. (2.1.10), pode ser construída utilizando uma soma de Riemann

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{x}_j e^{-ik\bar{\Omega}j\Delta t}, \quad (2.1.11)$$

onde $\bar{\Omega} = \frac{2\pi}{N\Delta t}$.

Para avaliar a qualidade e as possíveis deformações desta aproximação, é possível estabelecer um relação entre cada coeficiente de Fourier estimado,

$\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_k$, com os coeficientes de Fourier teóricos, $\{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Substituindo a Eq. (2.1.2) avaliada nos instantes de tempos discretos $j\Delta t$ para $j = 0, \dots, N-1$ ($\mathbf{x}_j = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{x}}_r e^{ir\Omega j\Delta t}$) na Eq. (2.1.11), obtêm-se

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \overbrace{\sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{x}}_r e^{ir\Omega j\Delta t}}^{\mathbf{x}_j} e^{-ik\bar{\Omega}j\Delta t} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{x}}_r \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i(k\bar{\Omega}-r\Omega)j\Delta t} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{x}}_r K_1(k\bar{\Omega} - r\Omega) \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

onde

$$K_1(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\Omega j\Delta t} \quad (2.1.13)$$

A equação (2.1.12) mostra que cada coeficiente de Fourier estimado, $\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_k$, pode ser escrito como uma soma ponderada dos coeficientes de Fourier teóricos, $\{\tilde{\mathbf{x}}_r\}_{r=-\infty}^{\infty}$, cujos pesos na soma são definidos pela função kernel $K_1(\Omega)$. é importante notar que ambos os termos $\{\tilde{\mathbf{x}}_r\}_{r=-\infty}^{\infty}$ e $K_1(k\bar{\Omega} - r\Omega)$ na soma ponderada são complexos. Após algumas manipulações algébricas, é possível reescrever $K_1(\Omega)$ em uma forma mais conveniente, evidenciando a respectiva amplitude e fase da função. Além disso, $K_1(\Omega)$ pode ser reescrita utilizando uma variável adimensional $u = \frac{\Omega\Delta t}{2\pi}$. Assim, a função de kernel $K_1(u)$ se torna

$$\begin{aligned} K_1(u) &= \frac{\sin N\pi u}{N \sin \pi u} e^{-i\pi(N-1)u} \\ &= D_N(u) e^{-i\pi(N-1)u}. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

onde

$$D_N(u) = \frac{\sin N\pi u}{N \sin \pi u}$$

Na Eq. (2.1.14), a magnitude da função K_1 é representada pelo valor absoluto da função D_N , chamada de função kernel de Dirichlet. Para melhor compreender a forma desta função, gráficos de $|D_N|$ são apresentados na Figura 2.1 para diferentes valores de N . As principais observações a serem feitas em relação a essa função são:

- $|D_N|$ é periódico e com período igual a 1;
- é possível definir um intervalo de simetria $u \in [-1/2, 1/2]$ em que os limites do intervalo correspondem a frequência de Nyquist ($\Omega = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\Delta t} \rightarrow u = \frac{1}{2}$), metade da frequência de amostragem.

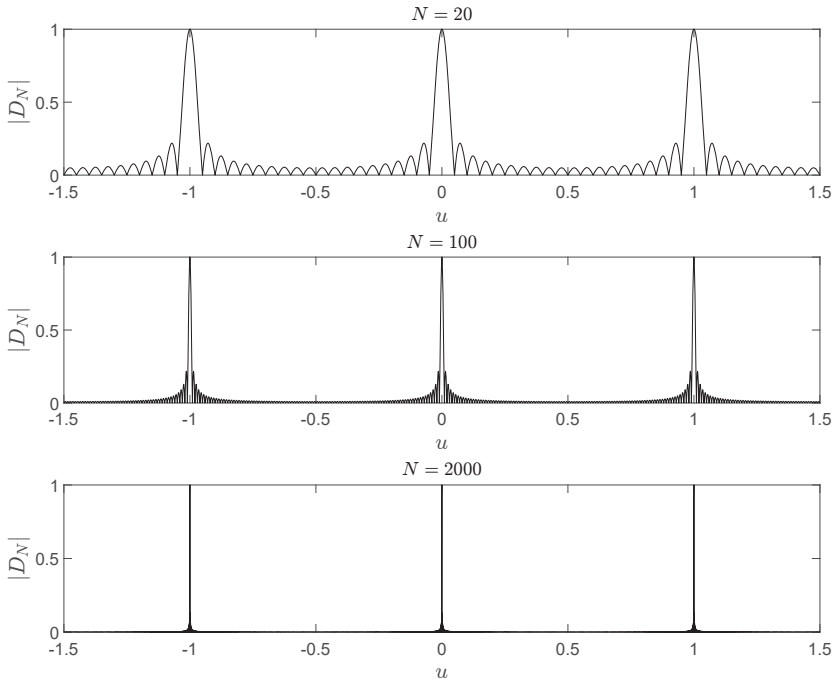


Figura 2.1: Gráfico esquemático da função kernel de Dirichlet com $N = 20$, 100 e 2000 amostras.

- O valor máximo global de $|D_N|$ é igual a 1 e ocorre uma vez a cada período da função ($u = \dots, -1, 0, 1, \dots$).
- Para $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |D_N|(u) = \begin{cases} 1, & \text{para } u = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, & \text{outros valores de } u \end{cases}$$

Considerando essas quatro características da função $|D_N|$, o possível erro de mascaramento causado pelo aproximação discreta dos coeficiente de Fourier é agora discutido. Como definição, o mascaramento é uma distorção que ocorre ao analisar sinais que foram discretizados a uma certa frequência de amostragem e que possuem contribuições de frequências acima da frequência de Nyquist, isso é, acima da metade da frequência de amostragem. Quando esse é o caso, essas contribuições aparecem erroneamente espelhadas pela frequência de Nyquist em frequências menores. Essa distorção é explicada principalmente pela periodicidade dos picos em $|D_N|$. Exemplos com sinais senoidais são apresentados a seguir para ilustrar essa deformação.

Exemplo 2.1. *Seja $x(t)$ uma onda senoidal com amplitude unitária e frequência f , amostrada a uma taxa fixa de 10 Hz durante 2 segundos. Os gráficos*

apresentados na parte superior da Figura 2.2 mostram $x(t)$ (em linha sólida) para três frequências diferentes ($f = 2, 4$ e 6 Hz). Os respectivos sinais amostrados correspondem às amostras $\{x_j\}_{j=0}^{19}$ representadas nos mesmos gráficos por pontos. Considerando as frequências dos sinais $x(t)$ e as frequências de amostragem, pode-se garantir que o sinal discreto composto pelas amostras são periódicos, eliminando assim a possibilidade de vazamento (uma outra distorção que pode existir ao estimar os coeficientes de Fourier a partir de sinais finitos).

Como todos os sinais analisados nesse exemplo são ondas senoidais, a magnitude de todos os coeficientes de Fourier deveriam ser iguais a zero, exceto $|\hat{x}_{-1}| = |\hat{x}_1| = 0.5$, que correspondem aos coeficientes relacionados à frequência fundamental do sinal. Utilizando a Eq. (2.1.11) e as amostras dos sinais, as aproximações discretas dos coeficientes de Fourier podem ser calculadas. Os respectivos resultados são mostrados na parte inferior da Figura 2.2. Pode-se observar que a aproximação é perfeita para os casos onde $f = 2$ e 4 Hz, mas um resultado errado é obtido para $f = 6$ Hz. Neste caso, a amplitude em ± 4 Hz deveria ser zero e não 0.5 como mostra o gráfico. Esse erro (o mascaramento) já era esperado uma vez que a frequência da onda senoidal é maior que a frequência de Nyquist ($6 > \frac{10}{2}$ Hz).

Através da Eq. (2.1.12), pode-se mostrar que os coeficientes de Fourier neste exemplo podem ser escritos como

$$\hat{\tilde{x}}_k = \tilde{x}_{-1}K_1(k\bar{\Omega} + 2\pi f) + \tilde{x}_1K_1(k\bar{\Omega} - 2\pi f).$$

Na Figura 2.3, mostra-se os valores de $K_1(k\bar{\Omega} - 2\pi f)$ e $K_1(k\bar{\Omega} + 2\pi f)$ para $f = 6$. Nesses gráficos, pode-se observar que os picos que antes se encontravam em ± 10 Hz, isso é, fora do intervalo básico de $[-5, 5]$ Hz, passaram a se posicionar em ± 4 Hz, isso é, dentro do intervalo básico de $[-5, 5]$ Hz. Essa translação de 6 Hz em K_1 , somada ao fato desta função ter uma periodicidade igual a 10 Hz, explica graficamente o surgimento do mascaramento para o caso em que $f = 6$ Hz.

Uma importante observação em relação ao mascaramento em procedimentos experimentais é que, uma vez amostrado o sinal (temporalmente discretizado), nada mais pode ser feito para atenuar essa deformação. Dessa forma, funções periódicas que contenham contribuições de frequências acima da frequência de Nyquist devem passar por um filtro analógico passa-baixa (anti-mascaramento) antes de passar pelo processo de discretização. Caso contrário o erro estará presente no sinal discreto.

2.2 Abordagem de resíduos ponderados

O objetivo do método do Balanço Harmônico (MBH) é obter uma aproximação precisa das soluções de problemas de valor de contorno periódicos. Por isso, retoma-se agora ao problemas em questão, definido na Eq. (1.4.76), que corresponde ao problema de valor de contorno periódico que define os modos

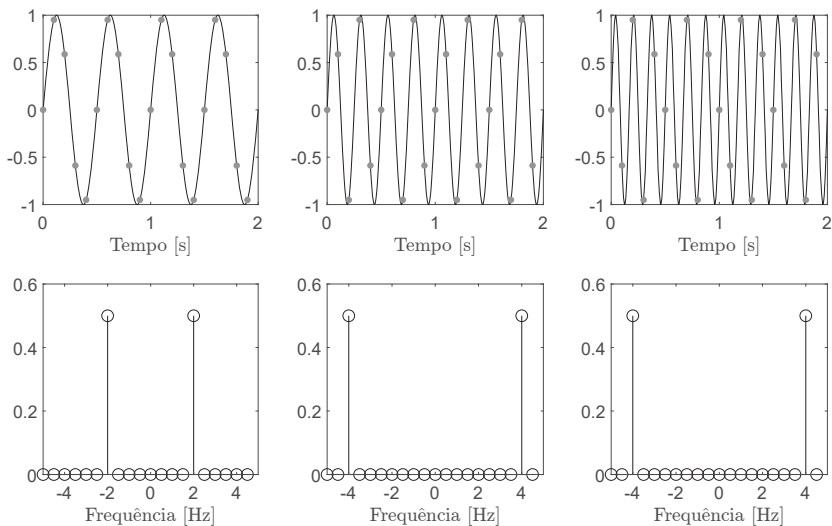


Figura 2.2: Exemplo de mascaramento a partir de ondas senoidais.

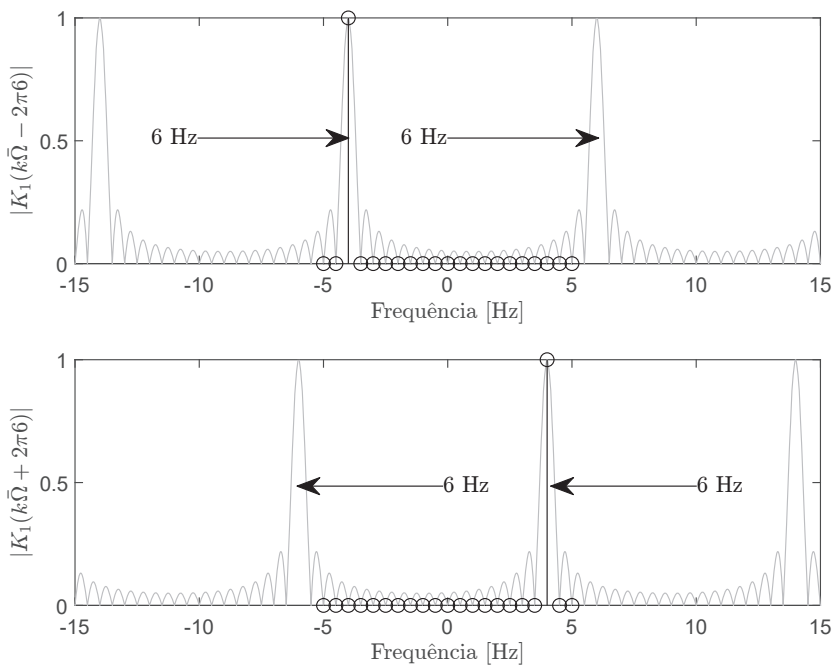


Figura 2.3: Valores de $K_1(k\bar{\Omega} - 6)$ e $K_1(k\bar{\Omega} + 6)$ para explicar o mascaramento.

normais não-lineares (MNN) de sistemas mecânicos não-lineares, autônomos e conservativos

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{0}, & t \in [0, T] \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(T) \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}(T) \end{cases} . \quad (2.2.15)$$

Este problema é composto por uma equação diferencial, definida sobre um determinado intervalo de tempo, somada a duas restrições de periodicidade. O objetivo deste capítulo é obter uma aproximação para a solução este problema utilizando o MBH. Uma solução analítica para a Eq. (2.2.15) é, em geral, impossível de ser obtida por conta do termo não-linear da equação diferencial. Isso motiva a procura por uma boa aproximação para a solução, mas que seja governada por um problema menos restritivo que o imposto pela Eq. (2.2.15). Essa alternativa é discutida agora e corresponde a um método de resíduos ponderados, no qual MBH é um caso particular.

Inicia-se propondo uma aproximação para a solução da Eq. (2.2.15), escrita na forma de uma combinação linear

$$\mathbf{q}_B(t, \{\beta_k\}) = \sum_{k=1}^B \beta_k b_k(t), \quad (2.2.16)$$

onde o conjunto $\{b_k(t)\}_{k=1}^B$ corresponde a uma base de funções escolhida para a aproximação e $\{\beta_k\}_{k=1}^B \in \mathbb{R}^n$ corresponde a um conjunto de coeficientes a ser determinado para aproximar $\mathbf{q}_B(t, \{\beta_k\})$ em $\mathbf{q}(t)$ dentro do intervalo $t \in [0, T]$. Ao substituir a Eq. (2.2.16) na equação diferencial do problema definido na Eq. (2.2.15), um resíduo é esperado uma vez que $\mathbf{q}_B(t, \{\beta_k\})$ é apenas uma aproximação. Essa função resíduo pode ser então definido como sendo

$$\mathbf{r}_B(t, \{\beta_k\}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_B(t, \{\beta_k\}) + \mathbf{K}\mathbf{q}_B(t, \{\beta_k\}) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}_B(t, \{\beta_k\})). \quad (2.2.17)$$

Caso $\mathbf{r}_B(t, \{\beta_k\}) = \mathbf{0}$ para $t \in [0, T]$ e as restrições de periodicidade sejam satisfeitas simultaneamente, a aproximação passa a ser a solução periódica do problema. No entanto, esse não é geralmente o caso. Ao invés de exigir que o resíduo $\mathbf{r}_B(t, \{\beta_k\})$ seja zero para todo $t \in [0, T]$ (a chamada formulação forte do problema), é possível definir uma exigência mais branda em que a média ponderada do resíduo precise ser zero para o intervalo $t \in [0, T]$ (a chamada formulação fraca do problema). Matematicamente, essa exigência mais branda pode ser representada pela equação

$$\langle \rho_j, \mathbf{r}_B \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \rho_j(t) \mathbf{r}_B(t, \{\beta_k\}) dt = \mathbf{0} \quad \text{for } j = 1, \dots, B \quad (2.2.18)$$

onde $\{\rho_j(t)\}_{j=1}^B$ corresponde a um conjunto de funções peso. A Eq. (2.2.18) define que o resíduo precisa ser ortogonal à função peso. Quando as funções que definem a base da aproximação $\{b_k(t)\}_{k=1}^B$ e as funções peso

Método	Base do subespaço da aproximação $\{b_k\}$	Funções peso $\{\rho_j\}$
Balanço Harmônico	Base de Fourier	Base de Fourier
Colocação trigonométrica	Base de Fourier	Distribuições de delta de Dirac
Colocação ortogonal	Polinômios de Lagrange	Distribuições de delta de Dirac

Tabela 2.1: Métodos de resíduo ponderados populares

($\{\rho_j(t)\}_{j=1}^B$) são escolhidas, a integração definida na Eq. (2.2.18) remove a dependência temporal do problema, resultando em um sistema de equações algébricas a ser resolvido em função dos coeficientes $\{\beta_k\}_{k=1}^B$. Uma vez que o sistema de equações algébricas é (em geral) não-linear, sua solução é obtida na prática utilizando métodos numéricos, como por exemplo, o método de Newton-Raphson.

O que distingue os vários tipos de métodos de resíduo ponderado é a escolha das funções peso e das funções que compõem a base da aproximação. Uma particularidade do MBH é o fato dele utilizar as mesmas funções tanto para a base da aproximação quanto para os pesos, o que o torna um método de Galerkin. O MBH utiliza uma base de Fourier para a aproximação, o que é de grande vantagem para o problema de valor de contorno periódico uma vez que a restrição de periodicidade é automaticamente satisfeita. Além disso, ao utilizar a base de Fourier, o MBH apresenta uma alta taxa de convergência para a maioria das soluções periódicas, o que o faz um método eficiente computacionalmente, especialmente para o caso de sistemas mecânicos de grande dimensão. Outros métodos populares de resíduo ponderado são apresentados na Tabela 2.1 com as respectivas funções de base do subespaço da aproximação e as funções de peso.

2.3 MBH para problemas de mecânica dos sólidos

Na seção anterior, foi mostrado como uma aproximação da solução de um problema de valor de contorno periódico pode ser obtida a partir de uma formulação fraca para o problema, construída a partir de um método de resíduos ponderados. Nessa seção, discute-se em detalhe o MBH, que corresponde a escolha de funções de Fourier tanto para a base do subespaço da aproximação quanto para as funções peso.

O MBH inicia propondo a aproximação da solução periódica na forma de uma série de Fourier truncada até uma ordem H . Essa aproximação é chamada aqui de *Ansatz* e pode ser escrita na sua forma exponencial como sendo

$$\mathbf{q}_H(t, \Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\}) = \sum_{k=-H}^H \tilde{\mathbf{q}}_k e^{ik\Omega t}. \quad (2.3.19)$$

Onde $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência fundamental de \mathbf{q}_H e $\{\tilde{\mathbf{q}}_k\}_{k=-H}^H$ corresponde ao conjunto de coeficientes de Fourier do *Ansatz*. Ao comparar a Eq. (2.3.19) com a Eq. (2.2.16), é possível observar que ambas são escritas na forma de uma combinação linear. As funções da base do subespaço da aproximação $\{b_k(t)\}_{k=1}^B$ e os coeficientes $\{\beta_k\}_{k=1}^B$ na Eq. (2.2.16) foram substituídas pelas funções de Fourier $\{e^{ik\Omega t}\}_{k=-H}^H$ e pelos coeficientes de Fourier $\{\tilde{\mathbf{q}}_k\}_{k=-H}^H$, respectivamente. O total de termos na combinação linear na Eq. (2.3.19) é $B = 2H + 1$. Uma das principais vantagens de se utilizar a base de Fourier para definir o subespaço da aproximação é o fato das funções serem periódicas, fazendo com que a aproximação satisfaça automaticamente as restrições de periodicidade do problema de valor de contorno periódico. O objetivo do MBH passa a ser então definir os coeficientes de Fourier $\{\tilde{\mathbf{q}}_k\}_{k=-H}^H$ de forma que \mathbf{q}_H se aproxime da solução periódica a medida que a ordem de truncamento H aumente.

Ao substituir o *Ansatz* e as respectivas derivadas temporais na equação diferencial da Eq. (2.2.15), uma função resíduo semelhante a Eq. (2.2.17) é encontrada e pode ser definida como sendo

$$\mathbf{r}_H(t, \Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\}) = \sum_{j=-H}^H \overbrace{\left[-(j\Omega)^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \right]}^{\mathbf{S}_j(\Omega)} \tilde{\mathbf{q}}_j e^{ij\Omega t} + \mathbf{f}_{nl}(t, \Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\}). \quad (2.3.20)$$

Na Eq. (2.3.20), a matrix $\mathbf{S}_j(\Omega)$ corresponde a uma matrix de rigidez dinâmica de um sistema linear conservativo associado avaliada na j -ésima frequência harmônica ($j\Omega$). Como o vetor de forças não-lineares depende apenas do *Ansatz* explicitamente, ele também pode ser considerado aqui como sendo periódico e escrito em uma série de Fourier, permitindo que o resíduo seja reescrito como

$$\mathbf{r}_H(t, \Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{r}}_j(\Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\}) e^{ij\Omega t} \quad (2.3.21)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{r}}_j(\Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\}) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{f}}_{nl,j}(\Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\}) & \text{para } |j| > H \\ \mathbf{S}_j(\Omega)\tilde{\mathbf{q}}_j + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,j}(\Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\}) & \text{para } |j| \leq H \end{cases} \quad (2.3.22)$$

O vetor $\tilde{\mathbf{r}}_j$ representa o j -ésimo coeficiente de Fourier do resíduo, enquanto $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,j}(\Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\})$ representa o j -ésimo coeficiente de Fourier do termo não-linear. Uma importante observação deve ser feita em relação aos limites da somatória na Eq. (2.3.21). Apesar do *Ansatz* ser escrito como uma série de Fourier truncada na ordem H , o coeficiente de Fourier da força não-linear pode conter harmônicos maiores que H , os chamados superharmônicos. Por isso, o resíduo pode apresentar harmônicos maiores que H , fazendo com que os limites do somatório tenham que ser estendidos para $\pm\infty$. O termo

não-linear pode gerar também subharmônicos, isso é, coeficientes de Fourier relacionados a frequências que são divisões inteiras da frequência fundamental do *Ansatz*. No entanto, esse caso já é contabilizado pela Eq. (2.3.21) pelo fato da frequência fundamental do *Ansatz* não ser imposta e poder ter como valor qualquer divisão inteira da frequência fundamental da solução periódica.

De acordo com os métodos de resíduos ponderados, o *Ansatz* deve satisfazer a equação diferencial apenas na forma de uma média ponderada no intervalo $t \in [0, T]$. Para o caso do MBH, onde tanto a base do subespaço do *Ansatz* quanto as funções peso correspondem a funções de Fourier, a Eq. (2.2.18), que corresponde a formulação fraca do problema, pode ser reescrita como sendo

$$\int_0^T \mathbf{r}_H(t) e^{-im\Omega t} dt = \mathbf{0} \quad \text{for } m = -H, \dots, H \quad (2.3.23)$$

A integral na Eq. (2.3.23) corresponde a uma projeção do resíduo no subespaço gerado pela base de Fourier do *Ansatz*, o que elimina a dependência temporal do problema. Por isso, o MBH é muitas vezes chamado também de método de projeção Fourier-Galerkin. Considerando a ortogonalidade dos vetores da base de Fourier e considerando também a imposição do MBH de que o resíduo precisa ser ortogonal ao subespaço gerado pela base de Fourier do *Ansatz*, a Eq. (2.3.23) resulta em um sistema de equações algébricas não-lineares. Substituindo o resíduo definido pela Eq. (2.3.21) na Eq. (2.3.23), obtêm-se

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{r}}_j(\Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\}) e^{ij\Omega t} \right] e^{-im\Omega t} dt &= \mathbf{0} \\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{r}}_j(\Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\}) e^{i(j-m)\tau} d\tau &= \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{r}}_m(\Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\}) &= \mathbf{0} \quad \text{for } m = -H, \dots, H. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

A Eq. (2.3.24) corresponde a um conjunto de equações algébricas, chamadas aqui de equações do balanço harmônico. Elas mostram que o MBH impõe que os coeficiente de Fourier da função resíduo precisam ser zero até a ordem de truncamento H , o que implica que o *Ansatz* está balanceado em cada harmônico até H . Como a representação exponencial foi utilizada na série de Fourier que definiu o *Ansatz*, a Eq. (2.3.24) apresenta algumas redundâncias que podem ser eliminadas. Os coeficientes de Fourier da função resíduo têm a propriedade de espelhamento conjugado, o que implica em $\Re\{\tilde{\mathbf{r}}_m\} = \Re\{\tilde{\mathbf{r}}_{-m}\}$ e $\Im\{\tilde{\mathbf{r}}_m\} = -\Im\{\tilde{\mathbf{r}}_{-m}\}$. Por isso, é suficiente resolver a Eq. (2.3.24) somente para $m \geq 0$.

As equações do balanceamento harmônico a serem resolvidas formam um sistema de equações algébricas não-linear que pode ser escrito em uma forma

compacta como

$$\mathbf{R}_{HB}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_0(\mathbf{u}) \\ \Re\{\tilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{u})\} \\ \Im\{\tilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{u})\} \\ \vdots \\ \Re\{\tilde{\mathbf{r}}_H(\mathbf{u})\} \\ \Im\{\tilde{\mathbf{r}}_H(\mathbf{u})\} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.3.25)$$

onde $\mathbf{u} = [\tilde{\mathbf{q}}_{-H}, \dots, \tilde{\mathbf{q}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{q}}_H, \Omega]$ representa o vetor com as incógnitas a serem definidas. No total são $(2H + 1)n$ equações algébricas não-lineares a serem resolvidas em relação aos $(2H + 1)$ coeficientes de Fourier do *Ansatz*, $\tilde{\mathbf{q}}_k \in \mathbb{C}^n$, e em relação a frequência fundamental, $\Omega \in \mathbb{R}$, simultaneamente. Uma vez que os coeficientes $\tilde{\mathbf{q}}_{-k}$ e $\tilde{\mathbf{q}}_k$ possuem também a propriedade de espelhamento conjugado, apenas $(2H + 1)n$ parâmetros independentes precisam ser encontrados para definir todos os coeficientes de Fourier. Isso é, apenas as partes reais e imaginárias de $\tilde{\mathbf{q}}_k$ para $k \geq 0$ precisam ser definidas. Por isso, o vetor de incógnitas pode ser redefinido e reduzido para $\mathbf{u} = [\tilde{\mathbf{q}}_0, \Re\{\tilde{\mathbf{q}}_1\}, \Im\{\tilde{\mathbf{q}}_1\}, \dots, \Re\{\tilde{\mathbf{q}}_H\}, \Im\{\tilde{\mathbf{q}}_H\}, \Omega]$. Assim a redundância presente nos coeficientes de Fourier negativos são eliminados do problema.

Como foi discutido extensivamente no capítulo 1, o sistema definido na Eq. (2.3.25) possui infinitas soluções, já que nenhuma restrição sobre a amplitude ou fase do *Ansatz* foi imposta. Por isso, duas equações algébricas adicionais precisam ser incorporadas ao problema.

A primeira delas, uma restrição de amplitude, pode ser definida através da equação

$$\eta_a(\mathbf{u}, \epsilon) = \sum_{k=1}^H (\tilde{\mathbf{q}}_k^*)^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{q}}_k - \epsilon = 0 \quad (2.3.26)$$

onde ϵ é um coeficiente relacionado à energia que se deseja ter na aproximação da solução periódica. O sobrescrito \square^* representa o complexo conjugado do coeficiente de Fourier. A Eq. (2.3.26) corresponde a uma normalização de massa modal. Diferentemente do caso linear, onde apenas o coeficiente de Fourier da frequência fundamental é utilizada, a normalização definida na Eq. (2.3.26) utiliza coeficientes relacionados a harmônicos de ordem mais alta. Isso ocorre porque $\tilde{\mathbf{q}}_1$ pode ser reduzido a zero para alguns valores de ϵ (por exemplo em casos de interação modal, isso é, ressonância interna).

A segunda equação adicional necessária, que corresponde a uma restrição de amplitude, pode ser definida impondo a velocidade inicial de algum grau de liberdade do sistema. Matematicamente, isso pode ser feito através da seguinte equação

$$\eta_p(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^H k \mathbf{e}_i^T \Im\{\tilde{\mathbf{q}}_k\} = 0 \quad (2.3.27)$$

onde $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ corresponde a um vetor unitário com todas as entradas iguais a zero, exceto a i -ésima, cujo valor é 1. Na equação (2.3.27), i pode ter qualquer valor entre 1 e n .

Juntas, as equações de balanço harmônico, Eq. (2.3.25), a restrição de amplitude, Eq. (2.3.26), e a restrição de fase, Eq.(2.3.27), formam um sistema de equações algébricas capaz de fornecer uma aproximação para a solução do problema de valor de contorno periódico, Eq. (1.4.76). Esse sistema pode ser definido, de forma compacta, através da equação

$$\bar{\mathbf{R}}_{HB}(\mathbf{u}, \epsilon) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{HB}(\mathbf{u}) \\ \eta_a(\mathbf{u}, \epsilon) \\ \eta_p(\mathbf{u}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.3.28)$$

2.4 Solução das equações do MBH

Soluções analíticas para o problema definido na Eq. (2.3.28) são limitadas a sistemas de pequena dimensões (poucos graus de liberdade) e com não-linearidades simples. Exemplos desses sistemas são o oscilador de Duffing discutido em diversos livros de dinâmica não-linear [44] e o sistema massa-mola discutido no Exemplo 1.6. Para a maioria dos outros sistemas, somente aproximações numéricas são possíveis. Nesta seção será suposto que o parâmetro de energia ϵ presente na restrição de amplitude é uma constante conhecida. Assim, é preciso levar em conta que o número de equação no sistema da Eq. (2.3.28), $(2H + 1)n + 2$, é maior que o número de incógnitas do problema, $(2H + 1)n + 1$.

O método de Newton-Raphson é o método numérico mais popular para resolver o problema algébrico da Eq. (2.3.28) e por isso será o adotado a seguir. Ele corresponde a um método local que atualiza recursivamente uma determinada proposta inicial para a solução até que ela convirja para a mesma (dentro de uma certa tolerância de erro). O método de Newton-Raphson é um método de aproximações de rápida convergência caso uma boa proposta inicial da solução seja fornecida. Caso contrário, a convergência não é garantida. Por isso, fornecer uma boa proposta inicial para a solução do problema é fundamental para se obter a aproximação periódica desejada. Em geral, os modos normais lineares (MNL) e a frequência natural do sistema linear associado são um bom ponto de partida para definir a proposta inicial dos MNN. Caso a energia de interesse do MNN seja muito alta a ponto da solução periódica se distanciar significativamente do MNL, um possível procedimento consiste em buscar diversas soluções periódicas, cada uma tendo um incremento no nível de energia quando comparada a anterior, partindo de uma solução de baixa energia até uma solução de alta energia. Esse procedimento pode ser eficientemente implementado através de do processo de continuação numérica, tema que será discutido em detalhes no capítulo 4.

O método de Newton-Raphson corrige uma proposta inicial para a solução expandindo \mathbf{R}_{HB} em uma série de Taylor ao redor da solução $(\mathbf{u}^{(0)} + \Delta\mathbf{u}^{(0)})$, onde $\mathbf{u}^{(0)}$ é a proposta inicial para a solução e $\Delta\mathbf{u}^{(i)}$ é a correção necessária.

Essa expansão em série de Taylor corresponde a

$$\bar{\mathbf{R}}_{HB} \left(\mathbf{u}^{(0)} + \Delta \mathbf{u}^{(0)} \right) = \bar{\mathbf{R}}_{HB} \left(\mathbf{u}^{(0)} \right) + \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_{HB}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^{(0)}} \Delta \mathbf{u}^{(0)} + \zeta \left(\mathbf{u}^{(0)}, \Delta \mathbf{u}^{(0)} \right) = \mathbf{0},$$

onde $\zeta \left(\mathbf{u}^{(0)}, \Delta \mathbf{u}^{(0)} \right)$ corresponde aos termos de ordem elevada. Supondo que a proposta inicial seja perto o suficiente da solução, a correção $\Delta \mathbf{u}^{(0)}$ se torna pequena e os termos de ordem elevada pode ser descartados. Como resultado, uma estimativa para a correção $\Delta \mathbf{u}^{(0)}$ pode ser definida como a solução de um sistema algébrico linear

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}^{(0)} \approx - \left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_{HB}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^{(0)}} \right)^\dagger \bar{\mathbf{R}}_{HB} \left(\mathbf{u}^{(0)} \right), \quad (2.4.29)$$

onde a matriz $\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_{HB}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^{(0)}}$ reúne todas as derivadas parciais de $\bar{\mathbf{R}}_{HB}$ em relação a \mathbf{u} . Essas derivações parciais podem ser computadas analiticamente ou numericamente a partir de um método de diferenças finitas. Soluções analíticas resultam em melhorias significativas no custo computacionais e na precisão numérica e por isso devem ser priorizadas. A matriz $\left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_{HB}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^{(0)}} \right)^\dagger$ corresponde a pseudo inversa da matriz com as derivadas parciais avaliada em $\mathbf{u}^{(0)}$. A matriz pseudo inversa foi necessária para estimar $\Delta \mathbf{u}^{(0)}$ porque $\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_{HB}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^{(0)}}$ corresponde a uma matriz retangular com dimensão $[(2H+1)n+2] \times [(2H+1)n+1]$. A Eq. (2.4.29) corresponde a uma aproximação porque os termos de ordens elevadas $\zeta \left(\mathbf{u}^{(0)}, \Delta \mathbf{u}^{(0)} \right)$ que foram negligenciados possuem um valor não nulo quando $\bar{\mathbf{R}}_{HB}$ é não-linear.

Como apenas uma estimativa do termo de correção é fornecido pela Eq. (2.4.29), dificilmente a soma $\mathbf{u}^{(0)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(0)}$ resultará na aproximação \mathbf{u} (dentro da margem e erro estipulada). Por isso, um esquema recursivo deve ser implementado. A cada nova iteração, a nova proposta para a solução $\mathbf{u}^{(i+1)}$ pode ser definida através de

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)}.$$

A convergência é atendida quando $\left\| \bar{\mathbf{R}}_{HB} \left(\mathbf{u}^{(i+1)} \right) \right\| < \varepsilon$, onde ε é a tolerância de erro definida. Neste momento o processo iterativo é finalizado e a aproximação considerada para o problema passa a ser $\mathbf{u}^{(i+1)}$. É importante definir um número limite para a quantidade de iterações, uma vez que a proposta inicial pode ser dada em uma região onde a convergência do método de Newton-Raphson não ocorre.

Exemplo 2.2. *O objetivo deste exemplo é ilustrar o procedimento de cálculo necessário para obter uma aproximações da solução de um problema de valor de contorno periódico utilizando o MBH. O sistema analisado corresponde ao*

mesmo sistema massa-mola não-linear de dois graus de liberdade discutido no Exemplo 1.6, cuja dinâmica foi modelada através da equação diferencial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5q_1^3(t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{nl}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}. \quad (2.4.30)$$

O ponto de partida para obter a aproximação de uma solução periódica deste sistema corresponde em definir a ordem de truncamento do Ansatz. Para manter o exemplo o mais simples possível, utiliza-se aqui uma ordem de truncamento $H = 1$. Através da definição do Ansatz dada pela Eq. (2.3.19), e utilizando a propriedade de espelhamento conjugado dos coeficientes de Fourier, o Ansatz pode ser escrito como sendo

$$\mathbf{q}_H(t, \Omega, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1) = \mathbf{q}_1^* e^{-i\Omega t} + \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 e^{i\Omega t}.$$

Para obter a aproximação da solução periódica, a frequência fundamental Ω e os coeficientes de Fourier $\tilde{\mathbf{q}}_0$ e $\tilde{\mathbf{q}}_1$ precisam ser definidos. Isso é feito através da solução do sistema algébrico definido na Eq. (2.3.28), composto pelas equações de balanço harmônico, pela restrição de amplitude e pela restrição de fase. Isso é, o seguinte problema algébrico precisa ser resolvido

$$\bar{\mathbf{R}}_{HB}(\mathbf{u}, \epsilon) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_0(\mathbf{u}) \\ \Re\{\tilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{u})\} \\ \Im\{\tilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{u})\} \\ \eta_a(\mathbf{u}, \epsilon) \\ \eta_p(\mathbf{u}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.4.31)$$

onde $\tilde{\mathbf{r}}_0$ e $\tilde{\mathbf{r}}_1$ são os coeficientes de Fourier da função resíduo, definidos a partir da Eq. (2.3.22), e $\mathbf{u} = [\tilde{\mathbf{q}}_0^T, \Re\{\tilde{\mathbf{q}}_1^T\}, \Im\{\tilde{\mathbf{q}}_1^T\}, \Omega]^T$ corresponde ao vetor de incógnitas do problema. Para este exemplo será usado arbitrariamente um valor fixo e igual a 10 para o parâmetro de energia ϵ .

O problema definido pela Eq. (2.4.31) é resolvido a seguir numericamente. O método de Newton-Raphson é utilizado para isso. Dessa forma, é necessário que seja fornecido uma boa proposta inicial para as incógnitas do problema. Essa proposta pode ser composta pelos modos normais lineares (MNL) e pela frequências naturais do sistema linear associado. Através do Exemplo 1.3, mostrou-se que a primeira frequência natural desse sistema linear associado corresponde a 1 rad/s e que para o primeiro MNL as duas massas do sistema se deslocam com mesma amplitude e fase. Assim, pode-se

definir uma boa aproximação inicial para \mathbf{u} como sendo

$$\mathbf{u}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathfrak{R} \left\{ \tilde{\mathbf{q}}_0^{(0)} \right\} \\ \mathfrak{I} \left\{ \tilde{\mathbf{q}}_1^{(0)} \right\} \\ \Omega^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{20}}{2} \\ \frac{\sqrt{20}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nota-se que essa proposta inicial supõe que a aproximação periódica para cada grau de liberdade corresponde a uma função cosseno, com amplitude $\frac{\sqrt{20}}{2}$, mesma fase (0 rad) e frequência de oscilação igual a 1 rad/s. A amplitude de $\frac{\sqrt{20}}{2}$ foi escolhida para que $(\tilde{\mathbf{q}}_1^*)^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{q}}_1 = \epsilon = 10$, satisfazendo assim a restrição de amplitude do problema com esta proposta inicial. Como a parte imaginária de todos os coeficiente de Fourier são zero nesta proposta inicial, a restrição de fase do problema também é satisfeita.

Uma vez definida a proposta inicial para \mathbf{u} , avalia-se então se ela satisfaz o problema, isso é, se ela é solução (dentro de uma tolerância de erro) da Eq. (2.4.31). Para isso, é necessário avaliar $\tilde{\mathbf{r}}_0(\mathbf{u}^{(0)})$ e $\tilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{u}^{(0)})$. De acordo com a Eq. (2.3.22),

$$\tilde{\mathbf{r}}_0(\mathbf{u}) = \mathbf{S}_0(\Omega) \tilde{\mathbf{q}}_0 + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,0}(\Omega, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1) \quad (2.4.32)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{u}) = \mathbf{S}_1(\Omega) \tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,1}(\Omega, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1) \quad (2.4.33)$$

Os termos $\mathbf{S}_0(\Omega) \tilde{\mathbf{q}}_0$ e $\mathbf{S}_1(\Omega) \tilde{\mathbf{q}}_1$ na equação acima são simples de serem calculados e dependem apenas da parte linear do sistema e de \mathbf{u} . A real dificuldade consistem em avaliar os coeficientes de Fourier da força não linear $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,0}(\Omega, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1)$ e $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,1}(\Omega, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1)$. Como a dimensão do sistema neste exemplo é pequena ($n = 2$), a não linearidade é simples (função cúbica) e a ordem de truncamento do Ansatz é pequena ($H = 1$), esses coeficientes serão calculados aqui analiticamente. Caso a complexidade fosse maior, um procedimento numérico seria necessário para calcular esses coeficientes, o que será o tema da próxima seção.

Considerando o modelo do sistema definido na Eq. (2.4.30) e o Ansatz para a solução periódica, a força não-linear do sistema é escrita, no domínio do tempo, como sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{nl}(t, \Omega, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1) &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_H^3(t, \Omega, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1) \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 \left(\tilde{q}_{1,1}^* e^{-i\Omega t} + \tilde{q}_{0,1} + \tilde{q}_{1,1} e^{i\Omega t} \right)^3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{nl}(t, \Omega, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{q}_{0,1}$ e $\tilde{q}_{1,1}$ correspondem as primeiras entradas dos vetores dos coeficientes de Fourier $\tilde{\mathbf{q}}_0$ e $\tilde{\mathbf{q}}_1$, respectivamente. Expandindo o termo ao cubo de f_{nl} e coletando os termos de mesma potência, essa força não-linear pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 f_{nl}(t, \Omega, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1) = 0.5 \left\{ \left(\tilde{q}_{1,1}^* \right)^3 e^{-3i\Omega t} + 3 \left(\tilde{q}_{1,1}^* \right)^2 \tilde{q}_{0,1} e^{-2i\Omega t} + \right. \\
 + 3 \left[\tilde{q}_{1,1}^* \tilde{q}_{0,1}^2 + \left(\tilde{q}_{1,1}^* \right)^2 \tilde{q}_{1,1} \right] e^{-i\Omega t} + \\
 + \left(\tilde{q}_{0,1}^3 + 6\tilde{q}_{1,1}^* \tilde{q}_{0,1} \tilde{q}_{1,1} \right) + \\
 + 3 \left(\tilde{q}_{0,1}^2 \tilde{q}_{1,1} + \tilde{q}_{1,1}^* \tilde{q}_{1,1}^2 \right) e^{i\Omega t} + \\
 \left. + 3\tilde{q}_{0,1} \tilde{q}_{1,1}^2 e^{2i\Omega t} + \tilde{q}_{1,1}^3 e^{3i\Omega t} \right\}. \quad (2.4.34)
 \end{aligned}$$

A partir desta equação, os coeficientes de Fourier da força não-linear aparecem explícitos. Nota-se que apesar do Ansatz ter sua ordem de truncamento $H = 1$, a força não-linear tem coeficiente não-zero até o terceiro harmônico. Os coeficientes $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,0}$ e $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,1}$ necessários na Eq. (2.4.33) podem ser então definidos a partir da Eq. (2.4.34) como sendo

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{f}}_{nl,0}(\Omega, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1) &= \begin{bmatrix} 0.5 \left(\tilde{q}_{0,1}^3 + 6\tilde{q}_{1,1}^* \tilde{q}_{0,1} \tilde{q}_{1,1} \right) \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \tilde{\mathbf{f}}_{nl,1}(\Omega, \tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1) &= \begin{bmatrix} 1.5 \left(\tilde{q}_{0,1}^2 \tilde{q}_{1,1} + \tilde{q}_{1,1}^* \tilde{q}_{1,1}^2 \right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4.35)
 \end{aligned}$$

Substituindo a Eq. (2.4.35) na Eq. (2.4.33) e utilizando a definição de $\mathbf{S}_j(\Omega)$ apresentada na Eq. (2.3.20), os coeficientes de Fourier da função resíduo para a proposta inicial podem ser calculados, resultando em

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{r}}_0(\mathbf{u}^{(0)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \tilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{u}^{(0)}) &= \begin{bmatrix} -16.77 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Já as restrições de amplitude e fase para a aproximação periódica considerando a proposta inicial pode ser avaliado a partir das Eqs. (2.3.26) e (2.3.27), respectivamente. Como dito anteriormente, ambas as restrições são satisfeitas para essa proposta inicial, resultando em $\eta_a(\mathbf{u}^{(0)}, 10) = 0$ e

$\eta_p(\mathbf{u}^{(0)}) = 0$. Assim, o vetor resíduo para esta proposta inicial se torna

$$\bar{\mathbf{R}}_{HB}(\mathbf{u}^{(0)}, 10) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_0(\mathbf{u}^{(0)}) \\ \Re\{\tilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{u}^{(0)})\} \\ \Im\{\tilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{u}^{(0)})\} \\ \eta_\alpha(\mathbf{u}^{(0)}, 10) \\ \eta_p(\mathbf{u}^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -16.77 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4.36)$$

Como fica evidente a partir da Eq. (2.4.36), $\mathbf{u}^{(0)}$ não corresponde a uma boa aproximação periódica, uma vez que $|\bar{\mathbf{R}}_{HB}(\mathbf{u}^{(0)}, 10)| > \varepsilon$ (onde $\varepsilon = 10^{-7}$ para este exemplo). Por isso, é necessário realizar uma correção nesta proposta inicial. O valor desta correção é obtido pela Eq. (2.4.29), que por sua vez necessita da pseudo inversa de $\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_{HB}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^{(0)}}$. Esta matriz contendo as derivadas parciais de $\bar{\mathbf{R}}_{HB}$ pode ser calculada analiticamente através de derivadas de funções complexas por variáveis complexas, o que dificulta bastante o processo. Uma abordagem mais eficiente para o cálculo desta matriz será discutida na próxima seção através o método de Alternância Frequência-Tempo (AFT). Para manter esse exemplo mais curto, decidiu-se realizar o cálculo de $\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_{HB}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^{(0)}}$ utilizando um método de diferenças finitas. Logo, é suposto que $\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_{HB}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^{(0)}}$ seja conhecido e a correção da proposta inicial pode ser feita pela Eq. (2.4.29).

A Tabela 2.2 traz os valores de \mathbf{u} e $|\bar{\mathbf{R}}_{HB}|$ durante o processo recursivo de correção da proposta inicial até que o vetor de resíduo tivesse sua norma menor que a tolerância definida. A Figura 2.4 traz graficamente as aproximações periódicas encontradas durante as duas primeiras iterações, ilustrando assim o processo de convergência do resultado. Os gráficos na coluna da esquerda mostram a evolução de $q_1(t)$, enquanto a coluna da direita mostra a evolução de $q_2(t)$. A partir dos gráficos e da tabela, pode-se perceber que a aproximação periódica encontrada possui uma frequência fundamental (1.264 rad/s, último elemento de $\mathbf{u}^{(6)}$) que é maior que a respectiva frequência natural do sistema linear associado (1 rad/s). Isso significa que o este sistema sofreu um processo de enrijecimento para este modo, isto é, um aumento da frequência fundamental da oscilação com o aumento da energia da solução. Além disso, percebe-se também que o deslocamento do segundo grau de liberdade passou a ser maior que o deslocamento do primeiro grau de liberdade. Além disso, durante todo o processo de convergência, a fase da aproximação permaneceu igual a zero para os dois graus de liberdade. Esses comentários a respeito da solução estão de acordo com os resultados encontrados e discutidos o capítulo 1. A Figura 2.5 mostra a convergência do MBH através do decaimento da norma do vetor resíduo em escala logarítmica ao longo das iterações do método de Newton-Raphson.

j	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{u}^{(j)}$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	2.2361	1.6032	1.2705	1.1853	1.1793	1.1793
	2.2361	28689	2.9153	2.9330	2.9341	2.9342
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
$ \mathbf{R}_{HB} $	16.770	4.005	0.723	0.0438	2.01e-4	4.28e-9

Tabela 2.2: Tabela com a convergência da aproximação periódica utilizando o MBH.

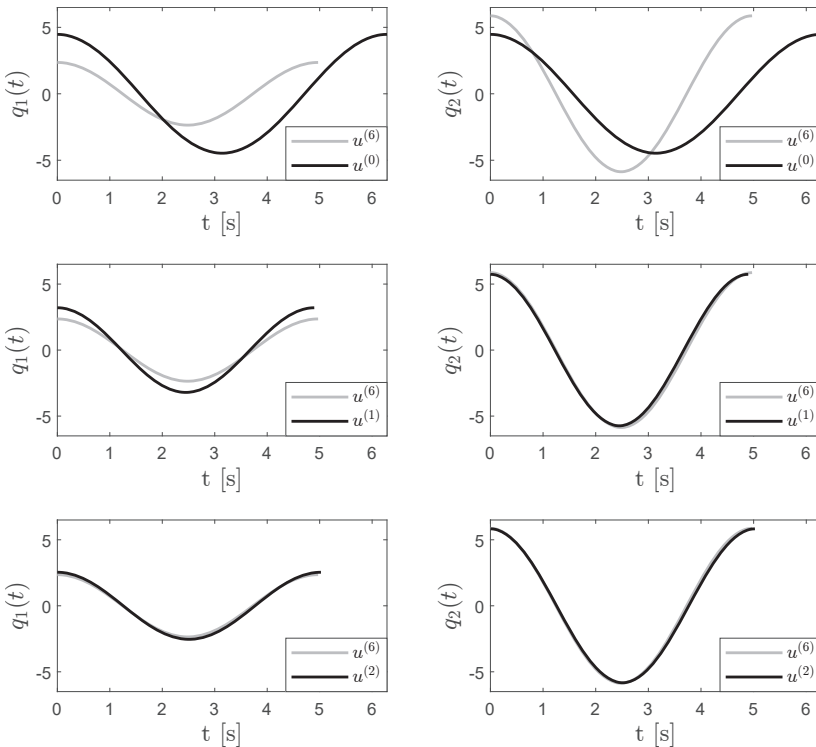


Figura 2.4: Convergência das aproximações periódicas durante as duas primeiras iterações do método de Newton-Raphon. A curva em cinza representa a aproximação final após a convergência do método (6ª iteração)

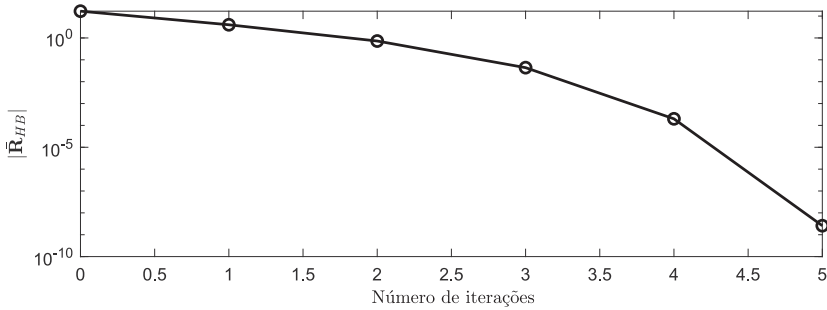


Figura 2.5: Norma do vetor resíduo em função do número de iterações.

Exemplo 2.3. No Exemplo 2.2, obteve-se a aproximação de uma solução periódica relacionada ao primeiro MNN do sistema. Essa solução pertence ao primeiro MNN porque consiste de uma extensão do primeiro MNL, onde os dois graus de liberdade se deslocam em fase. No entanto, essa não é a única solução periódica do sistema para esse determinado nível de energia ($\epsilon = 10$), uma vez que é garantido pelo teorema central de Lyapunov a existência de pelo menos mais uma famílias de soluções periódicas ao redor de um ponto de equilíbrio do sistema (o segundo MNN). Este exemplo ilustra como definir para qual solução periódica o MBH deve convergir.

Como o método de Newton-Raphson utilizado na busca da aproximação periódica é um método local, a proposta inicial de solução influencia o ponto para o qual o método vai convergir. Neste caso, a proposta inicial define se o método converge para primeiro MNN, para o segundo MNN, para alguma interação modal ou pra nenhuma solução (sem convergência). No Exemplo 2.2, utilizou-se o primeiro MNL do sistema linear associado como proposta inicial da solução do problema, o que acabou gerando uma correção do método de Newton-Raphson na direção do primeiro MNN. Assim, é natural assumir que, com apenas a mudança na proposta inicial contendo o segundo MNL e a segunda frequência natural do sistema linear associado, uma solução relacionada ao segundo MNN seja encontrada. Embora essa ação seja de fato necessária, ela pode não ser suficiente, como é o caso deste exemplo.

Para o nível de energia definido nesse exemplo, $\epsilon = 10$, a solução periódica associada ao segundo MNN sofre uma mudança significativa quando comparado ao segundo MNL, especialmente em relação a frequência fundamental de oscilação. Assim, o segundo MNL é considerado distante da solução periódica buscada, fazendo com que o método de Newton-Raphson não obtenha a convergência desejada. Uma simples solução para este problema consiste em realizar uma continuação sequencial das aproximações periódicas. Procedimentos de continuação numérica mais sofisticados para o cálculo robusto dos MNNs serão discutidos no capítulo 4. Neste exemplo, a continuação sequencial começa buscando uma solução periódica para uma nível de energia mais baixo, por exemplo para $\epsilon = 1$, cuja solução se aproxime mais

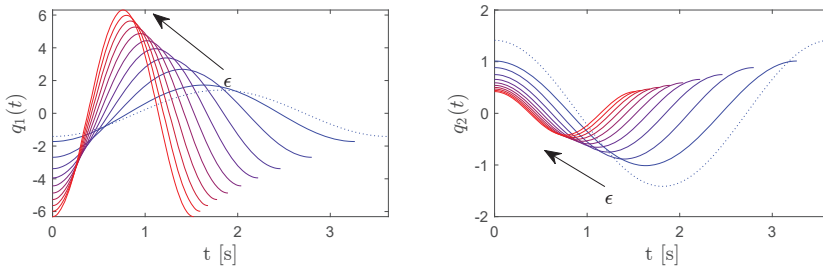


Figura 2.6: Aproximações periódicas encontradas durante o processo de continuação numérica sequencial.

do regime linear. Dessa forma, existe uma chance maior que o segundo MNL e a segunda frequência natural do sistema linear associado serem uma boa proposta inicial para a solução do problema. Uma vez que a solução tenha convergindo para $\epsilon = 1$, pode-se utilizar esse resultado para buscar uma solução para $\epsilon = 2$. Repetindo esse processo de forma incremental até que $\epsilon = 10$ permite que a aproximação periódica de interesse seja obtida.

A Figura 2.6 ilustra as aproximações periódicas encontradas durante o processo de continuação numérica sequencial. Foi obtido um total de 10 aproximações, uma para cada nível de energia ϵ , como mostrado na Tabela 2.3. As curvas em azul representam as aproximações relacionadas a baixos níveis de energia, enquanto as curvas em vermelho representam as aproximações para níveis altos de energia. Em pontilhada mostra-se também o segundo MNL utilizado como proposta inicial para a primeira aproximação com $\epsilon = 1$. Nota-se que essa proposta inicial não é distante da primeira aproximação ($\epsilon = 1$), mas é muito distante da aproximação desejada ($\epsilon = 10$) em vermelho. Essa é o principal motivo no qual a continuação numérica foi necessária ao invés de se buscar a solução desejada diretamente.

Para este segundo MNN, a aproximação periódica sofre uma grande redução no seu período de oscilação a medida que a energia é aumentada. Isso significa que o segundo MNN também sofre um processo de enrijecimento. Além disso, o deslocamento do primeiro grau de liberdade, $q_1(t)$, sofre um grande aumento de amplitude, enquanto o deslocamento do segundo grau de liberdade, $q_2(t)$, sofre uma redução significativa, caracterizando uma tendência de localização da solução, como discutido no capítulo 1.

2.5 Método da Alternância Frequência-Tempo

O método de Newton-Raphson é geralmente utilizado para obter a solução das equações de balanço harmônico definidas pela Eq. (2.3.25). Durante o processo recursivo de correção da proposta inicial $\mathbf{u}^{(0)}$, o vetor R_{HB} e a matriz $\frac{\partial R_{HB}}{\partial \mathbf{u}}$ precisam ser avaliadas a cada nova iteração, como mostrado

ϵ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
\mathbf{u}	-0.86	-1.34	-1.69	-1.97	-2.22	-2.43	-2.63	-2.82	-2.99	-3.16
	0.50	0.44	0.37	0.33	0.30	0.27	0.25	0.23	0.22	0.21
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1.92	2.24	2.55	2.83	3.08	3.32	3.54	3.74	3.94	4.12
N_{iter}	6	6	5	5	5	4	4	4	4	

Tabela 2.3: Tabela com as aproximações periódicas encontradas para um crescente nível energético.

pela Eq. (2.4.29). Assim, o cálculo dos coeficientes de Fourier da função resíduo e da suas respectivas derivadas parciais consiste em uma grande parcela do custo computacional total do MBH. Por isso, discute-se a seguir um método eficiente e simples de realizar esses cálculos.

Os coeficientes de Fourier da função resíduo foram definidas na Eq. (2.3.22), e estão repetidos abaixo por conveniência

$$\tilde{\mathbf{r}}_j = \mathbf{S}_j(\Omega)\tilde{\mathbf{q}}_j + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,j}(\Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\}) \quad \text{para } j = 0, \dots, H. \quad (2.5.37)$$

Cada coeficiente de Fourier $\tilde{\mathbf{r}}_j$ corresponde a uma soma de dois termos: o coeficiente de Fourier das forças lineares, definido pelo produto $\mathbf{S}_j(\Omega)\tilde{\mathbf{q}}_j$, e os coeficientes de Fourier das forças não-lineares, definidos como $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,j}(\Omega, \{\tilde{\mathbf{q}}_k\})$. Ao igualar a zero, a Eq. (2.5.37) pode ser interpretada como o equilíbrio das forças dinâmicas no domínio da frequência, avaliada na j -ésima frequência harmônica. O cálculo de $\mathbf{S}_j(\Omega)$ não apresenta dificuldades uma vez que essa matriz depende apenas das matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} , logo não existe grande dificuldade em avaliar as forças lineares do sistema. Esses termos lineares da Eq. (2.5.37) são harmonicamente desacoplado, isto é, apenas o j -ésimo coeficiente de Fourier do *Ansatz* contribui no j -ésimo coeficiente de Fourier da função resíduo. Em geral, a dificuldade de avalia cada $\tilde{\mathbf{r}}_j$ se restringe ao cálculo dos termos não-lineares. Dependendo do tipo de não-linearidade, os coeficientes de Fourier $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,j}$ não podem ser calculados analiticamente, ou o processo se torna muito trabalhoso com o aumento da ordem de truncamento H do *Ansatz*. Para contornar essa dificuldade, um método chamado de Alternância Frequência-Tempo (AFT)[10, 14, 21, 42, 35] é utilizado para calcular os coeficientes $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,j}^{(e)}(\Omega)$ numericamente. Essa técnica é eficiente computacionalmente, especialmente quando utilizado em conjunto com o algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT). O método pode ser resumido nos seguintes três passos:

1. Dado uma determinada proposta para a solução das equações de balanço harmônico, $\mathbf{u}^{(i)}$, os coeficientes de Fourier $\tilde{\mathbf{q}}_k$ e a frequência fundamental Ω podem ser extraídos da proposta e utilizados para avaliar $\mathbf{q}_H(t)$, o *Ansatz* escrito no domínio do tempo. Essa mudança do domínio da frequência para o domínio do tempo pode ser feito teoricamente

utilizando a Eq. (2.3.19), ou preferencialmente utilizando a transformada rápida de Fourier inversa (iFFT), que é mais eficiente computacionalmente. Ao adotar a iFFT, o número de amostras utilizada para discretizar $\mathbf{q}_H(t)$ ao longo de um período corresponde ao mesmo número de coeficientes de Fourier utilizados para caracterizar o *Ansatz* no domínio da frequência, isto é, $2H+1$. Esse número de amostra pode ser pequeno para a maioria dos casos e por isso um processo de preenchimento de zeros (*zero-padding*) é geralmente adotado antes da iFFT para aumentar o número de coeficientes de Fourier e assim melhorar a resolução do *Ansatz* no domínio do tempo (obter uma frequência maior de amostragem). No método de AFT, o processo de preenchimento de zeros corresponde em adicionar coeficientes de Fourier iguais a zero para os harmônicos maiores que H . Como os coeficientes de Fourier adicionais são todos iguais a zero, a forma do *Ansatz* não é alterada, mas sua resolução no domínio do tempo é melhorada. Supondo que $N \geq (2H + 1)$ coeficientes de Fourier são utilizados na iFFT (alguns deles iguais a zero por conta do processo de preenchimento de zeros), o sinal discreto $\mathbf{q}_{H,j} = \mathbf{q}_H(jh)$ para $j = 0, \dots, N$ pode ser gerado, onde $h = \frac{2\pi}{N\Omega}$ corresponde ao intervalo de amostragem.

2. A partir das amostras do *Ansatz*, o sinal discreto das forças não-lineares, $\mathbf{f}_{nl,j} = \mathbf{f}_{nl}(jh)$, pode ser calculado no domínio do tempo seguindo o modelo da não-linearidade do sistema definido pela equação de movimento. Como mostrado na Eq. (2.2.15), essa força não-linear depende apenas dos deslocamentos dos graus de liberdade, que foram obtidos no passo anterior.
3. O último passo no método AFT consiste em transformar o sinal discreto das forças não-lineares $\mathbf{f}_{nl,j}$ (domínio do tempo) nos coeficientes de Fourier $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,j}^{(e)}$ (no domínio da frequência). Essa transformação é feita de forma eficiente utilizando a transformada rápida de Fourier (FFT). Repare que nesta etapa são obtidos N coeficientes de Fourier, sendo alguns deles relativos a ordens de truncamento acima de H . Esses coeficientes adicionais surgem devido ao processo de preenchimento de zeros descrito no primeiro passo. No entanto, apenas os coeficientes relacionados até o H -ésimo harmônico devem ser considerados nas equações de balanço harmônico, o resto deve ser descartado.

Matematicamente, esses três passos do método AFT podem ser escritos através de uma única equação

$$\left\{ \tilde{\mathbf{f}}_{nl,j} \right\} = \text{FFT} [\mathbf{f}_{nl} (\text{iFFT} [\{\tilde{\mathbf{q}}_j\})]]. \quad (2.5.38)$$

O exemplo a seguir ilustra esse processo de cálculo dos coeficientes de Fourier das forças não-lineares utilizando o método AFT.

Exemplo 2.4. Para manter a simplicidade deste exemplo, será utilizado um sistema não-linear de apenas um grau de liberdade, cuja equação de movimento é definida por

$$\ddot{q}(t) + q(t) + q^3(t) = 0.$$

Assim, esse sistema pode ser visto como um oscilador de Duffing conservativo e sem forçamento externo. Para este sistema, a força não linear é definida como sendo $f_{nl} = q^3(t)$, isso é, uma mola cúbica. O objetivo deste exemplo é calcular os coeficientes de Fourier desta força utilizando o método AFT. Uma comparação com os valores dos coeficientes obtidos analiticamente será feita para validar os resultados.

Neste exemplo, a ordem de truncamento adotada para o Ansatz foi escolhida como sendo $H = 3$. Logo, o Ansatz pode ser escrito como

$$q_H(t) = \sum_{j=-3}^3 \tilde{q}_j e^{ij\Omega t}.$$

Assim, o vetor de incógnitas do problema composto pelas equações de balanço harmônico, Eq. (2.3.25), é dado por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_0 \\ \Re \left\{ \tilde{q}_1^{(e)} \right\} \\ \Im \left\{ \tilde{q}_1^{(e)} \right\} \\ \Re \left\{ \tilde{q}_2^{(e)} \right\} \\ \Im \left\{ \tilde{q}_2^{(e)} \right\} \\ \Re \left\{ \tilde{q}_3^{(e)} \right\} \\ \Im \left\{ \tilde{q}_3^{(e)} \right\} \\ \Omega \end{bmatrix}.$$

O método AFT busca calcular os coeficientes de Fourier da força não-linear do sistema, $\hat{\mathbf{f}}_{nl,j}$, a partir de uma determinada proposta para as incógnitas do problema, \mathbf{u} , seja ela a proposta inicial ou de alguma iteração de correção. Considera-se nesse exemplo que a atual proposta (i -ésimo) para \mathbf{u} consista em

$$\mathbf{u}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A partir desta proposta, os coeficientes de Fourier do Ansatz podem ser calculados. Assume-se então que o Ansatz tenha a seguinte forma

$$q_H(t) = \frac{1}{2}e^{-i3t} + 0e^{-i2t} + \frac{1}{2}e^{-it} + 0 + \frac{1}{2}e^{it} + 0e^{i2t} + \frac{1}{2}e^{i3t}, \quad (2.5.39)$$

que na realidade corresponde a simples função

$$q_H(t) = \cos(t) + \cos(3t).$$

O primeiro passo do método de AFT consiste em gerar amostras no domínio do tempo do Ansatz utilizando a *iFFT*, os coeficiente de Fourier e a frequência fundamental do Ansatz fornecidas pela proposta de solução $\mathbf{u}^{(i)}$. A Figura 2.7 mostra essa transformação considerando dois casos: uma em que apenas os $2H + 1$ coeficientes de Fourier fornecidos pela proposta $\mathbf{u}^{(i)}$ são utilizado (Figura 2.7a), isso é, $N = 7$, e o caso onde o preenchimento de zeros é utilizado para aumentar esse número de coeficiente para $N = 32$ (Figura 2.7b). Percebe-se que os coeficiente de Fourier adicionais ($|j| > 3$) são todos iguais a zero e por isso não afetam a forma do Ansatz. No entanto, com esse aumento no número de coeficientes a resolução do Ansatz no domínio do tempo melhora consideravelmente. Pode-se interpretar o preenchimento de zeros como um aumento na frequência de amostragem do Ansatz no domínio do tempo após a *iFFT*. Como será visto mais adiante, esse aumento na taxa de amostragem do Ansatz pode ser importante para evitar uma distorção por mascaramento nos coeficiente de Fourier das forças não-lineares. As Figura 2.7c-d mostram as respectivas amostras do Ansatz no domínio do tempo após as *iFFTs*.

O segundo passo do método de AFT consiste em avaliar as amostras no domínio do tempo das forças não-lineares. Para isso, basta que as amostras do Ansatz no domínio do tempo, obtidas no primeiro passo do método, sejam elevadas ao cubo, uma vez que a não-linearidade deste exemplo corresponde a uma mola cúbica. Essas amostras das forças não lineares podem ser vistas na Figura 2.7e para o caso sem preenchimento de zeros e na Figura 2.7f para o caso com preenchimento de zeros. Nota-se que a baixa resolução do caso sem o preenchimento de zeros causa a perda significativa de informações sobre o sinal, como por exemplo os valores negativos da força no meio do período da oscilação.

Essa perda de informação no sinal fica mais evidente no terceiro passo do método de AFT, onde a *FFT* é utilizada para transformar as amostras temporais das forças não-lineares nos respectivos coeficientes de Fourier. Por conta da não-linearidade cúbica desse exemplo, harmônicos de ordem elevada são gerados. Isso pode ser facilmente visto ao elevar ao cubo a expressão de $q(t)$ na Eq. (2.5.39), que resulta em

$$\begin{aligned} f_{nl}(t) &= q^3(t) \\ &= \left(0.5e^{-3\Omega t} + 0.5e^{-1\Omega t} + 0.5e^{\Omega t} + 0.5e^{3\Omega t}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}e^{-9\Omega t} + \frac{3}{8}e^{-7\Omega t} + \frac{6}{8}e^{-5\Omega t} + \frac{10}{8}e^{-3\Omega t} + \frac{12}{8}e^{-\Omega t} \\ &\quad + \frac{12}{8}e^{\Omega t} + \frac{10}{8}e^{3\Omega t} + \frac{6}{8}e^{5\Omega t} + \frac{3}{8}e^{7\Omega t} + \frac{1}{8}e^{9\Omega t} \end{aligned} \quad (2.5.40)$$

A Eq. (2.5.40) mostra que, quando o Ansatz é proposto tendo apenas componentes até o terceiro harmônico, a força não linear tem componentes não-zero

até o nono harmônico. Assim, para que esses harmônicos de ordem acima de H seja computados através da FFT sem distorcer os resultados, é preciso uma melhor discretização dos sinais no domínio do tempo, o que é possível com o preenchimento de zeros. As Figura 2.7g-h mostram os coeficientes de Fourier das forças não-lineares calculadas a partir das amostras temporais das forças não-lineares obtidas no segundo passo do método AFT. Ao comparar os resultados obtidos pelo método com o resultado analítico apresentados na Eq. (2.5.40), conclui-se que apenas o sinal com o preenchimento de zeros gerou resultados exatos. Para o caso do sinal sem o preenchimento de zeros, a distorção por mascaramento gerou valores não-zeros para o termo DC e para o segundo harmônico, o que não é correto.

Por último, para que as equações de balanço harmônico sejam geradas, é necessário que apenas os coeficientes de Fourier da força não-linear até o terceiro harmônico, visto que o Ansatz foi gerado com $H = 3$. Logo, os coeficientes de Fourier adicionais gerados pelo processo de preenchimento de zeros podem ser descartados. Vale observar que a comparação entre os resultados de AFT e o resultado analítico só foi possível porque a dimensão do sistema é pequena ($n = 1$), a ordem de truncamento do Ansatz baixa ($H = 3$), e a não-linearidade é simples. Quando esse não é o caso, a utilização do método de AFT se torna ainda mais essencial.

Durante o processo de correção da proposta inicial de solução do problema algébrico através do método de Newton-Raphson, é necessário que a matriz Jacobina $\frac{\partial \mathbf{R}_{HB}}{\partial \mathbf{u}}$ seja calculada. Para que isso seja feito de forma eficiente, é necessário que $\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{nl,j}}{\partial u_k}$ seja calculado eficientemente, onde u_k representa a k -ésima entrada do vetor de incógnitas \mathbf{u} . O método AFT também pode ser utilizado para isso. Como a transformada de Fourier e sua inversa são transformações lineares, a derivada parcial da Eq. (2.5.38) em relação a u_k pode ser escrito como

$$\frac{\partial \left\{ \tilde{\mathbf{f}}_{nl,j} \right\}}{\partial u_k} = \text{FFT} \left[\frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial u_k} (\text{iFFT} [\{ \tilde{\mathbf{q}}_j \}]) \right].$$

Assim, tanto os coeficientes de Fourier das forças não lineares quanto as respectivas derivadas parciais pode ser calculadas a partir do mesmo algoritmo de AFT, que é bastante eficiente uma vez que os algoritmos FFT e iFFT são utilizados. Para otimizar o método de AFT, é recomendado utilizar um processo de preenchimento de zeros que resulte em um número total de coeficientes de Fourier que seja uma potência de 2.

Exemplo 2.5. *Esse último exemplo tem como objetivo mostrar o processo de convergência das aproximações obtida pelo MBH a medida que a ordem de truncamento do Ansatz é aumentada. A solução do problema de valor de contorno só é de fato encontrada quando $H \rightarrow \infty$. No entanto, dependendo da suavidade da solução, aproximações com valores baixos para H resultam em aproximações muito boas da solução. Neste exemplo, mostra-se*

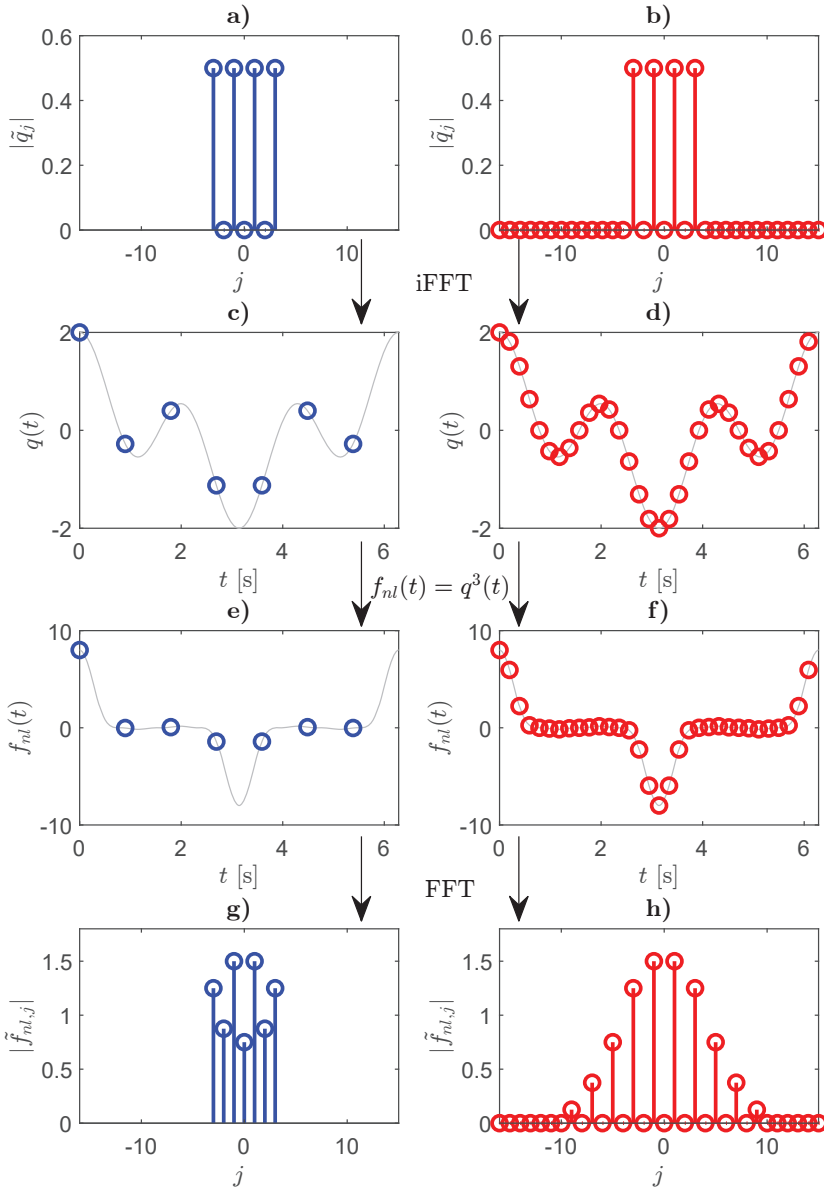


Figura 2.7: Exemplo numérico para o cálculo de $\{f_{nl,j}\}$ através do método de AFT. resultados na coluna da esquerda sem o preenchimento de zeros e o na coluna da direita com o preenchimento de zeros.

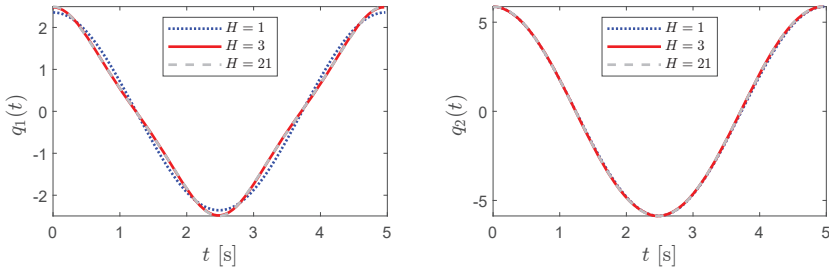


Figura 2.8: Convergência das aproximações obtidas pelo MBH para a solução do problema de valor de contorno periódico.

então como o valor para H pode ser definido para que a aproximação seja suficientemente boa e de baixo custo computacional, simultaneamente.

Com a utilização do método de AFT desenvolvido nesta seção, os coeficientes de Fourier da força não linear do sistema pode ser computadas sem grandes esforços, mesmo para Ansatz com alta ordem de truncamento. Assim, este exemplo revisita o problema discutido no Exemplo 2.2, onde a solução periódica de um sistema massa-mola de dois graus de liberdade é aproximada com o MBH. No entanto, desta vez a aproximação é obtida considerando valores crescentes para a ordem de truncamento do Ansatz. A Figura 2.8 mostra as aproximações obtidas para $H = 1, 3$ e 21 . Para o deslocamento do primeiro grau de liberdade, $q_1(t)$, a aproximação com $H = 3$ já é praticamente igual à aproximação com $H = 21$, o que mostra que esses coeficientes de Fourier de ordem mais elevada são todos próximos de zero. Para o deslocamento do segundo grau de liberdade, $q_2(t)$, a aproximação com apenas um harmônico já é suficientemente próxima das demais. Dessa forma, pode-se concluir que uma aproximação com $H = 3$ seria indicada para essa solução periódica. Essa conclusão só é válida para a solução neste nível de energia. Caso o parâmetro de energia ϵ aumente, é possível que uma ordem de truncamento maior seja necessária para manter a precisão da aproximação da solução periódica feita pelo MBH.

2.6 Exercícios

1. Considerando a função periódica $x(t) = \cos^3(2\pi t)$ e a identidade trigonométrica $\cos^3(t) = \frac{3}{4} \cos(t) + \frac{1}{4} \cos(3t)$, defina:
 - a) qual é a frequência fundamental e o período da função $x(t)$?
 - b) os coeficientes de Fourier até o sexto harmônico, considerando a representação exponencial para a série.

2. Considerando agora a função periódica $x(t) = \cos^2(2\pi t)$ e a identidade trigonométrica $\cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t)$, defina novamente:
 - a) qual é o período e a frequência fundamental da função $x(t)$?
 - b) os coeficientes de Fourier até o sexto harmônico, considerando a representação exponencial para a série.

3. Considere a vibração livre de um oscilador de Duffing conservativo cuja dinâmica é governada pela equação

$$\ddot{q}(t) + q(t) + 0.5q^3(t) = 0.$$

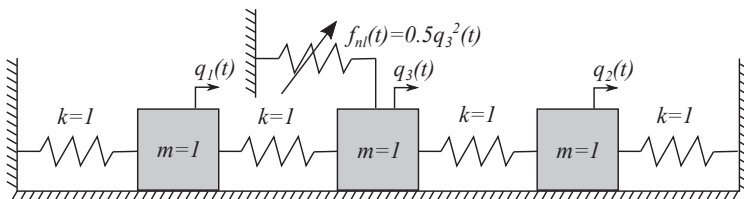
- a) Determine a expressão analítica para os coeficientes de Fourier da força elástica não-linear, $f_{nl} = 0.5q^3(t)$, considerando um *Ansatz* $q_H(t)$ da solução na forma de uma série de Fourier truncada no primeiro harmônico.

 - b) Repita o item anterior considerando agora um *Ansatz* da solução na forma de uma série de Fourier truncada no segundo harmônico.
4. Para o sistema mecânico apresentado no exercício 3, calcule os coeficientes de Fourier da força não-linear através do método de Alternância Frequência-Tempo utilizando um número de amostras $N = 3, 8$ e 16 . Utilize o seguinte *Ansatz* da solução para avaliar os resultados

$$q_H(t) = 2e^{-i2\pi t} + 1 + 2e^{i2\pi t}$$

Compare os resultados obtidos aqui com os esperados pela expressão analítica desenvolvida no exercício 3a.

5. Considere o sistema mecânico ilustrado na figura abaixo:



- a) Defina a equação de movimento deste sistema.

- b) Defina as frequências naturais e os MNL do sistema linear associado.
- c) Obtenha as soluções periódicas relacionadas ao primeiro MNN deste sistema considerando os níveis de energia $\epsilon = 1$ e $\epsilon = 10$. Utilize para o cálculo o MBH com ordem de truncamento $H = 6$ e o método AFT com $N = 32$ amostras.
- d) O sistema passou por um processo de enrijecimento ou relaxamento com o aumento de energia?
- e) Repita o mesmo processo, considerando agora as soluções periódicas para o segundo MNN e comente as diferenças observadas.

Capítulo 3

Método do tiro

No capítulo anterior, o MBH foi apresentado como uma ferramenta capaz de definir aproximações precisas para as soluções de problemas dos valores de contorno periódicos. Uma formulação fraca do problema foi desenvolvida a partir da abordagem de resíduos ponderados, e a respectiva aproximação foi obtida considerando um *Ansatz*, estrito na forma de uma série de Fourier truncada, e uma projeção de Fourier-Galerkin. O objetivo deste capítulo consiste em apresentar uma abordagem alternativa ao MBH, chamada de método do tiro, que é capaz de encontrar a solução do mesmo problema de valor de contorno periódico. O método do tiro, diferentemente do MBH, ataca o problema direto em sua formulação forte realizando integrações numéricas das equações diferenciais que governam a dinâmica dos sistemas.

A ideia do método do tiro consiste em buscar um estado inicial do sistema capaz de criar um problema de valor inicial cuja integração numérica ao longo de um determinado intervalo de tempo resulte em um desejado estado final do sistema. Quando utilizado para resolver problemas de valor de contorno periódicos, esse estado final desejado consiste no mesmo estado inicial utilizado para criar o problema de valor inicial. Ao obter o estado final do sistema igual ao estado inicial, estabelece-se o fechamento de uma órbita, e conseqüentemente a definição de uma solução periódica do sistema. O intervalo de tempo utilizado na integração numérica do problema de valor inicial, partindo do estado inicial até o estado final, representa o período da solução e não é um parâmetro conhecido inicialmente. Assim, as incógnitas do método do tiro consistem em um estado inicial do sistema e em um período da solução.

A definição dos valores dessas incógnitas é feita encontrando a raiz de uma função resíduo, definida como sendo a diferença entre o estados iniciais e finais do sistema, obtidos pela integração numérica da equação de movimento. Em geral, essa raiz da função resíduo é encontrada numericamente utilizando o método de Newton-Raphson. Já a integração numérica da equação de movimento é geralmente feita utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem ou utilizando o esquema de Newmark.

Quando comparado ao MBH, o método do tiro é mais simples. Ele re-

quer apenas a implementação de um integrador numérico e de um algoritmo para resolver sistemas de equações algébricas, rotinas que geralmente já estão presentes na maioria dos softwares desenvolvidos. Além disso, o método do tiro busca a solução de problemas de valores de contornos periódicos diretamente em sua formulação forte. Assim, não existem possíveis erros relacionados à formulação do método, apenas os erros numéricos envolvidos na busca da solução. Esse não é o caso do MBH, onde a ordem de truncamento do *Ansatz* pode, por exemplo, afetar consideravelmente o resultado obtido. Uma desvantagem do método do tiro é a necessidade de uma integração numérica, o que pode levar a algumas instabilidades numéricas e perdas de acurácia durante o processo de obtenção das soluções. Além disso, o custo computacional para calcular as soluções periódicas pode aumentar significativamente com o aumento da dimensão dos sistemas, ou no caso em que as soluções periódicas não serem suaves (o que exige um refinamento da discretização temporal durante o processo de integração). Já a principal vantagem do método do tiro é sua capacidade de avaliar a estabilidade das soluções periódicas (no sentido de Lyapunov) sem que haja a necessidade de cálculos adicionais.

Esse capítulo inicia com uma revisão sobre o esquema de Newmark, que foi o integrador escolhido neste livro para compor o método do tiro. Em seguida, o resíduo do tiro é definido, junto com as respectivas restrições de amplitude e fase das soluções buscadas. Uma discussão sobre como obter a raiz do resíduo é apresentada. Ao final, o conceito de estabilidade das soluções periódicas é apresentado junto com um procedimento de cálculo.

3.1 Integrador de Newmark

O método de integração discutido nesta seção foi proposto inicialmente por Newmark em 1959 [45], e aprimorado por outros autores nos anos seguintes [27, 6, 11]. O método consiste em um algoritmo de passo único capaz de integrar as equações diferenciais de segunda ordem diretamente. Para sistemas mecânicos, isso pode ser extremamente vantajoso pois não exige a redefinição das equações de movimento na forma de espaço de estado para a integração, o que causaria uma duplicação da dimensão dos sistemas. Uma segunda característica que torna o método de Newmark bastante popular é o fato dele ter dois parâmetros livres que podem ser utilizados para ajustar as propriedades numéricas do integrador. Um exemplo deste ajuste é a possibilidade de escolher valores para esses dois parâmetros que tornam a integração incondicionalmente estável, o que significa que a estabilidade da integração não é afetada pelo incremento de tempo escolhido.

O objetivo do método de Newmark é obter o estado de um sistema (deslocamentos e velocidades) em um instante de tempo $t_{n+1} = t_n + v$ a partir de um estado conhecido no instante de tempo t_n , onde v é o tamanho do passo da discretização temporal. Neste capítulo, este método será utilizado para

integrar um problema de valor inicial e encontrar o estado do sistema após um período, isto é, encontrar o estado do sistema para $t = T$. Para isso, além das equações de movimento (Eq. (1.4.74)), as respectivas condições iniciais e o período de integração precisam ser fornecidos ao método.

A apresentação do método de Newmark começa aqui através da definição de uma função genérica $w(t)$, em um instante de tempo t_{n+1} , que pode ser expressa na forma de uma série de Taylor:

$$w(\underbrace{t_n + v}_{t_{n+1}}) = w(t_n) + v \left. \frac{dw(t)}{dt} \right|_{t=t_n} + \frac{v^2}{2} \left. \frac{d^2w(t)}{dt^2} \right|_{t=t_n} + \dots + \frac{v^s}{s!} \left. \frac{d^s w(t)}{dt^s} \right|_{t=t_n} + R_s \quad (3.1.1)$$

onde R_s corresponde ao remanescente da série com ordem acima de s , que pode ser definido como sendo

$$R_s = \frac{1}{s!} \int_{t_n}^{t_n+v} (t_n + v - \tau)^s \frac{d^{s+1}w(\tau)}{d\tau^{s+1}} d\tau. \quad (3.1.2)$$

Utilizando as Eqs. (3.1.1) e (3.1.2), e substituindo a função genérica $w(t)$ por $\mathbf{q}(t)$ e depois por $\dot{\mathbf{q}}(t)$, o deslocamento e velocidade do sistema em $t = t_{n+1}$ podem ser escritos como

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + v\dot{\mathbf{q}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau) \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \quad (3.1.3)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau, \quad (3.1.4)$$

onde $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}(t_n)$ e $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}(t_n + v) = \mathbf{q}(t_{n+1})$. Os integrandos nas Eqs. (3.1.3) e (3.1.4) podem ser aproximados através de uma quadratura, como será mostrado a seguir. A partir da expansão em série de Taylor de $\ddot{\mathbf{q}}_n$ e $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ ao redor de $\tau \in [t_n, t_{n+1}]$, pode-se escrever

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \ddot{\mathbf{q}}(\tau) + (t_n - \tau) \left. \frac{d^3\mathbf{q}(t)}{dt^3} \right|_{t=\tau} + \frac{(t_n - \tau)^2}{2} \left. \frac{d^4\mathbf{q}(t)}{dt^4} \right|_{t=\tau} + \dots \quad (3.1.5)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{q}}(\tau) + (t_{n+1} - \tau) \left. \frac{d^3\mathbf{q}(t)}{dt^3} \right|_{t=\tau} + \frac{(t_{n+1} - \tau)^2}{2} \left. \frac{d^4\mathbf{q}(t)}{dt^4} \right|_{t=\tau} + \dots \quad (3.1.6)$$

Multiplicando Eq. (3.1.5) por $(1 - 2\beta)$ e Eq. (3.1.6) por 2β e somando as duas equações obtêm-se

$$\ddot{\mathbf{q}}(\tau) = (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{q}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \left. \frac{d^3\mathbf{q}(t)}{dt^3} \right|_{t=\tau} [\tau - 2v\beta - t_n] + \dots \quad (3.1.7)$$

Repetindo o mesmo processo, mas agora multiplicando Eq. (3.1.5) por $(1 - \gamma)$ e Eq. (3.1.6) por γ , a soma das equações resultantes se torna

$$\ddot{\mathbf{q}}(\tau) = (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \left. \frac{d^3\mathbf{q}(t)}{dt^3} \right|_{t=\tau} [\tau - v\gamma - t_n] + \dots \quad (3.1.8)$$

Substituindo a Eq. (3.1.7) e a Eq. (3.1.8) no integrando das Eq. (3.1.3) e Eq. (3.1.4), respectivamente, as fórmulas de quadratura são obtidas:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau) \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) v^2 \ddot{\mathbf{q}}_n + \beta v^2 \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{r}_\beta \quad (3.1.9)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau = (1 - \gamma) v \dot{\mathbf{q}}_n + \gamma v \dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{r}_\gamma \quad (3.1.10)$$

onde \mathbf{r}_β e \mathbf{r}_γ são medidas de erro, definidas por

$$\mathbf{r}_\beta = \left(\beta - \frac{1}{6}\right) v^3 \left. \frac{d^3 \mathbf{q}(t)}{dt^3} \right|_{t=\bar{\tau}} + O\left(v^4 \left. \frac{d^4 \mathbf{q}(t)}{dt^4} \right|_{t=\bar{\tau}}\right)$$

$$\mathbf{r}_\gamma = \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) v^2 \left. \frac{d^3 \mathbf{q}(t)}{dt^3} \right|_{t=\bar{\tau}} + O\left(v^3 \left. \frac{d^4 \mathbf{q}(t)}{dt^4} \right|_{t=\bar{\tau}}\right)$$

para $t_n < \bar{\tau} < t_{n+1}$. Descartando \mathbf{r}_β e \mathbf{r}_γ sob o argumento de serem funções de ordem elevada de v , uma família de esquemas de integração (família de Newmark) é obtida substituindo as Eqs. (3.1.9) e (3.1.10) nas Eqs. (3.1.3) e (3.1.4), respectivamente. Isso resulta em

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + v \dot{\mathbf{q}}_n + v^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\mathbf{q}}_n + v^2 \beta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \quad (3.1.11)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + (1 - \gamma) v \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma v \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \quad (3.1.12)$$

As constantes β e γ são os parâmetros da quadratura. Valores típicos para esses parâmetros são: $\beta = \frac{1}{6}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$, que implicam em uma interpolação linear de $\dot{\mathbf{q}}(\tau)$ para $\tau \in [t_n, t_{n+1}]$, e $\beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$, que corresponde ao valor médio de $\dot{\mathbf{q}}(\tau)$ para $\tau \in [t_n, t_{n+1}]$.

A partir das relações de Newmark estabelecidas pelas Eqs. (3.1.11) e (3.1.12), um esquema de integração implícito pode ser construído para integrar a equação de movimento de sistemas mecânicos não-lineares. Para isso, reescreve-se as Eqs. (3.1.11) e (3.1.12) da seguinte forma

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{1}{\beta v^2} (\mathbf{q}_{n+1} - \hat{\mathbf{q}}_{n+1}), \quad (3.1.13)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \hat{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta v} (\mathbf{q}_{n+1} - \hat{\mathbf{q}}_{n+1}). \quad (3.1.14)$$

onde $\hat{\mathbf{q}}_{n+1}$ e $\hat{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1}$ podem ser interpretados como previsões do deslocamento e velocidade para $t = t_{n+1}$ com aceleração $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{0}$, isto é,

$$\hat{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{q}_n + v \dot{\mathbf{q}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) v^2 \ddot{\mathbf{q}}_n \quad (3.1.15)$$

$$\hat{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + (1 - \gamma) v \ddot{\mathbf{q}}_n \quad (3.1.16)$$

A equação diferencial que governa a dinâmica dos sistemas não-lineares discutidos nesse livro foi definida pela Eq. (1.4.74) e é repetida abaixo considerando o caso em que $t = t_{n+1}$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}_{n+1}) = \mathbf{0}. \quad (3.1.17)$$

Substituindo a expressão de $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ definida pela Eq. (3.1.13), reescreve-se a Eq. (3.1.17) como sendo

$$\left[\frac{1}{\beta v^2} \mathbf{M} + \mathbf{K} \right] \mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}_{n+1}) - \frac{1}{\beta v^2} \mathbf{M} \hat{\mathbf{q}}_{n+1} = 0. \quad (3.1.18)$$

A equação (3.1.18) consiste em um problema algébrico não-linear cujas incógnitas são os deslocamentos \mathbf{q}_{n+1} . Observa-se que no último termo da Eq. (3.1.18), $\hat{\mathbf{q}}_{n+1}$ é considerado um vetor já conhecido, uma vez que ele depende apenas dos deslocamentos, velocidades e acelerações em um instante de tempo anterior, conforme mostrado pela Eq. (3.1.15).

O esquema implícito de integração de Newmark consiste em resolver a Eq. (3.1.18) para cada novo passo de tempo utilizando um algoritmo (por exemplo o método de Newton-Raphson). Uma vez encontrado \mathbf{q}_{n+1} , a velocidade e aceleração em $t = t_{n+1}$ podem ser calculadas utilizando as Eqs. (3.1.13) e (3.1.14) antes de passar para o próximo instante no processo de integração.

Exemplo 3.1. *Neste exemplo, busca-se mostrar o procedimento de integração pelo método de Newmark da equações de movimento do sistema massa-mola com dois graus de liberdade discutido exaustivamente nos capítulos 1 e 2. Um estado inicial do sistema é definido arbitrariamente para o sistema, que ao ser combinado com equação de movimento, resulta no problema de valor inicial a ser resolvido através da integração numérica. Define-se um intervalo de integração como sendo 10 segundos e um incremento de tempo $v = 0.1$ segundos, o que totaliza 101 amostras do estado do sistema a serem obtidas. Os parâmetros da quadratura foram definidos como sendo $\beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$, o que representa a hipótese de um aceleração média ao longo do incremento de tempo. Ao final, compara-se o resultado com o método de Runge-Kutta de quarta ordem.*

O problema de valor inicial considerado aqui é definido pela equação de movimento

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5q_1^3(t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{nl}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}} \quad (3.1.19)$$

e pelo estado inicial do sistema

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O primeiro passo do método de Newmark consiste em avaliar a aceleração inicial do sistema. Isso é feito isolando o termo de aceleração na Eq. (3.1.19) e substituindo os valores do estado inicial do sistema, que resulta em

$$\ddot{\mathbf{q}}(0) = \ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{K}\mathbf{q}(0) + \mathbf{f}_{nl}(0)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

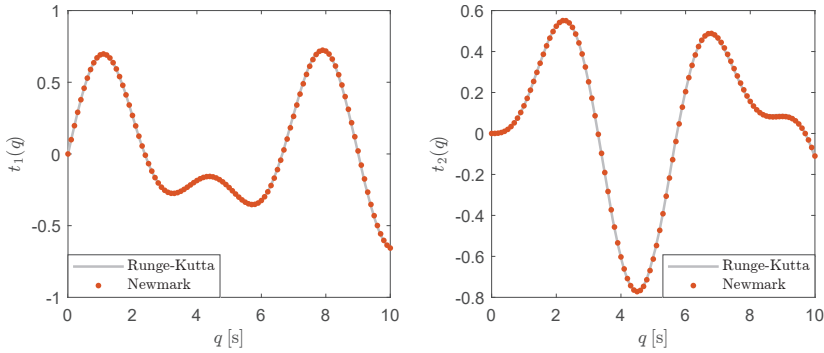


Figura 3.1: Comparação entre os resultados das integrações pelo método de Newmark e pelo método de Runge-Kutta

Substitui-se então os deslocamentos, as velocidades e as acelerações iniciais na Eq. (3.1.15), que fornece uma aproximação para o deslocamento no próximo instante de tempo ($t_1 = v = 0.1$ s)

$$\hat{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{q}_0 + v\dot{\mathbf{q}}_0 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)v^2\ddot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Utiliza-se então esta aproximação do deslocamento como proposta inicial para a solução do problema algébrico não-linear definido pela Eq. (3.1.18). Neste exemplo, a solução foi encontrada através do método de Newton-Raphson e corresponde a

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0.0995 \\ 0.0002 \end{bmatrix}.$$

A partir desse vetor de deslocamento, pode-se calcular os vetores de velocidade e aceleração neste mesmo instante de tempo através das Eqs. (3.1.14) e (3.1.13), respectivamente. Para este exemplo esses vetores correspondem a

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \begin{bmatrix} 0.9900 \\ 0.0050 \end{bmatrix} \quad e \quad \ddot{\mathbf{q}}_1 = \begin{bmatrix} -0.1992 \\ 0.0990 \end{bmatrix}.$$

Uma vez calculado os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração para esse primeiro instante de tempo, pode-se repetir os mesmos cálculos para obter os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração no segundo instante de tempo. Repetindo esse procedimento para todos os 101 instantes de tempo, obtêm-se a integração da equação de movimento para o intervalo de tempo definido (10 s). A Figura 3.1 mostra os deslocamentos q_1 e q_2 calculados. Em cinza, mostra-se também a curva dos deslocamentos calculados pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, que serve de comparação e validação o algoritmo do método de Newmark implementado.

3.2 Resíduo do tiro

Para encontrar uma solução periódica de um sistema mecânico não-linear utilizando o método do tiro, é necessário especificar um estado inicial do sistema, que, após de um determinado intervalo de tempo, retorna ao mesmo estado inicial. A formulação mais conveniente da equação de movimento para apresentar o método do tiro é o modelo de espaço de estado, onde a equação diferencial de segunda ordem é reduzida em uma de primeira ordem. O modelo de espaço de estado para os sistemas discutidos neste livro é definido através da equação

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) \quad (3.2.20)$$

onde $\mathbf{y}(t) = [\mathbf{q}^T(t) \quad \dot{\mathbf{q}}^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ é o estado do sistema e

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}, t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ -\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}(t))] \end{bmatrix} \quad (3.2.21)$$

é o campo vetorial.

Para uma determinada condição inicial, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, e um determinado período de integração, T , uma função resíduo que quantifica a falta de periodicidade da solução do problema de valor inicial pode ser definida. Essa função resíduo, que também é chamada de resíduo do tiro, é definida como sendo a diferença entre o estado final (após um intervalo de tempo T) e o estado inicial do sistema

$$\mathbf{R}_T(\mathbf{y}_0, T) = \mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_0.$$

Destaca-se aqui o fato do estado final $\mathbf{y}(T)$ depender também do estado inicial, uma vez que ele é obtido como sendo a solução em um instante de tempo $t = T$ do problema de valor inicial tendo \mathbf{y}_0 como condições iniciais. Para encontrar os estados iniciais e os respectivos períodos que satisfaçam as restrições periódicas do problema de valor de contorno periódico, é necessário achar uma raiz da função resíduo, isto é, achar a solução do problema algébrico

$$\mathbf{R}_T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (3.2.22)$$

onde $\mathbf{u} = [\mathbf{y}_0^T, T]$ corresponde às incógnitas do problema. A Eq. (3.2.22) é análoga à Eq. (2.3.25) no MBH, uma vez que ela corresponde a um sistema algébrico cuja solução define a solução periódica buscada. Assim como no caso do MBH, o problema algébrico definido pela Eq. (3.2.22) têm infinitas soluções, já que nenhuma restrição à amplitude e à fase foram feitas. Essa indeterminação pode ser superada adicionando duas equações de restrição, uma para a amplitude e outra para a fase. Para a equação de restrição de amplitude, pode-se definir um valor específico para o deslocamento inicial de algum grau de liberdade do sistema. Isso é feito através da equação

$$\eta_a(\mathbf{u}, \epsilon) = \mathbf{e}_i^T \mathbf{y}_0 - \epsilon = 0, \quad (3.2.23)$$

onde $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^{2n}$ corresponde a um vetor unitário com todas as entradas iguais a zero, exceto a i -ésima, cujo valor é 1. Na Eq. (3.2.23), i pode ter qualquer valor inteiro entre 1 e n .

Para a equação de restrição de fase, basta impor uma velocidade inicial nula para algum grau de liberdade. Isso pode ser feito através da equação

$$\eta_a(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_i^T \mathbf{y}_0 = 0. \quad (3.2.24)$$

Para a Eq. (3.2.24), i só pode ter valores inteiros entre $n + 1$ e $2n$.

Juntos, o resíduo do tiro, definido na Eq. (3.2.22), a restrição de amplitude, definida na Eq. (3.2.23), e a restrição de fase, definida na Eq. (3.2.24), formam um sistema de equações algébricas capaz de fornecer uma solução (dentro de uma tolerância de erro) para o problema de valor de contorno periódico, definida pela Eq. (1.4.76). Esse sistema pode ser definido, de forma compacta, através da equação

$$\bar{\mathbf{R}}_T(\mathbf{u}, \epsilon) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_T(\mathbf{u}) \\ \eta_a(\mathbf{u}, \epsilon) \\ \eta_p(\mathbf{u}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.2.25)$$

3.3 Solução das equações do método do tiro

O sistema algébrico definido na Eq. (3.2.25) possui a mesma forma do sistema definido pela Eq. (2.3.28). Assim, o procedimento de busca da solução discutido na seção 2.4, método de Newton-Raphson, é válido também para buscar a solução da Eq. (3.2.25). Os mesmos comentários feitos para a solução no MBH são válidos para o método do tiro. A proposta inicial para a solução \mathbf{u} precisa ser próximo da solução do problema. Caso contrário, a convergência do método de Newton-Raphson não é garantida. Os MNL e as frequências naturais do sistema linear associado podem ser bons parâmetros para compor as propostas iniciais das soluções.

Como mostrado pela Eq. (2.4.29), a correção de uma determinada proposta da solução é realizada linearizando o problema ao redor da solução, um processo que envolve o cálculo da matriz Jacobiana $\frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_T}{\partial \mathbf{u}}$. Essa matriz pode ser avaliada analiticamente ou numericamente (como por exemplo através de um método de diferenças finitas). Quando $\mathbf{g}(\mathbf{y}, t)$ é não-diferenciável, o procedimento numérico é a única possibilidade. A seguir, a abordagem analítica é discutida mais a fundo uma vez que ela traz mais eficiência e precisão ao método. Para o método do tiro, o cálculo preciso da matriz Jacobiana é de grande interesse porque a estabilidade da solução periódica pode ser calculada a partir dela, como será mostrado na última seção deste capítulo.

A matriz Jacobiana, necessária na Eq. (2.4.29), pode ser escrita como

sendo a composição das seguintes submatrizes

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_T}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial \mathbf{y}_0} & \frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial T} \\ \frac{\partial \eta_a}{\partial \mathbf{y}_0} & \frac{\partial \eta_a}{\partial T} \\ \frac{\partial \eta_p}{\partial \mathbf{y}_0} & \frac{\partial \eta_p}{\partial T} \end{bmatrix}. \quad (3.3.26)$$

As derivadas parciais das restrições de amplitude e fase são triviais e por isso não serão discutidas a seguir. Inicia-se então com a diferenciação do resíduo do tiro em relação às condições iniciais

$$\frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial \mathbf{y}_0} = \frac{\partial (\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{y}_0} \right|_{t=T} - \mathbf{I}_{2n}, \quad (3.3.27)$$

onde $\mathbf{I}_{2n} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ é a matriz identidade. O primeiro termo do lado direito da Eq. (3.3.27) corresponde à variação do estado do sistema em um instante de tempo $t = T$ após uma perturbação nas condições iniciais. Essa matriz pode ser calculada derivando a equação de movimento escrita na forma de espaço de estado, Eq. (3.2.20), em relação às condições iniciais. Essa derivação resulta em

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} [\dot{\mathbf{y}}(t)] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} [\mathbf{g}(\mathbf{y}(t), t)]. \quad (3.3.28)$$

Invertendo a ordem de derivação no lado esquerdo da equação e aplicando a regra da cadeia no lado direito, a Eq. (3.3.28) é reescrita como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{y}_0} \right] = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{y}(t), t)}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{y}_0}. \quad (3.3.29)$$

A Eq. (3.3.29) representa um problema de valor inicial governada por equações diferenciais ordinárias e com condições iniciais $\frac{\partial \mathbf{y}(0)}{\partial \mathbf{y}_0} = \mathbf{I}_{2n}$. Por isso, para avaliar $\frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial \mathbf{y}_0}$, é preciso integrar primeiro a Eq. (3.3.29) para obter $\frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{y}_0}$ em $t = T$, e em seguida substituir o resultado na Eq. (3.3.27). A matriz $\left. \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{y}_0} \right|_{t=T}$ é conhecida como a matriz de monodromia e contém todas as informações a respeito da estabilidade das soluções periódicas, como será visto na última seção deste capítulo.

O segundo e último termo da matriz Jacobiana discutido aqui corresponde a derivada parcial do resíduo do tiro em relação ao período da solução. Esse termo é muito mais simples de ser avaliado e pode ser feito utilizando a Eq. (3.2.20) avaliada em $t = T$. Isso porque

$$\frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial T} = \left. \frac{\mathbf{y}(t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \mathbf{g}(\mathbf{y}(T), T).$$

Uma vez calculado $\frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial \mathbf{y}_0}$, $\frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial T}$ e todas as derivadas parciais das restrições de amplitude e fase (que são triviais), a matriz Jacobiana definida na Eq. (3.3.26) pode ser construída e a proposta inicial de solução corrigida.

Exemplo 3.2. *O objetivo deste exemplo é ilustrar o procedimento de cálculo necessário para obter a solução de um problema de valor de contorno periódico utilizando o método do tiro. O sistema analisado corresponde ao mesmo sistema massa-mola não-linear de dois graus de liberdade discutido no Exemplo 3.1. Para este exemplo, estabelece-se a energia da solução periódica buscada através da definição do parâmetro ϵ , presente na Eq. (3.2.23), cujo valor foi arbitrariamente escolhido para esse exemplo como sendo igual a 1.5. Esse parâmetro será considerado aqui como o valor imposto ao deslocamento inicial do primeiro grau de liberdade do sistema, $q_1(0) = \epsilon$, o que significa que a equação de restrição de amplitude se torna $\eta_a(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_1^T \mathbf{y}_0 - 1.5$. Já para a restrição de fase, escolheu-se arbitrariamente o primeiro grau de liberdade para impor uma velocidade inicial nula na solução periódica. Isso corresponde em escrever a equação de restrição de amplitude, definida pela Eq. (3.2.24), como sendo $\eta_p(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_3^T \mathbf{y}_0$.*

O processo de busca da solução periódica é realizado através do método de Newton-Raphson e começa com uma boa proposta inicial para a solução do problema algébrico definido pela Eq. (3.2.25). Novamente, utilizaremos o primeiro MNL e a primeira frequência natural do sistema linear associado para construir essa proposta. Lembrando que para este modo os dois graus de liberdade do sistema se movem com mesma amplitude e fase, e que a frequência natural é 1 rad/s, defini-se como proposta inicial para \mathbf{u} o seguinte vetor

$$\mathbf{u}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{bmatrix}. \quad (3.3.30)$$

Nota-se que esta proposta inicial satisfaz tanto a restrição de amplitude como de fase. A última entrada do vetor $\mathbf{u}^{(0)}$ corresponde a uma proposta inicial para o período da solução, que foi definido a partir da relação existente entre a frequência natural e o período de oscilação de um sistema linear, isto é, $T = 2\pi/\Omega$.

A partir desta proposta inicial, pode-se construir um problema de valor inicial com a equação de movimento e condições iniciais definidas pela proposta inicial da solução. O problema de valor inicial pode ser então integrado até o período previsto pela proposta inicial através do método de Newmark. Os gráficos no topo da Figura 3.2 mostram os deslocamentos dos dois graus de liberdade obtidos considerando a proposta inicial definido na Eq. (3.3.30) (curvas em preto). Nota-se que esses deslocamentos não são periódicos para o intervalo de tempo $[0, T]$, e por isso não satisfazem a Eq. (3.2.25). Subtraindo o estado inicial do estado final encontrado após a integração, defini-se o resíduo do método do tiro, que para esta proposta inicial

j	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{u}^{(j)}$	1.5000	1.2907	1.4991	1.5000	1.5000	1.5000
	1.5000	2.6456	1.9835	2.1559	2.1586	2.1587
	0.0000	-0.0818	-0.0009	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	-1.4085	0.0850	-0.0029	0.0000	0.0000
	6.2832	5.1434	5.5119	5.4531	5.4522	5.4522
$ \bar{\mathbf{R}}_T $	1.8124	1.9840	0.2561	0.0023	4.21e-6	3.11e-9

Tabela 3.1: Tabela com a convergência da solução periódica utilizando o método do tiro.

corresponde a

$$\bar{\mathbf{R}}_T(\mathbf{u}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0.3680 \\ -0.4433 \\ -0.8139 \\ -1.5134 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As últimas entradas deste vetor são nulas porque a proposta inicial foi escolhido de forma a satisfazer as restrições de amplitude e fase.

Visto que $\mathbf{u}^{(0)}$ não é a solução do problema algébrico (dentro de uma tolerância de erro escolhida), o método de Newton-Raphson realiza correções iterativas desta proposta inicial até que a norma de $\bar{\mathbf{R}}_T$ seja suficientemente pequena ($\varepsilon < 10^{-7}$), como discutido na seção 2.4. A Tabela 3.1 mostra as atualizações das propostas de \mathbf{u} ao longo das iterações e a respectiva norma de $\bar{\mathbf{R}}_T$. Nota-se que com apenas cinco iterações a raiz do resíduo do tiro é encontrada (dentro da tolerância de erro) e a solução periódica do sistema definida. A Figura 3.2 mostra a busca pela solução periódica ao longo das primeira 2 iterações e a Figura 3.3 mostra graficamente o processo de convergência do método.

3.4 Análise de estabilidade

Na literatura, existem diversos conceitos sobre estabilidade e algum deles podem ser apropriados ou não para a definição de estabilidade de soluções periódicas. Um dos conceitos bastante utilizados na literatura é a estabilidade de Lyapunov. Este conceito afirma que, se a solução de uma equação diferencial é Lyapunov estável, qualquer outra solução inicialmente “próxima” a ela ficará restrita a uma “pequena distância” dela no espaço de estado ao longo de todo o tempo [25]. Apesar deste conceito de estabilidade ser apropriado para pontos de equilíbrio, ele não é conveniente para o estudo de soluções periódicas.

Para mostrar essa inconveniência, considere duas soluções periódicas estáveis e que tenham níveis de energia próximos. Dada a diferença no nível

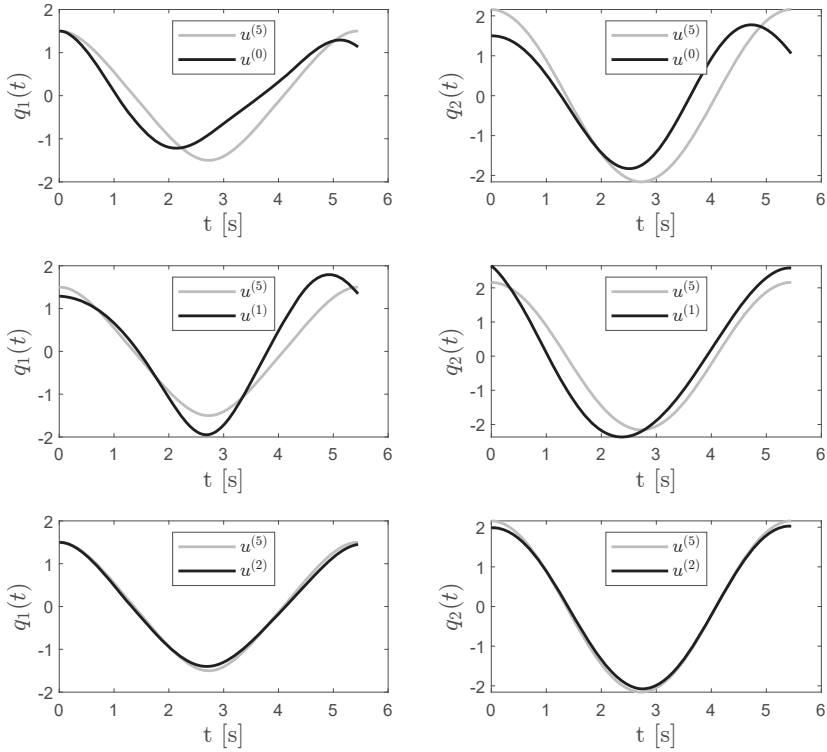


Figura 3.2: Convergência das soluções periódicas durante as duas primeiras iterações do método de Newton-Raphon. A curva em cinza representa a aproximação final após a convergência do método (5^a iteração)

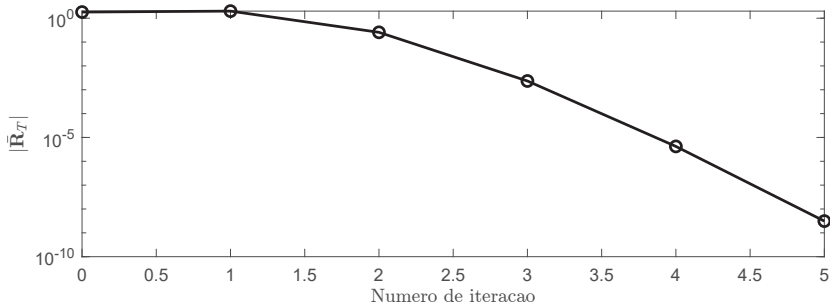


Figura 3.3: Norma do vetor resíduo em função do número de iterações.

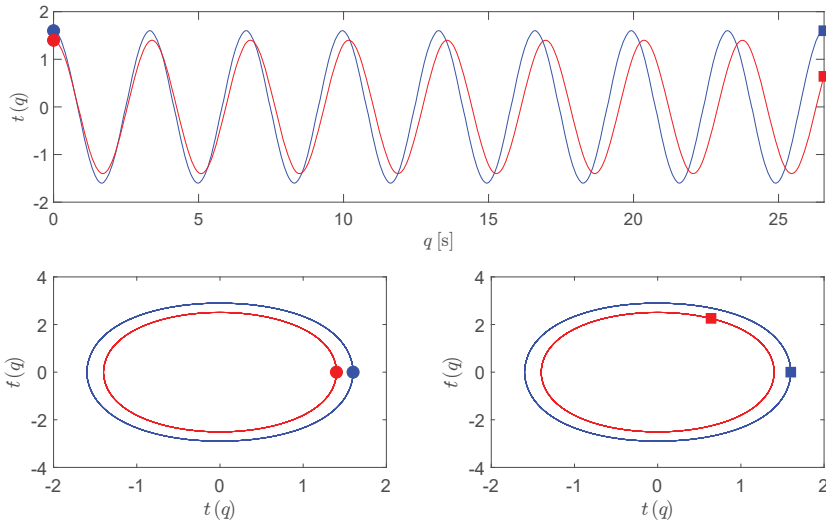


Figura 3.4: Soluções periódicas estáveis que seriam consideradas instáveis pelo conceito de Lyapunov

de energia entre essas soluções, mesmo que pequena, é possível que existam diferenças nos períodos. Dessa forma, ao evoluir em escalas de tempo diferentes (mesmo que próximas), essas soluções periódicas estáveis e inicialmente próximas podem se tornar significativamente distantes ao longo do tempo. Esse comportamento é ilustrado na Figura 3.4. De acordo com o conceito de Lyapunov, essas soluções periódicas seriam instáveis.

Um outro conceito de sobre estabilidade é então necessário, e consiste na chamada estabilidade de Poincaré. Esse conceito define a estabilidade de uma órbita da seguinte forma: sejam duas soluções periódicas $\mathbf{y}_{e1}(t)$ e $\mathbf{y}_{e2}(t)$ com níveis de energia próximos e períodos T_1 e T_2 , respectivamente. Essas soluções periódicas são responsáveis por definirem as órbitas Γ_1 e Γ_2 , respectivamente. A órbita Γ_1 é dita orbitavelmente estável se, dado um número real pequeno $\alpha > 0$, existe um $\delta = \delta(\alpha) > 0$ que, no caso de $\|\mathbf{y}_{e1}(0) - \mathbf{y}_{e2}(\tau)\| < \delta$ existir para algum δ , então existe dois instante de tempo t_1 e t_2 que satisfaz a condição $\|\mathbf{y}_{e1}(t_1) - \mathbf{y}_{e2}(t_2)\| < \alpha$. Além disso, caso Γ_2 tenda a Γ_1 quando $t \rightarrow \infty$, então Γ_1 é dita assintoticamente estável. Para a estabilidade de Poincaré, é avaliado a proximidade de duas no espaço de estado [43]. Embora o conceito de Poincaré seja conveniente para definir a estabilidade de soluções periódicas, ele não fornece um procedimento de cálculo explícito para isso. é necessário então adotar uma rotina baseada na teoria de Floquet, conforme mostrado a seguir.

Seja $\mathbf{y}_\epsilon(t)$ uma solução periódica (em um determinado nível de energia ϵ) de um sistema autônomo cuja dinâmica é governada pela Eq. (3.2.20). O período desta solução é T . Sobrepondo uma perturbação $\mathbf{z}(t)$ à solução, de

forma que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_\epsilon(t) + \mathbf{z}(t)$, reescreve-se a Eq. (3.2.20) como sendo

$$\dot{\mathbf{y}}_\epsilon + \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}_\epsilon + \mathbf{z})$$

Expandindo o lado direito da equação em uma série de Taylor ao redor de \mathbf{y}_ϵ e retendo apenas os termos de primeira ordem, obtêm-se

$$\dot{\mathbf{z}} \approx \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_\epsilon} \right) \mathbf{z} = \mathbf{G}(t)\mathbf{z}. \quad (3.4.31)$$

onde \mathbf{G} é a matriz com as primeiras derivadas parciais de \mathbf{g} . Vale ressaltar que a análise de estabilidade discutida nesta seção é dita local, visto que a perturbação foi considerada pequena na expansão em série de Taylor (retenção apenas dos termos de primeira ordem). A Eq. (3.4.31) representa um sistema linear com coeficientes periódicos, o tipo de sistema analisado pela teoria de Floquet. Para esse tipo de sistema, o número de soluções independentes é $2n$, o mesmo número da dimensão do sistema. Essas soluções independentes formam o chamado conjunto de soluções fundamentais, definido aqui por $\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^{2n}$, e que pode ser arranjado em uma matriz de soluções fundamentais

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) & \mathbf{z}_2(t) & \dots & \mathbf{z}_{2n}(t) \end{bmatrix}.$$

Assim, a Eq. (3.4.31) pode ser reescrita como sendo

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{Z}. \quad (3.4.32)$$

Ao comparar a Eq. (3.3.29) com a Eq. (3.4.32), nota-se que ambas correspondem a sistemas de equações diferenciais equivalentes. Propondo uma mudança na variável de t para $\tau = t + T$, e lembrando que $\mathbf{G}(t)$ têm periodicidade T , reescreve-se a Eq. (3.4.32) como sendo

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} = \mathbf{G}(\tau - T)\mathbf{Z} = \mathbf{G}(\tau)\mathbf{Z}.$$

Assim, se $\mathbf{Z}(t)$ é uma matriz de soluções fundamentais, $\mathbf{Z}(\tau) = \mathbf{Z}(t + T)$ também é uma. No entanto, como existem apenas $2n$ soluções independentes para a Eq. (3.4.31), e $\{\mathbf{z}_i(t)\}_{i=1}^{2n}$ corresponde a um conjunto dessas soluções, cada solução fundamental $\mathbf{z}_i(t + T)$ pode ser escrita como uma combinação linear das soluções fundamentais $\mathbf{z}_1(t)$, $\mathbf{z}_2(t)$, \dots , $\mathbf{z}_{2n}(t)$. Isso implica que $\mathbf{Z}(t + T)$ pode ser escrito como

$$\mathbf{Z}(t + T) = \mathbf{Z}(t)\mathbf{\Psi}, \quad (3.4.33)$$

onde $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ é uma matriz de coeficientes constantes. Essa matriz pode ser vista como uma transformação que mapeia um vetor no \mathbb{R}^{2n} quando $t = 0$ em um vetor no \mathbb{R}^{2n} quando $t = T$. Nota-se que a matriz $\mathbf{\Psi}$ não é única e depende da escolha das soluções fundamentais que compõe $\mathbf{Z}(t)$. Para o caso específico de condições iniciais

$$\mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}_{2n},$$

onde \mathbf{I}_{2n} é a matriz identidade de dimensão $2n \times 2n$, a Eq. (3.4.33) se torna $\mathbf{Z}(T) = \mathbf{\Psi}$ ao impor $t = 0$. Neste caso específico, a matriz $\mathbf{\Psi}$ é chamada de matriz de monodromia e contém as informações a respeito da estabilidade da solução periódica.

Seja $\mathbf{\Phi}$ uma matriz $2n \times 2n$ cujas colunas correspondem aos autovetores da matriz de monodromia $\mathbf{\Psi}$. Ao definir a transformação $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{V}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}$, onde $\mathbf{\Phi}^{-1}$ é a inversa de $\mathbf{\Phi}$, a Eq. (3.4.33) pode ser reescrita como

$$\mathbf{V}(t+T) = \mathbf{V}(t)\mathbf{\Lambda} \quad (3.4.34)$$

onde

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{2n} \end{bmatrix},$$

que corresponde a uma matriz com os autovalores de $\mathbf{\Psi}$ em sua diagonal principal. Os autovalores da matriz de monodromia são chamados de multiplicadores de Floquet ou multiplicadores característicos, e podem ter valores reais ou complexos. Quando os multiplicadores de Floquet são complexos, eles aparecem em pares de complexos conjugados, visto que $\mathbf{\Psi}$ é uma matriz de coeficientes reais. A Eq. (3.4.34) pode ser então reescrita como

$$\mathbf{v}_i(t+T) = \lambda_i \mathbf{v}_i(t) \text{ para } i = 1, \dots, 2n. \quad (3.4.35)$$

Assim, para $p \in \mathbb{N}$ períodos, a Eq. (3.4.35) se torna

$$\mathbf{v}_i(t+pT) = \lambda_i^p \mathbf{v}_i(t). \quad (3.4.36)$$

Consequentemente, quando $t \rightarrow \infty$ (isto é, $N \rightarrow \infty$), tem-se

$$\mathbf{v}_i(t) \rightarrow \mathbf{0} \text{ quando } \|\lambda_i\| < 1 \quad (3.4.37)$$

$$\mathbf{v}_i(t) \rightarrow \infty \text{ quando } \|\lambda_i\| > 1 \quad (3.4.38)$$

Quando $\|\lambda_i\| = 1$, a perturbação $\mathbf{v}_i(t)$ é periódica. Para o caso especial em que $\lambda_i = 1$, o período de $\mathbf{v}_i(t)$ é T , e para o caso especial em que $\lambda_i = -1$, o período de $\mathbf{v}_i(t)$ é $2T$.

Quando a estabilidade de uma solução periódica de um sistema autônomo é avaliada, há sempre a presença um autovalor $\lambda_i = 1$. Isso ocorre porque, para um sistema autônomo, qualquer solução periódica pode ser transladada no tempo e continuar sendo uma solução periódica. Essa característica é a razão pela qual as restrições de fase foram necessárias no cálculo das soluções periódicas discutidas no capítulo 2 e 3. Dessa forma, tanto $y_e(t)$ quando $y_e(t + \Delta t)$ são soluções periódicas, onde Δt é um incremento de defasagem entre as soluções. Uma perturbação $\mathbf{z}(t)$ pode ser então definida como

$$\mathbf{z}(t) = y_e(t + \Delta t) - y_e(t).$$

Neste caso, $\mathbf{z}(t)$ representa uma perturbação ao longo da órbita da solução periódica. Dada a periodicidade das soluções $y_e(t)$ e $y_e(t + \Delta t)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t + pT) &= y_e(t + pT + \Delta t) - y_e(t + pT) \\ &= y_e(t + \Delta t) - y_e(t) \\ &= \mathbf{z}(t). \end{aligned}$$

o que significa que $\mathbf{z}(t)$ é periódica e com período igual a T . Isso só ocorre quando $\lambda = 1$, como pode ser observado na Eq. (3.4.36).

Em resumo, para avaliar a estabilidade de uma solução periódica, analisa-se os autovalores da matriz de monodromia do sistema. Caso o módulo de algum autovalor seja maior que 1, a solução periódica é instável, visto que uma perturbação iria crescer indefinidamente como mostrado na Eq. (3.4.38). Vale lembrar que esse resultado representa apenas uma tendência local de crescimento da perturbação, visto que a análise de estabilidade apresentada aqui é local. Quando não existe nenhum autovalor com módulo maior que 1, todos os autovalores aparecem sobre o círculo unitário, visto que os sistemas analisados aqui são todos conservativos. Diz-se então que a solução periódica é não-hiperbólica, e sua estabilidade só pode ser avaliada através de uma análise não-linear [43].

Exemplo 3.3. *A estabilidade de duas soluções periódicas serão analisadas neste exemplo. Ambas soluções, que possuem níveis distintos de energia, pertencem ao primeiro MNN do sistema massa-mola de dois graus de liberdade discutido nos Exemplos 3.1 e 3.2.*

A primeira solução periódica, caracterizada pela solução do método do tiro, e representada pelo vetor de solução

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.52 \\ 6.01 \\ 0 \\ 0 \\ 4.95 \end{bmatrix} \quad (3.4.39)$$

A matriz de monodromia é então calculada através da solução da equação diferencial ordinária definida pela Eq. (3.3.29). Para esta solução periódica em questão, a matriz de monodromia corresponde a

$$\Psi_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{y}_0} \right|_{t=T} = \begin{bmatrix} 0.8585 & 0.0268 & -0.0418 & 0.0310 \\ 0.1052 & 0.9801 & 0.0311 & -0.0231 \\ 5.1745 & -1.4120 & 0.8585 & 0.1051 \\ -1.4128 & -0.3141 & 0.0268 & 0.9801 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores λ_i desta matriz são então calculados e correspondem a

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.00 \\ \lambda_2 &= 1.00 \\ \lambda_3 &= 0.84 + 0.55\mathbf{i} \\ \lambda_4 &= 0.84 + 0.55\mathbf{i} \end{aligned}$$

Esses autovalores, ou multiplicadores de Floquet, são mostrados na Figura 3.5a. Todos os multiplicadores estão sobre a circunferência unitário, o que indica que a órbita caracterizada por essa solução periódica pode ser estável.

A segunda solução periódica discutida neste exemplo também é caracterizada pela solução do método do tiro, e representada pelo vetor de solução

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.80 \\ 7.58 \\ 0 \\ 0 \\ 4.87 \end{bmatrix}. \quad (3.4.40)$$

Ao comparar as Eqs. (3.4.39) e (3.4.40), nota-se que os deslocamentos iniciais da segunda solução são maiores, o que indica que esta solução está em um nível de energia um pouco acima da primeira solução. A matriz de monodromia desta segunda solução é calculada novamente solucionando a Eq. (3.3.29), e corresponde a

$$\Psi_2 = \left. \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{y}_0} \right|_{t=T} = \begin{bmatrix} 0.8585 & 0.0268 & -0.0418 & 0.0310 \\ 0.1052 & 0.9801 & 0.0311 & -0.0231 \\ 5.1745 & -1.4120 & 0.8585 & 0.1051 \\ -1.4128 & -0.3141 & 0.0268 & 0.9801 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de Ψ_2 podem ser então calculados e correspondem a

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.70 \\ \lambda_2 &= 1.00 \\ \lambda_3 &= 1.00 \\ \lambda_4 &= 0.59 \end{aligned}$$

Esses multiplicadores de Floquet são mostrados graficamente na Fig 3.5b. Como o primeiro multiplicador está fora do círculo unitário, a órbita caracterizada por essa segunda solução periódica é instável.

Para ilustrar a diferença no comportamento de órbitas estáveis e instáveis, a equação de movimento do sistema massa-mola representado pela Eq. (3.1.19) é integrada ao longo de 10 períodos para ambas as soluções \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , com a adição de uma pequena perturbação. As duas órbitas analisadas são mostradas em vermelho nas Figura 3.5c e 3.5d. As curvas em preto representam os deslocamentos obtidos durante a integração ao longo do 10 respectivos períodos. Nota-se que a curva preta na Figura 3.5c, que caracteriza a solução \mathbf{u}_1 perturbada, mantém a perturbação inicial dentro de um intervalo pequeno, a ponto das curvas vermelhas e pretas parecerem sobrepostas. Esse comportamento corresponde, segundo a estabilidade de Poincaré, em uma órbita estável. Já a curva preta na Figura 3.5d, que caracteriza a solução periódica \mathbf{u}_2 perturbada, mostra que a perturbação inicial cresceu consideravelmente ao longo dos 10 períodos, o que caracteriza um comportamento instável da órbita.

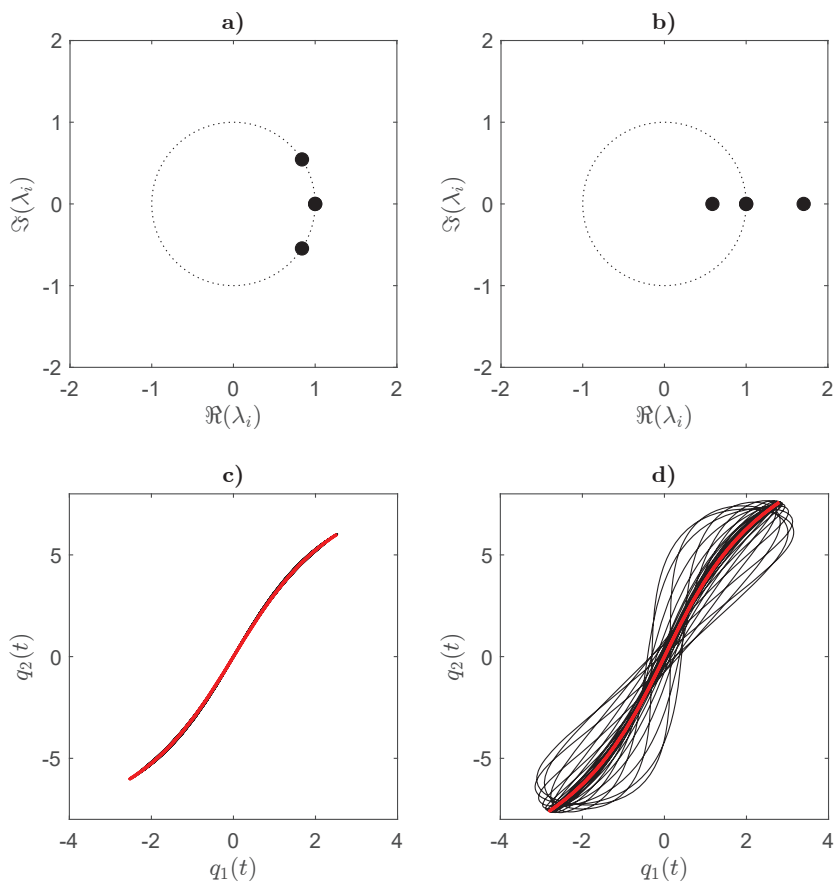
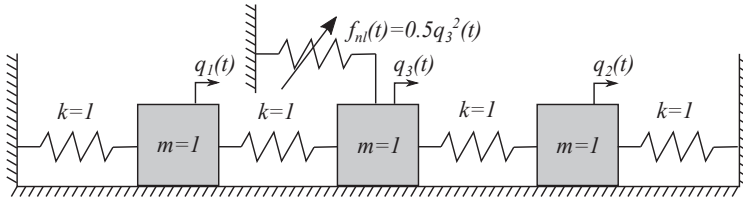


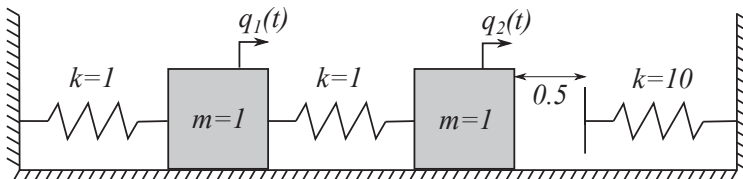
Figura 3.5: Caracterização de soluções periódicas cujas órbitas são estáveis e instáveis. Gráficos a) e b) mostram os autovalores das matrizes de monodromia e os gráficos c) e d) mostram os deslocamentos do sistema após uma perturbação nas soluções periódicas.

3.5 Exercícios

1. Considere o sistema ilustrado na figura abaixo, cuja equação de movimento foi obtida no Exercício 5 do capítulo 2. Realize a integração numérica da equação de movimento para o intervalo $t \in [0, 10]$ utilizando o integrador de Newmark com os parâmetros $\beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$. Considere como condições iniciais $\mathbf{q}(t) [0 \ 0 \ 0]$ e $\dot{\mathbf{q}}(t) [1 \ 0 \ 0]$ e três diferentes incrementos de tempo: $v = 1$, $v = 0.5$, e $v = 0.1$. Comente os resultados obtidos.



2. Calcule duas soluções periódicas associadas ao primeiro MNN utilizando o método do tiro e com os níveis de energia $\epsilon = 1$ e $\epsilon = 4$. O deslocamento inicial de $q_1(t)$ é usado na restrição de amplitude. Discretize a integração ao longo do período com 128 amostras. Compare o resultado obtido com as soluções periódicas obtidas no Exercício 5 do capítulo 2.
3. Defina se as soluções periódicas obtidas no Exercício 2 são estáveis ou instáveis. Mostre graficamente os multiplicadores de Floquet.
4. Calcule soluções periódicas associadas ao primeiro MNN do sistema massa-mola de dois graus de liberdade mostrado na figura abaixo. O elemento de não-linearidade corresponde a uma mola unidirecional com rigidez $k_u = 10$ que é sentida pelo sistema apenas quando $q_2(t) > 0.5$. Esse tipo de não-linearidade pode ser visto em estruturas com fim de curso ou folgas. Utilize o método do tiro para calcular as soluções periódicas. Utilize a restrição de amplitude para o deslocamento q_2 e com energias variando entre $\epsilon = 0.1$ e $\epsilon = 0.6$. Realize uma continuação sequencial das soluções com incremento de 0.01 nos valores de ϵ . Mostre um gráfico da frequência fundamental da solução periódica em função de ϵ . Comente o resultado.



Capítulo 4

Continuação numérica de soluções periódicas

Nos capítulos 2 e 3, dois métodos numéricos foram apresentados para obter uma solução periódica de sistemas mecânicos autônomos, conservativos e não-lineares. No entanto, o conhecimento de apenas uma solução periódica não permite a compreensão global da dinâmica dos sistemas. Por exemplo, com apenas uma solução periódica não é possível determinar se o sistema sofre um processo de enrijecimento ou relaxamento com o aumento de energia nas soluções periódicas. Além disso, a obtenção de um solução periódica estável em um determinado nível energético não garante a estabilidade de outras soluções periódicas em outros níveis energéticos. De acordo com Rosenberg [57, 58, 59], os modos normais não-lineares (MNN) correspondem a famílias de soluções periódica. Isso significa que o cálculo dos MNNs consiste em obter soluções periódicas para diferentes níveis de energia, avaliando as respectivas evoluções. Sendo os MNNs o tema principal deste livro, é evidente que a continuação numérica de soluções periódicas representa uma tarefa importante a ser feita.

Ao realizar um processo de continuação, desejamos obter soluções para um determinado problema perante a variação de um determinado parâmetro, chamado aqui de parâmetro livre. Este parâmetro pode pertencer tanto ao sistema quanto à solução. Por exemplo, quando estamos utilizando o processo de continuação para calcular os MNN, o parâmetro livre corresponde ao nível energético ϵ , que está atrelado somente à solução. Já quando estamos interessados em calcular as curvas de resposta em frequência de um sistema, o parâmetro livre corresponde à frequência de excitação, que corresponde a um parâmetro do sistema. O conjunto das soluções obtidas a partir de um processo de continuação numérica consiste no chamado ramo de soluções. Logo, um MNN pode ser interpretado como um ramo de soluções periódica, cujo parâmetro livre é o nível energético das soluções. Em geral, a construção de um ramo de solução é restrita a um intervalo pré-definido do parâmetro livre.

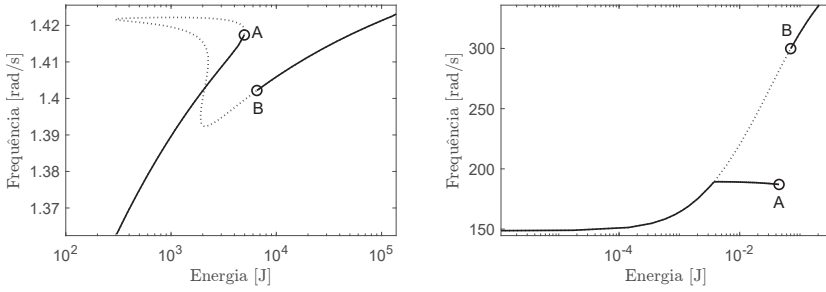


Figura 4.1: Exemplos de pontos de retorno em MNN que causam problemas de convergência durante a continuação sequencial.

O processo de continuação mais simples é o método de continuação sequencial, brevemente apresentado no Exemplo 2.3. A continuação sequencial é feita variando o valor do parâmetro livre com um incremental fixo a cada nova solução e tendo a última solução conhecida como proposta inicial de solução. Apesar de ser um método bastante simples, esse processo de continuação numérica possui algumas limitações, especialmente quando pontos de bifurcação são encontrados. Nesses pontos, a nova solução pode se distanciar consideravelmente da última solução conhecida, fazendo com que a correção da proposta inicial não seja obtida (perda de convergência). A Figura 4.1 mostra dois exemplos de pontos de bifurcação que são muitas vezes encontrados nas curvas de resposta em frequência e nos MNN, os chamados pontos de retorno. Percebe-se que, em ambos os casos, o ponto de retorno (A) está distante da próxima solução buscada, o ponto (B). Nestes casos, a redução no incremento da continuação não soluciona o problema, visto que o ramo de solução passa por uma descontinuidade quando a continuação é feita monotonicamente em relação ao parâmetro livre. Por isso, um processo de continuação numérica mais sofisticado precisa ser utilizado para o cálculo dos MNNs.

Este capítulo discute um processo clássico de continuação numérica, chamado de método de predição-correção [61]. Este método é bastante utilizado no estudo de dinâmica estruturas não-lineares, uma vez que ele permite o cálculo dos MNNs e das curvas de resposta em frequência. De forma resumida, o cálculo de uma nova solução durante processo de continuação ocorre em duas etapas. A primeira etapa, chamada de predição, consiste em estimar uma nova solução a partir de uma ou mais soluções já conhecidas. No entanto, essa predição dificilmente irá satisfazer (dentro de uma tolerância de erro) o sistema de equações que governa o problema, necessitando assim um processo de correção desta proposta de solução prevista. É necessário que essa correção garanta a progressão das soluções ao longo do ramo desejado. Isso é feito através de uma restrição paramétrica da solução. Métodos de continuação mais sofisticados, como o método numérico assintótico [22, 12],

também podem ser utilizados no cálculo de MNNs, mas não serão discutidos neste livro.

Ao longo do capítulo, o processo de continuação será apresentado sem distinguir se o sistema de equações algébricas que governa as soluções periódicas foram obtidas pelo método do Balanço Harmônico (MBH) ou pelo método do tiro. Por isso, apresenta-se a seguir, de forma genérica, o problema de continuação numérica para o cálculo dos MNNs:

$$\begin{aligned} \text{Resolver} \quad & \bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}, \\ \text{onde} \quad & \bar{\mathbf{u}} = \left[\mathbf{u}^T \quad \epsilon \right]^T, \\ \text{para o intervalo} \quad & \epsilon_i \leq \epsilon \leq \epsilon_f \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

O vetor de funções $\bar{\mathbf{R}} : \mathbb{R}^{n_u+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u+1}$ corresponde ao vetor contendo tanto as funções de resíduo quanto as restrições de fase e amplitude da solução periódica buscada. Este vetor de funções foi definido pela Eq. (2.3.28) quando utilizado o MBH e pela Eq. (3.2.25) quando utilizado o método do tiro. Ao utilizar o MBH, o vetor de incógnitas $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ é composto pela frequência fundamental e pelos coeficientes de Fourier do *Ansatz*. Já quando o método do tiro é utilizado, o vetor de incógnitas $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ é composto pelo período fundamental e pelo estado inicial do sistema que garante a solução periódica. O escalar ϵ corresponde ao parâmetro livre da continuação numérica, que no caso dos MNN consiste em um parâmetro associado à energia da solução periódica. Um intervalo pré-definido para a continuação do parâmetro livre é definido através do limite inferior ϵ_i e do limite superior ϵ_f .

A seguir, as duas etapas do processo de continuação numérica pelo método de predição-correção são apresentados. A primeira etapa corresponde a uma predição de uma nova solução, e a segunda corresponde a uma correção desta predição para que ela de fato satisfaça as equações algébricas que governam o problema.

4.1 Predição

Para progredir ao longo de um ramo de solução, o primeiro passo consiste em realizar uma predição de uma nova solução a partir das propriedades das soluções anteriores já conhecidas. Isso significa que pelo menos uma solução deve ser conhecida para que a predição seja realizada. Em geral, a primeira solução periódica de um MNN é obtida fazendo com que $\epsilon = \epsilon_i$, e impondo que ϵ_i seja um nível energético tão pequeno que o sistema se comporte como o sistema linear associado, cuja solução periódica é facilmente definida pelos modos normais lineares (MNLs), calculados através de um problema de autovalor.

Seja $\bar{\mathbf{u}}_j$ a última solução conhecida para o problema definido pela Eq. (4.0.1). Uma predição para a próxima solução que também satisfaz esse

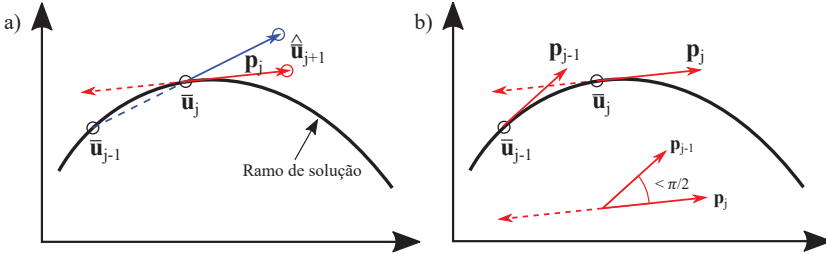


Figura 4.2: a) Predição da próxima solução pelo método da secante (azul) e pelo método da tangente (vermelho). b) Definição do sentido do vetor direcional pelo método da tangente para garantir a continuação na direção correta.

sistema pode ser definida através da equação

$$\hat{\bar{\mathbf{u}}}_{j+1} = \bar{\mathbf{u}}_j + s_j \mathbf{p}_j, \quad (4.1.2)$$

onde \mathbf{p}_j é um vetor unitário direcional e s_j é o tamanho de passo da continuação. O vetor direcional será calculado de duas formas neste capítulo, através do método da secante e através do método da tangente. Ambas formas são ilustradas na Figura 4.2a.

4.1.1 Método da secante

O vetor direcional no método da secante é definido utilizando duas soluções previamente conhecidas e extrapolando linearmente o ramo de soluções. Isso é feito através da equação

$$\mathbf{p}_{\text{sec},j} = \frac{\bar{\mathbf{u}}_j - \bar{\mathbf{u}}_{j-1}}{\|\bar{\mathbf{u}}_j - \bar{\mathbf{u}}_{j-1}\|}.$$

Extrapolações de ordens mais altas também são possíveis, mas necessitam de um número maior de soluções conhecidas, além de uma extensão da Eq. (4.1.2) para incorporar os termos de ordem mais alta.

4.1.2 Método da tangente

O método da tangente utiliza o vetor que tangencia o ramo de soluções no ponto \mathbf{u}_j como vetor direcional na predição. Para isso, o seguinte sistema algébrico linear precisa ser resolvido

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right|_{\bar{\mathbf{u}}_j} \bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j} = \mathbf{0}. \quad (4.1.3)$$

onde $\bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j}$ é o vetor tangente ao ramo de solução em $\bar{\mathbf{u}}_j$. Esse sistema é indeterminado e por isso apenas a direção de $\bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j}$ pode ser obtida. Caso $\bar{\mathbf{u}}_j$

seja um ponto de bifurcação do tipo transcrito ou *pitchfork* (tridente), mais de uma direção para $\bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j}$ existe. Para o caso em que $\bar{\mathbf{u}}_j$ não é um desses pontos de bifurcação, apenas uma direção tangencial pode ser definida pela Eq. (4.1.3). O sentido e a norma de $\bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j}$ continuam sendo indeterminados. Para que $\bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j}$ seja definido de forma única, o valor de alguma entrada de $\bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j}$ precisa ser imposta ao problema. Isso é feito adicionando uma equação de normalização ao sistema de equações. Um exemplo desta normalização é dado pela equação

$$\mathbf{e}_k^T \bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j} = 1,$$

onde $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{n_u+1}$ é um vetor unitário com todas as entradas iguais a zero, exceto a k -ésima entrada, cujo valor é 1. Essa não é a única equação de normalização possível, mas é a mais utilizada uma vez que ela é simples e mantém a linearidade do problema. A direção tangencial $\bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j}$ pode ser então computada através do seguinte problema algébrico estendido

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \Big|_{\bar{\mathbf{u}}_j} \\ \mathbf{e}_k^T \end{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j} = \mathbf{0}.$$

Para garantir que o vetor direcional utilizado na predição tenha norma unitária, realiza-se uma normalização do vetor $\bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j}$

$$\mathbf{p}_{\text{tan},j} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j}}{\|\bar{\mathbf{p}}_{\text{tan},j}\|}.$$

Uma vez normalizado, é preciso ainda definir o sentido do vetor para garantir a progressão correta da continuação ao longo do ramo de solução, evitando assim o retorno para soluções já conhecidas. Na Figura 4.2a, o vetor direcional $\mathbf{p}_{\text{tan},j}$ obtido pelo método da tangente pode ser tando a seta vermelha pontilhada quanto a seta vermelha sólida. Ambas são tangentes ao ramo e têm norma unitária. No entanto, apenas a seta sólida garante a continuação das soluções no sentido correto. Uma forma de definir o sentido correto de $\mathbf{p}_{\text{tan},j}$ consiste em comparar este vetor com o vetor direcional do passo anterior, $\mathbf{p}_{\text{tan},j-1}$. Se o produto interno euclidiano entre esses vetores unitários for positivo, isso significa que o ângulo entre $\mathbf{p}_{\text{tan},j}$ e $\mathbf{p}_{\text{tan},j-1}$ é menor que $\pi/2$ rad, o que indica que eles estão no mesmo sentido da continuação. Essa verificação do sentido do vetor $\mathbf{p}_{\text{tan},j}$ é mostrado na Figura 4.2b.

4.1.3 Tamanho do passo

O valor do passo s_j representa (indiretamente) a resolução do ramo de soluções. Este passo pode ser definido como constante ao longo do ramo ou adaptativo (como recomendado), onde o tamanho é ajustado para cada nova solução. Quando um passo grande é utilizado, é mais provável que a predição se distancie mais da solução do problema. Como mostrado na próxima seção, isso implica em um maior número de iterações durante a etapa de correção da predição. Além de um maior custo computacional, uma predição

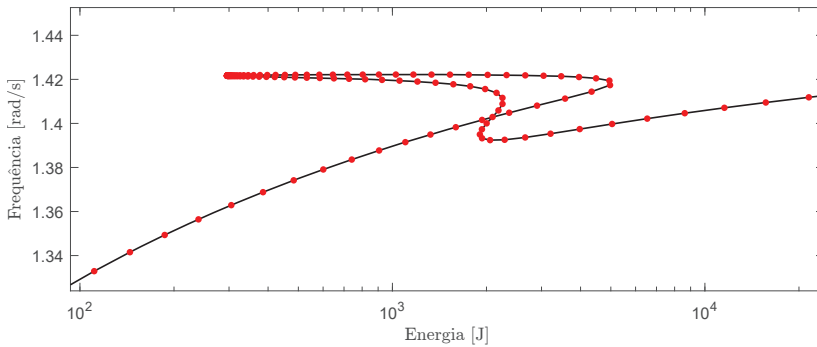


Figura 4.3: Ilustração da variação no tamanho de passo (distância entre os pontos vermelhos) no processo de continuação das soluções periódicas.

ruim pode acarretar em uma perda de convergência na correção. Por outro lado, quando um passo pequeno é utilizado, um número maior de soluções é necessário para cobrir o mesmo intervalo pré-definido do parâmetro livre, o que também têm um alto custo computacional associado.

Uma estratégia comum para ajustar o tamanho do passo a cada nova solução é definir o tamanho em função do número de iterações utilizada na correção da última solução encontrada. Isso é, o passo s_{j+1} pode ser definido através da equação

$$s_{j+1} = \frac{N_c}{N_*} s_j, \quad (4.1.4)$$

onde N_c é o número de iterações utilizadas para corrigir a predição da última solução conhecida e N_* é um número ideal estipulado pelo usuário. Além do ajuste adaptativo do tamanho de passo, é usual estabelecer valores máximos e mínimos para s_{j+1} , a fim de garantir uma discretização máxima e mínima do ramo de soluções. Essa estratégia adaptativa do tamanho de passo é ilustrada na Figura 4.3. é possível observar que as regiões próximas a alta curvatura do ramo tendem a ter um tamanho de passo menor. Isso acontece porque a predição não é muito precisa nessa região, fazendo com que seja necessário um maior número de iterações na correção, e conseqüentemente, um menor tamanho de passo é definido.

4.2 Correção

A predição da nova solução, $\hat{\mathbf{u}}_{j+1}$, calculada pela Eq. (4.1.2), dificilmente irá satisfazer (dentro de uma tolerância de erro pré-definida) o problema algébrico definido pela Eq. (4.0.1). Por isso, uma segunda etapa neste processo de continuação é necessário e corresponde a uma correção da predição. Durante esse processo de correção, a solução buscada precisa manter uma certa distância das soluções já conhecidas para que a continuação numérica

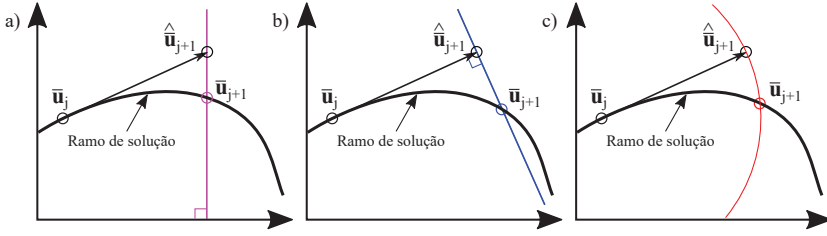


Figura 4.4: Representações conceituais da trajetória de correção da solução.

possa ser feita de forma eficiente e com boa resolução. Isso significa que, durante o processo de correção, a solução buscada não pode convergir para uma solução já conhecida, visto que isso não possibilitaria a continuação do parâmetro livre, e também não pode convergir para uma solução muito distante, pois poderia perder informações valiosas sobre a dinâmica do sistema nesse intervalo. Para realizar a correção de forma controlada, uma restrição paramétrica na solução buscada é imposta. Existem diferentes formas de parametrizar uma solução ao longo do ramo, e por isso diferentes restrições de parametrização também são possíveis. Nesta seção, discutiremos as restrições mais populares utilizadas para o cálculo dos MNNs. Elas serão definidas aqui através da equação algébrica adicional $h(\bar{\mathbf{u}}_{j+1}) = 0$, que precisará ser resolvida simultaneamente com a Eq. (4.0.1). Em outras palavras, o seguinte sistema algébrico precisa ser resolvido durante o processo de correção

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{u}}_{(j+1)}) \\ h(\bar{\mathbf{u}}_{j+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2.5)$$

Tanto as equações definidas pelo vetor \mathbf{R} quanto a equação de restrição paramétrica h são geralmente não-lineares, e por isso a solução é buscada numericamente através de um algoritmo como o método de Newton-Raphson. O processo de achar a solução para a Eq. (4.2.5) (dentro de uma tolerância de erro) corresponde ao chamado processo de correção da predição. A proposta inicial de solução deste problema é justamente a predição $\hat{\mathbf{u}}_{j+1}$ definida pela Eq. (4.1.2), que é então corrigido recursivamente até que a solução $\bar{\mathbf{u}}_{j+1}$ seja encontrada. O número N_c de iterações necessárias para a realização desta correção é então utilizado para calibrar o tamanho de passo da próxima predição, como mostrado na Eq. (4.1.4).

A seguir, as diferentes formas de restringir a correção das predições ao longo do ramo de soluções serão apresentadas, assim como as respectivas parametrizações.

4.2.1 Restrição local

Uma simples forma de parametrizar uma solução ao longo do ramo consiste em utilizar as entradas do vetor $\bar{\mathbf{u}}$ como parâmetros. Assim, a nova

solução buscada pode ser restrita impondo um determinado valor para alguma entrada de $\bar{\mathbf{u}}$, definida aqui como o parâmetro local $\bar{u}_{k,(j+1)}$, onde $1 \leq k \leq n_u + 1$. A restrição no valor do parâmetro pode ser feita através de incremento pré-definido ξ ao valor obtido na última solução conhecida, $\bar{u}_{k,j}$. Assim, a equação adicional de restrição paramétrica local é dada por

$$h_{\text{loc}}(\bar{\mathbf{u}}_{j+1}) = u_{k,j+1} - (u_{k,j} + \xi) = 0, \quad (4.2.6)$$

Percebe-se que u_k pode ser qualquer componente de $\bar{\mathbf{u}}$, incluindo o parâmetro livre ϵ . A escolha do índice k pode ser alterada a cada novo passo na continuação, tornando-a uma restrição mais flexível e diferenciando-a da continuação sequencial. Quando $k \leq n_u$, o parâmetro local consiste em um componente do vetor \mathbf{u} , o que significa que o valor do parâmetro livre ϵ pode alterar livremente durante o processo de correção. Isso permite que a continuação numérica progrida por um ponto de retorno no diagrama de bifurcação. Caso $k = n_u + 1$, o parâmetro local coincide com o parâmetro livre ϵ e o processo de continuação se comporta como a continuação sequencial nesse passo.

A performasse numérica da continuação depende da escolha do índice k a cada novo passo. Uma boa forma de definir o melhor índice k consiste em determiná-lo como o índice da entrada de \mathbf{p}_j contendo o maior valor absoluto. Isto é,

$$p_{k,j} = \max \{ \|p_{1,j}\|, \|p_{2,j}\|, \dots, \|p_{n_u+1,j}\| \}.$$

O incremento ξ pode ser escrito em função do índice k e do último vetor direcional. Uma forma de relacioná-lo também ao tamanho de passo s_j pode ser feita através da equação

$$\xi = s_j p_{k,j}.$$

O benefício de se definir o incremento ξ desta forma é torná-lo adaptativo ao longo do ramo, uma vez que ele passa a ser função de s_j .

Essa restrição paramétrica é mostrada na Figura 4.4a, onde o caminho de correção desde o ponto de predição até a solução numérica do problema é conceitualmente representado pela linha magenta. Neste exemplo, $k = n_u + 1$, o que significa que o parâmetro local é o parâmetro livre ϵ . Neste caso, a equação de restrição paramétrica impõe que o caminho de correção seja perpendicular ao eixo da abscissa no diagrama de bifurcação.

4.2.2 Restrição ortogonal

Uma forma alternativa de restringir a busca pela solução consiste em exigir que o caminho de correção seja ortogonal ao vetor direcional \mathbf{p}_j definida na etapa de predição. Essa restrição utiliza a mesma parametrização da solução ao longo do ramo e pode ser facilmente imposta através da seguinte equação de restrição

$$h_{\text{ort}}(\bar{\mathbf{u}}_{j+1}) = \mathbf{p}_j^T (\hat{\mathbf{u}}_{j+1} - \bar{\mathbf{u}}_{j+1}). \quad (4.2.7)$$

Esse tipo de restrição ortogonal é ilustrada conceitualmente através da Fig 4.4b. Essa restrição pode enfrentar alguns problemas de convergência ao encontrar pontos de retorno quando grandes passos são utilizados na predição. No entanto, essa restrição têm a vantagem de ser linear em relação a solução buscada.

4.2.3 Restrição de comprimento de arco

Uma outra forma de parametrizar as soluções ao longo do ramo consiste em definir um comprimento de arco a partir de um ponto de referência. Quando esse ponto de referência é a última solução conhecida, $\bar{\mathbf{u}}_j$, o comprimento de arco até a solução predita corresponde ao tamanho de passo s_j . Para manter essa distância entre os pontos ao longo do processo de correção, uma restrição paramétrica de comprimento de arco pode ser definida como sendo

$$h_{\text{arc}}(\bar{\mathbf{u}}_{j+1}) = \sum_{k=1}^{n_u+1} (u_{k,j+1} - u_{k,j})^2 - (s_j)^2 = 0 \quad (4.2.8)$$

A Eq. (4.2.8) impõe que $\bar{\mathbf{u}}_{j+1}$ esteja na superfície de uma hiper-esfera de dimensão $n_u + 1$, centrada no ponto $\bar{\mathbf{u}}_j$ e com raio s_j . Essa restrição paramétrica é a mais robusta em relação a pontos de retorno, o que a torna a mais popular no cálculo de MNNs. Essa restrição é mostrada conceitualmente na Figura 4.4c.

4.3 Algoritmo

Esta seção apresenta um algoritmo para calcular os MNNs através da continuação de soluções periódica pelo método da predição-correção. O algoritmo é independente do método escolhido para calcular a solução periódica. Por isso, utiliza-se aqui uma função resíduo $\bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{u}})$ genérica, que precisa ser substituída pela Eq. (2.3.28) ao utilizar o MBH ou pela Eq. (3.2.25) ao utilizar método do tiro. As principais etapas do algoritmo são descritas a seguir:

1. Primeiro, alguns parâmetros de inicialização são necessários. São eles o tamanho de passo s_0 para a continuação, o número ideal de iterações na correção N_* , os valores mínimos e máximos de energia definidos para os MNNs, definidos aqui por ϵ_i e ϵ_f , respectivamente, e a proposta inicial para a primeira solução periódica associada ao menor nível energético ϵ_i . A proposta inicial para a primeira solução periódica pode em algumas situações ser o parâmetro de inicialização mais difícil de se fornecer. Para o cálculo de MNNs, a melhor estratégia consiste em definir um nível de energia inicial ϵ_i pequeno o suficiente para que o sistema se comporte no regime linear. Desta forma, a proposta inicial é definida pelo MNLs, facilmente obtidos através do problema clássico

de autovalor definido pela Eq. (1.3.21). Os valores de s_0 e N_* dependem da experiência do analista, uma vez que seus valores podem variar consideravelmente dependendo do sistema.

2. Para corrigir a proposta inicial até que a primeira solução periódica seja obtida (dentro da tolerância de erro), uma restrição paramétrica inicial precisa ser imposta, visto que ainda não há nenhuma solução conhecida. O objetivo é que o nível energético da solução não seja modificado ao longo deste primeiro processo de correção. A restrição paramétrica inicial é dada por

$$h(\bar{\mathbf{u}}_0) = \epsilon - \epsilon_i.$$

Essa restrição pode ser vista como um caso especial da restrição local discutida na seção 4.2, onde $k = n_u + 1$ (isto é, o parâmetro local é o parâmetro livre), $u_{k,j} = 0$ (não há solução anterior) e $\xi = \epsilon_i$.

3. Dada a restrição paramétrica inicial e a função resíduo que governa as soluções periódicas (definida de forma diferente para o MBH ou para o método do tiro), a primeira solução periódica pode ser encontrada resolvendo a Eq. (4.2.5) através do método de Newton-Raphson e utilizando o vetor $\hat{\mathbf{u}}_0 = [\hat{\mathbf{u}}_0^T, \epsilon_i]$ como proposta inicial.
4. Após encontrada a primeira solução $\bar{\mathbf{u}}_0$, a continuação numérica é iniciada através de um processo recursivo, onde inicialmente $j=0$. Considerando a última solução conhecida como $\bar{\mathbf{u}}_j$, a predição para a próxima solução é definida pela Eq. (4.1.2). Essa predição exige o cálculo do vetor direcional \mathbf{p}_j , que, para a primeira solução periódica, só pode ser calculada através do método da tangente. Depois que pelo menos duas soluções tenham sido encontradas, \mathbf{p}_j pode ser calculado também pelo método da secante.
5. Após calcular o vetor direcional unitário, a predição da nova solução periódica é feita através da Eq. (4.1.2) e utilizando o atual tamanho de passo s_j . Essa predição é utilizada como proposta inicial de solução durante a etapa de correção.
6. Antes de realizar a correção da predição, a restrição paramétrica precisa ser atualizada com os dados da última solução periódica conhecida. Três diferentes métodos foram discutidos na seção 4.2. A restrição paramétrica foi definida pela Eq. (4.2.6) para a restrição local, pela Eq. (4.2.7) para a restrição ortogonal, e pela Eq. (4.2.8) para a restrição de comprimento de arco.
7. Tendo definido a restrição paramétrica e calculado a predição da solução (proposta inicial), a próxima solução periódica é obtida resolvendo a Eq. (2.4.29) com o método de Newton-Raphson. Um importante

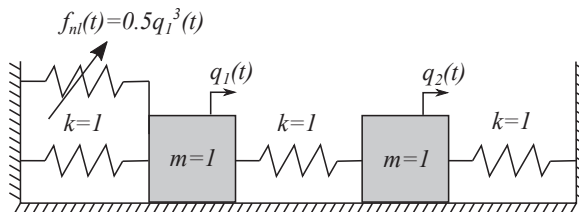
parâmetro a ser observado durante essa etapa consiste no número de iterações N_c utilizada pelo método de Newton-Raphson.

8. Conhecendo o último número de iterações de correção N_c e o valor desejável N_* (definido inicialmente pelo usuário), o tamanho de passo s_{j+1} para a próxima predição pode ser ajustado pela Eq. (4.1.4).
9. A partir da última solução periódica, é possível avaliar se o valor do parâmetro livre ϵ já alcançou o valor máximo estipulado inicialmente pelo usuário (ϵ_f). Se alcançado, o processo de continuação é finalizado. Caso contrário uma nova iteração na continuação é feita incrementando o índice j e repetindo os itens 4 a 8.

Além dos itens essenciais descritos acima, alguns mecanismos adicionais devem ser adicionados ao algoritmo para torna-lo um código mais robusto. Caso a convergência do método de Newton-Raphson não seja obtida durante o item 7, uma nova tentativa deve ser feita, retornando ao item 5 e reduzindo o tamanho do passo (por exemplo pela metade) para se ter uma nova predição mais conservadora. Além disso, o algoritmo pode sofrer com problemas numéricos quando as variáveis do problema têm valores com ordens de grandeza muito distintos. Esse problema pode ser reduzido através de um pré-condicionamento do problema, como explicado em [36].

4.4 Exercícios

1. Considere o sistema massa-mola não-linear mostrado na figura abaixo:



- a) Calcule o primeiro MNN utilizando o método do tiro para um intervalo de energia mecânica (cinética mais potencial) das soluções periódicas igual a $[1e-3 \ 1e4]$. Mostre o Gráfico Frequência-Energia desse modo.
- b) Calcule novamente o mesmo MNN utilizando agora o MBH. Realize o cálculo considerado as ordens de truncamento $H = 1, 3$ e 9 . Compare os modos calculados com o obtido no item anterior quando método do tiro foi utilizado. Comente os resultados.
- c) Calcule o segundo MNN desse sistema para um intervalo de energia mecânica igual a $[1e-3 \ 1e4]$. Mostre o Gráfico Frequência-Energia desse modo.

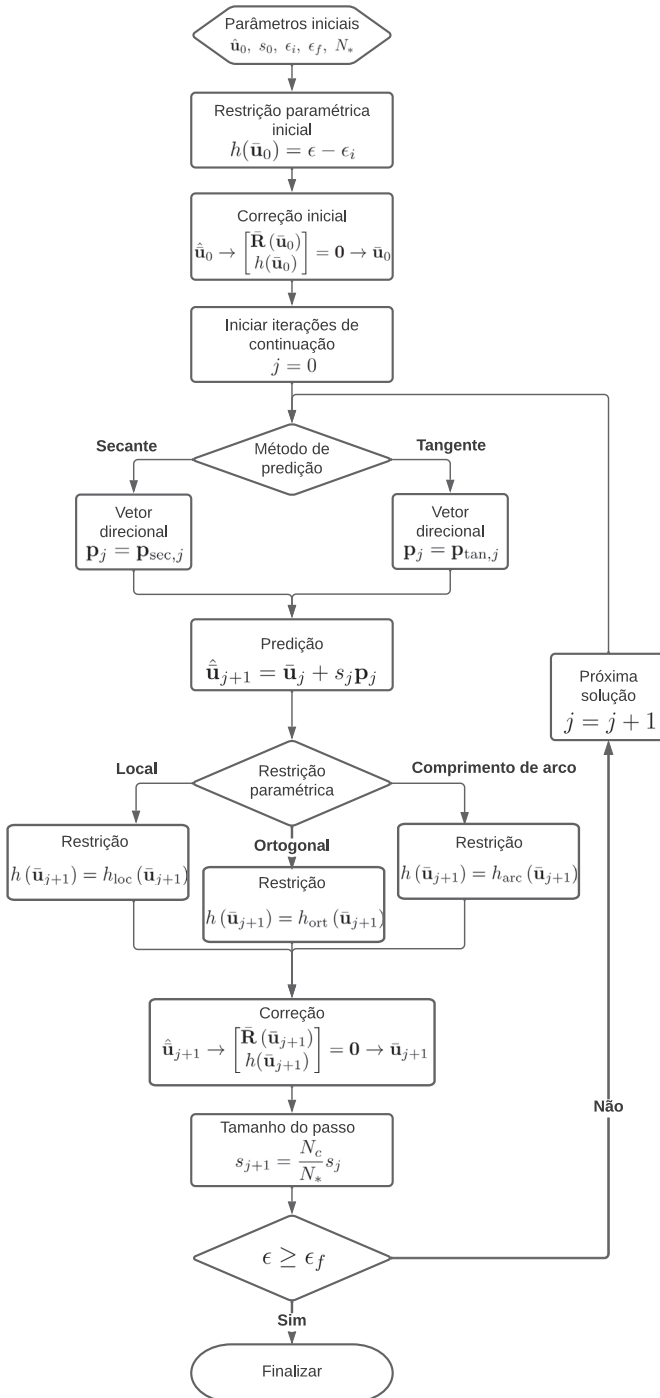
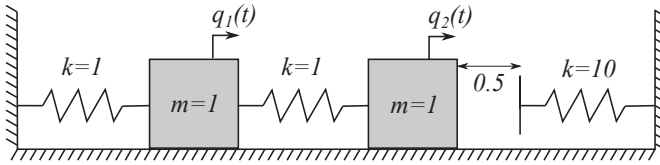
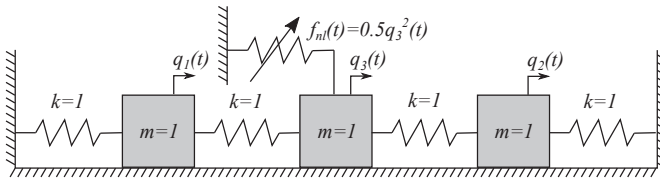


Figura 4.5: Principais etapas do algoritmo para computar os MNN.

2. Considere o sistema massa-mola de dois graus com uma mola unidirecional mostrado na figura abaixo e que já foi discutido no Exemplo 4 do capítulo 3.



- Calcule o primeiro MNN utilizando o método do tiro para um intervalo de energia mecânica igual a $[1e-3 \ 1e4]$. Mostre o Gráfico Frequência-Energia deste modo.
 - Calcule novamente o primeiro MNN para o mesmo intervalo de energia, mas utilizando desta vez o MBH. Qual o valor da ordem de truncamento H para que a solução atinja a convergência?
 - Repita os dois itens anteriores, considerando agora o segundo MNN.
 - Explique porque este sistema não apresenta uma ressonância interna.
3. Considere novamente o sistema massa-mola de três graus com uma mola cúbica, como mostrado na figura abaixo, e que já foi discutido no Exemplo 5 do capítulo 2 e no Exemplo 1 do capítulo 3.



- Calcule o primeiro MNN do sistema utilizando o MBH e considerando um intervalo de energia mecânica igual a $[1e-4 \ 5e3]$ para as soluções periódicas. Realize o cálculo considerando $H = 1, 3, 5$ e 7 . Mostre o Gráfico Frequência-Energia.
 - Mostre o Gráfico Frequência-Energia dos três MNN do sistema calculados utilizando o MBH e uma ordem de truncamento $H = 9$. Comente o resultado obtido.
4. Calcular os cinco MNNs do sistema mostrado na figura abaixo utilizando o método do tiro. Considere um intervalo de energia mecânica igual a $[1e-2 \ 1e4]$ para as soluções periódicas.

Capítulo 5

Aplicações dos MNN

Os modos normais não-lineares (MNNs) foram apresentados no capítulo 1 de acordo com a definição de Rosenberg (famílias de soluções periódicas de sistemas homogêneos e conservativos). As principais propriedades como a dependência energética dos modos, a possibilidade de instabilidade nas soluções periódicas e a interação entre modos foram brevemente apresentadas. Mostrou-se que o problema clássico de autovalor para o cálculo dos modos normais lineares (MNLs) não pode ser estendido a sistemas não-lineares, necessitando a utilização de um procedimento alternativo. Mostrou-se então que tanto os MNLs quanto os MNNs poderiam ser calculados através de um procedimento governado por um problema de valor de contorno periódico e que, devido a sua complexidade e custo computacional, a aplicação se restringe apenas ao caso não-linear.

Estratégias para buscar aproximações precisas das soluções dos problemas de valor de contorno periódico foram discutidas nos capítulos 2 e 3 através do método do balanço harmônico (MBH) e do método do tiro, respectivamente. Ambos correspondem a procedimentos numéricos que transformam o problema de valor de contorno periódico, composto pela equação diferencial que governa a dinâmica do sistema mais as restrições de periodicidade, em um problema puramente algébrico. No entanto, devido a dependência energética dos MNNs, as soluções periódicas aproximadas precisam ser avaliadas em diferentes níveis de energia a fim de se compreender a dinâmica do sistema globalmente. Para isso, incorporou-se a esses métodos um procedimento de continuação numérica através de um esquema de predição-correção, apresentado no capítulo 4. Como resultado, um algoritmo para o cálculo dos MNNs foi proposto.

Encerrado o estudo das ferramentas necessárias para o cálculo dos MNNs, este último capítulo busca apresentar algumas aplicações dos MNNs na análise dinâmica de sistemas mecânicos não-lineares. Mesmo sem o princípio de superposição modal para representar a dinâmica, os exemplos desse capítulo mostram a importância dos modos MNNs. Mostra-se aqui que fenômenos complexos e exclusivos da dinâmica não-linear podem ser previstos e explicados através dos MNNs. No total, três exemplos são apresentados

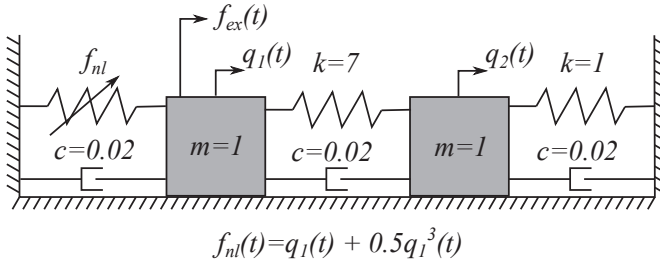


Figura 5.1: Sistema não-linear que ilustra as curvas de ressonância e a detecção e cálculo de isolas.

neste capítulo, cada um abordando uma aplicação diferente do MNNs.

5.1 Curva de ressonância

O primeiro exemplo consiste em mostrar que os MNNs podem ser vistos como curvas de ressonâncias dos sistemas não-lineares. Isso significa que os modos normais podem ser utilizados para prever as frequências de ressonância dos sistemas em diferentes níveis de energia. Grandes amplitudes de movimento podem ser esperados quando um sistema é excitado harmonicamente nas frequências de ressonância, o que pode acarretar em falhas no sistema tanto no ponto de vista de integridade estrutural quanto no ponto de vista de desempenho.

O problema de dinâmica discutido neste exemplo é ilustrado na Figura 5.1. A equação de movimento deste sistema corresponde a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.04 & -0.02 \\ -0.02 & 0.04 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5q_1^3(t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{nl}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_{ex}(t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{ex}(t)} \quad (5.1.1)$$

Considera-se aqui que o forçamento no primeiro grau de liberdade seja senoidal, isto é, $f_{ex}(t) = A \sin(\Omega t)$ e que tanto a frequência de forçamento Ω quanto a amplitude A sejam dados conhecidos.

Independente das condições iniciais impostas a esse sistema durante a construção de um problema de valor inicial, é esperado que as respostas do sistema atinjam um regime estacionário após um certo tempo. Isso ocorre porque a etapa transitória imposta pelas condições iniciais são dissipadas pelo sistema, deixando apenas a resposta estacionária causada pelo forçamento (neste caso periódica) do sistema. Diferentemente das respostas dos sistemas lineares, é possível a existência de diferentes respostas estacionárias para um mesmo forçamento harmônico. O que definirá para qual solução periódica o sistema irá convergir depende das condições iniciais. O conjunto de condições iniciais que resultam em uma mesma solução estacionária consiste

na base de atração desta solução.

Ao adicionar restrições de periodicidade na Eq. (5.1.1) cria-se um problema de valor de contorno periódico que governa as soluções periódicas do sistema. Aproximações das soluções podem ser obtidas através dos métodos já discutidos neste livro. Detalhes desse processo para esse problema em particular podem ser vistos em [72, 43]. Uma importante análise do problema de dinâmica imposto pela Eq. (5.1.1) consiste em avaliar todas as soluções periódicas considerando um valor variável para a frequência da excitação. Ao definir um intervalo de valores para a frequência de excitação, uma família de soluções periódicas pode ser encontrada através de um processo de continuação numérica, onde a frequência de excitação passa a ser, neste caso, o parâmetro livre do problema. A família de soluções periódicas para uma determinada amplitude de excitação pode ser utilizada para construir uma curva de resposta em frequência não-linear (CRFN). Nessa curva, algum escalar é extraído das soluções periódicas (por exemplo pico-a-pico, valor máximo, amplitude do primeiro harmônico, valor eficaz, etc.) e plotado em função da frequência de excitação. O cálculo desta curva pode ser então repetido para valores crescentes da amplitude de forçamento, o que permite visualizar o comportamento dinâmico do sistema com o aumento de energia. Através desta análise é possível ver a dependência energética do sistema, a quantidade de soluções periódicas existentes para uma dada excitação harmônica e os intervalos de frequência nos quais as soluções têm grande amplitude (região próxima à frequência de ressonância).

A Figura 5.2 mostra uma CRFN do sistema analisado neste exemplo considerando valores de $\Omega \in [3.6, 4.4]$ rad/s e $A = 1.23$. Nesta curva, as soluções periódicas do segundo grau de liberdade, $q_2(t)$, foram caracterizadas pelos respectivos valores eficazes (*root mean square* ou *RMS*). Nota-se que existem dois intervalos de Ω ($[3.60, 3.97[$ e $]4.14, 4.40]$ rad/s) em que apenas uma solução periódica foi encontrada e um intervalo ($[3.97, 4.14]$ rad/s) em que três soluções periódicas foram encontradas. Além disso, pode-se observar altos valores de RMS para Ω entre 3.8 e 4.14 rad/s, o que caracteriza a existência de uma frequência de ressonância neste intervalo. É possível perceber ainda que este pico no valor de RMS está inclinado para a direita, isto é, para os valores mais altos de frequência, o que caracteriza um comportamento de enrijecimento do sistema.

Seguindo os procedimentos apresentados nos capítulos 2, 3 e 4, os dois MNN deste mesmo sistema puderam ser calculados utilizando tanto o MBH quanto o método do tiro. Para isso, considerou-se para o cálculo o sistema associado onde a dissipação e o forçamento externo foram eliminados. Os modos foram calculados para níveis de energia mecânica do sistema dentro do intervalo $[10e - 3, 10e3]$. Como a dimensão deste sistema é pequena (dois graus de liberdade) e a não linearidade é simples (cúbica), o custo computacional para avaliar os dois MNNs foi baixo. Para o MBH, usou-se uma ordem de truncamento $H = 9$ e 128 amostras por período para avaliar os coeficientes de Fourier das forças não-lineares através do método

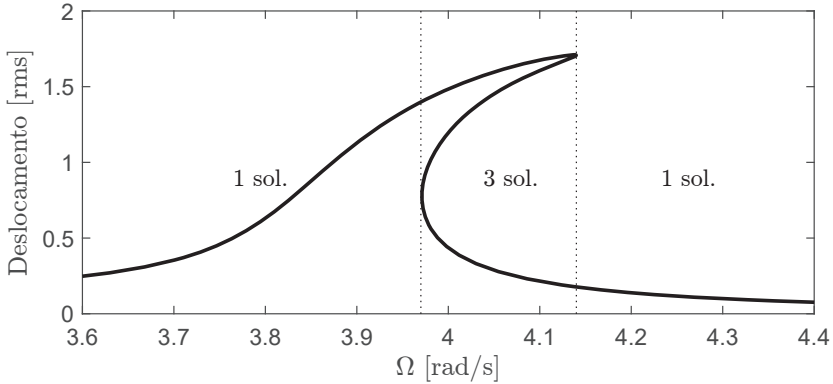


Figura 5.2: Representação de uma CRFN do sistema, destacando as regiões onde existem 1 e 3 soluções periódicas.

de alternância frequência-tempo (AFT). Em média, cada solução periódica foi aproximada em 1 milésimo de segundo. Para o método do tiro, a equação de movimento foi integrada ao longo de 128 amostras temporais. Em média, cada solução periódica foi aproximada em 5 milésimos de segundo. Em geral, quando a não-linearidade do sistema é suave (como no caso de uma não-linearidade cúbica), o MBH é, em geral, mais eficiente. No entanto, o MBH exige uma análise adicional de convergência para avaliar a ordem de truncamento do *Ansatz*.

Os gráficos de Frequência-Energia dos MNNs calculados são mostrados na Figura 5.3a, utilizando tanto o MBH quanto o método do tiro. Como esperado, é possível observar que os resultados foram aproximadamente os mesmos. Tanto o primeiro MNN quanto o segundo MNN apresentam um comportamento de enrijecimento, isso é, as frequências fundamentais das soluções periódicas aumentam com o aumento de energia no sistema. A Figura 5.3b mostra em detalhes quatro soluções periódicas calculadas ao longo do primeiro MNN, onde as curvas em azul correspondem ao deslocamento $q_1(t)$ e as curvas em vermelho o deslocamento $q_2(t)$. Nota-se que as soluções 1, 2 e 4 mostram os deslocamentos dos dois graus de liberdade em fase, enquanto a solução 3 mostra um movimento fora de fase e com uma frequência 3 vezes maior. Isso demonstra que a solução 3 está em uma língua de interação modal entre os dois modos em uma razão 3:1. Através das soluções 1, 2 e 4, é possível observar também uma tendência de localização das respostas no segundo grau de liberdade, uma vez que a curva em vermelho tende a aumentar sua amplitude em relação a curva em azul com o aumento de energia. Já a Figura 5.3c mostra em detalhes quatro soluções periódicas calculadas ao longo do segundo MNN. Neste caso, é possível observar a tendência de localização da solução no primeiro grau de liberdade, uma vez que a amplitude de deslocamento deste grau de liberdade cresce em relação ao outro

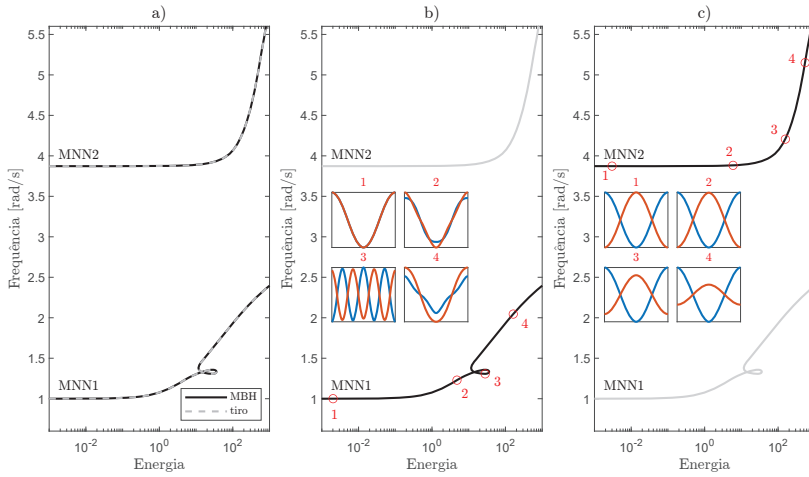


Figura 5.3: Diagramas de Frequência-Energia dos dois MNN do sistema. a) Comparação entre os MNN obtidos pelo MBH e pelo método do tiro. b) Soluções periódicas obtidas ao longo do diagrama do primeiro MNN. c) Soluções periódicas obtidas ao longo do diagrama do segundo MNN.

com o aumento de energia.

Tendo calculado os MNN do sistema, mostra-se agora que esses modos podem ser vistos como curvas de ressonância, ou espinha dorsal das CRFNs. Para isso, calcula-se os valores eficazes (RMS) das soluções periódicas que compõem os MNNs para cada grau de liberdade. Em seguida, calcula-se as CRFNs considerando diferentes amplitudes do forçamento externo, A . As Figuras 5.4a e 5.4b mostram as CRFN para diferentes níveis de excitação. A Figura 5.4a mostra o valor em RMS dos deslocamentos de $q_1(t)$ enquanto que a Figura 5.4b mostra o valor em RMS dos deslocamentos de $q_2(t)$. Em ambas as figuras, os valores de RMS das soluções periódicas que compõem os MNNs são mostradas pelas curvas pontilhadas em vermelho. Nota-se que estas curvas seguem a espinha dorsal dos picos de ressonância, mostrando assim o caminho das frequências de ressonância. A vantagem de se utilizar os MNNs para se obter essa informação se resume a necessidade de realizar apenas uma continuação numérica, enquanto através das CRFNs são necessários diversas continuações numéricas, uma para cada valor de amplitude de forçamento. Além disso, as CRFNs mostram informações já prevista pelos MNN, como por exemplo o fenômeno de localização das soluções. Ao comparar os picos próximos a 4 rad/s nas Figuras 5.4a e 5.4b, percebe-se que os valores de RMS dos deslocamento q_1 (Figura 5.4a) tendem sempre a crescer com o aumento da amplitude de forçamento, enquanto os valores de RMS dos deslocamento q_2 (Figura 5.4b) tendem a se estabilizar abaixo de 2. Além disso, os MNNs ajudam a entender fenômenos pouco intuitivos, como o formato não usual

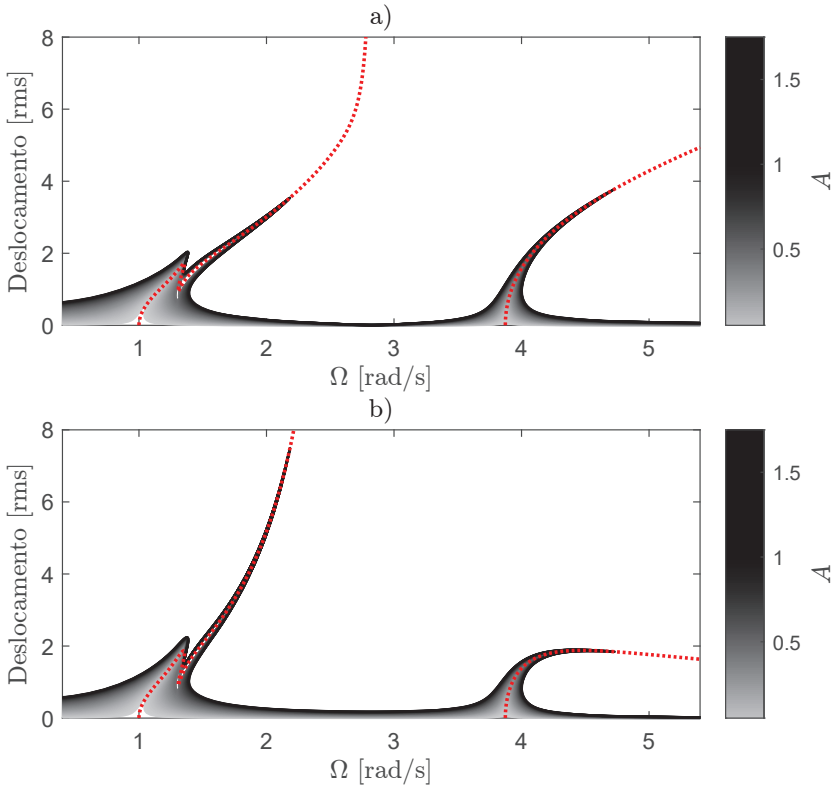


Figura 5.4: Curvas de resposta em frequência não-lineares (CRFN) do sistema para um forçamento senoidal no primeiro grau de liberdade com amplitudes entre 0.05 e 1.75. a) CRFN de q_1 . b) CRFN de q_2 .

do primeiro pico de ressonância. Nota-se que a quebra (queda de amplitude) do pico após um determinado nível de excitação ocorre pela presença de uma ressonância interna entre os dois modos. Uma importante consequência das ressonâncias internas dos MNN nas CRFN é o surgimento de isolas, que será mostrado em detalhes na próxima seção.

5.2 Detecção e cálculo de isolas

Sistemas não-lineares apresentam fenômenos dinâmicos complexos, cuja compreensão e detecção são difíceis de serem realizadas. A não identificação destes fenômenos pode resultar em respostas inesperadas e perigosas do sistema. Esta seção ilustra uma importante aplicação dos MNN quanto a detecção e quantificação de um desses fenômenos exclusivos da dinâmica não-linear.

Para ilustrar um comportamento dinâmico pouco intuitivo e perigoso,

considera-se novamente o sistema mecânico ilustrado pela Figura 5.1, cuja dinâmica é governada pela Eq. (5.1.1). Diferentemente da seção anterior, supõe-se agora que a excitação externa no primeiro grau de liberdade seja do tipo varredura de seno, isto é, uma função senoidal com amplitude constante e frequência variável no tempo. Considerando uma varredura linear de seno, a função de forçamento externo no sistema pode ser escrita através da equação

$$f_{ex} = A \sin \left(\Omega_i t + \frac{rt^2}{2} \right)$$

onde A é a amplitude do forçamento, Ω_i é a frequência inicial (em rad/s) da varredura e r é o incremento de frequência por segundo (em rad/s²). Assim, a frequência instantânea de excitação da varredura, $\Omega_v(t)$, pode ser definida em função do tempo a partir da equação

$$\Omega_v(t) = \Omega_i + \frac{rt}{2}$$

Considerando os valores dos parâmetros da varredura como sendo $A = 0.75$, $\Omega_i = 0.4$ rad/s e $r = 0.002$ rad/s², é possível integrar numericamente o problema de valor inicial composto pela Eq. (5.1.1) e condições iniciais nulas utilizando o integrador de Newmark. Utilizou-se como incremento de tempo $h = 0.02$ segundos e integrou-se o problema até o instante de tempo final $t = 1000$ s. Isso implica em uma varredura de seno cuja frequência instantânea de excitação varia linearmente com o tempo partindo de 0.4 rad/s indo até 2.4 rad/s. Considerando as CRFNs e os MNNs discutidos na seção anterior, sabe-se que a primeira frequência de ressonância do sistema (para este nível de excitação) está dentro deste intervalo de frequência. Repete-se então a mesma integração numérica da equação de movimento, no entanto considerando agora uma varredura de seno com $A = 0.85$, o que significa um pequeno incremento na amplitude de forçamento. Os resultados destas duas simulações são mostradas na Figura 5.5a em função do tempo, no qual a curva em cinza representa o deslocamento $q_2(t)$ no caso em que $A = 0.75$ e a curva em preto representa o deslocamento do mesmo grau de liberdade no caso em que $A = 0.85$. Na Figura 5.5b, o valor eficaz (RMS) desses deslocamentos são mostrados em função da frequência instantânea da varredura. A partir desses dois gráficos, é possível observar que até um valor aproximado de $t = 500$ segundos, ou equivalentemente até uma frequência instantânea de excitação igual a $\Omega_v(t) = 1.4$ rad/s, ambas as curvas têm um comportamento muito semelhantes, exceto por uma pequena diferença na amplitude graças à pequena diferença na amplitude do forçamento. No entanto, após esse instante de tempo, as curvas se divergem consideravelmente. A curva em cinza tem um rápido decaimento de amplitude, enquanto a curva em preto continua tendo um significativo crescimento de amplitude até $t \approx 800$ s ($\Omega_v(t) \approx 2$ rad/s), quando esta drasticamente se reduz.

No intuito de buscar uma explicação para este comportamento, inesperado e perigoso, as CRFNs do sistema para essas duas amplitudes de

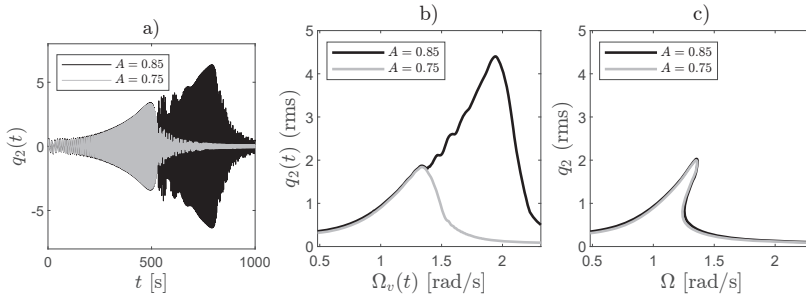


Figura 5.5: a) Resposta de q_2 para uma varredura de seno com amplitudes 0.75 e 0.85. b) Valor eficaz (rms) de q_2 ao longo da varredura. c) CRFN de q_2 para forças senoidais com amplitudes 0.75 e 0.85.

forçamento são mostradas na Figura 5.5c. Pode-se observar que o comportamento da simulação para $A = 0.75$ está dentro do esperado e semelhante a CRFN em cinza. No entanto, o comportamento obtido para a simulação com $A = 0.85$ é bastante diferente do esperado ao considerar a CRFN em preto. Essa imprevisibilidade de altas amplitudes na resposta do sistema quando $\Omega_v(t)$ está entre 1.4 e 2 rad/s pode ser muito prejudicial ao desempenho e integridade estrutural do sistema. Essa falta de previsibilidade do comportamento para $A = 0.85$ acontece porque as CRFN apresentadas estão incompletas. Um subconjunto de respostas periódicas isoladas do ramo principal desse sistema (as chamadas isolas) não foram computadas pelo procedimento de continuação numérica utilizado no cálculo das CRFN. A Figura 5.6 mostra a CRFN completa para o caso em que $A = 0.85$, onde é possível ver um curva de soluções completamente isoladas do ramo principal de soluções, isto é, uma isola deste sistema. O cálculo e a detecção de isolas não é uma tarefa simples, mas pode ser facilmente realizada conhecendo os MNN do sistema.

Esse procedimento de detecção e cálculo de isolas a partir dos MNN será mostrado a seguir, e se adequa a metodologia proposta inicialmente por Kuether et al. [37]. Para isso, duas técnicas utilizadas em sistemas lineares precisam ser estendidas para sistemas não-lineares. São elas a apropriação de força [74, 55, 49, 50, 15, 75] e o balanço de energia [2, 28, 29]. Ambas técnicas buscam estabelecer uma relação entre as soluções periódicas que compõem os MNNs e as soluções periódicas que compõem as CRFNs.

5.2.1 Apropriação de força

A apropriação de força é um método também conhecida como sintonização de modos normais e utiliza uma excitação capaz de fazer o sistema vibrar de acordo com um dos seus modos normais. A idéia do método consiste em aplicar forças em diferentes graus de liberdade que compensem as forças de

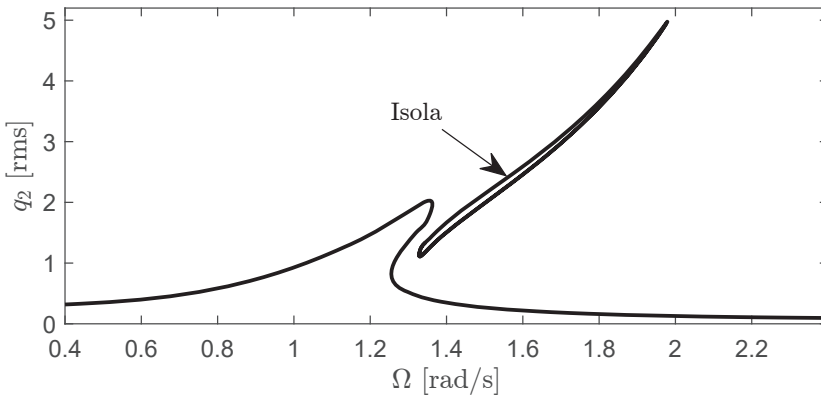


Figura 5.6: Representação gráfica de uma isola em uma CRFN.

dissipação do sistema, permitindo um movimento do sistema de acordo com um dos seus modos normais. Para sistemas lineares, apenas forças senoidais de diferentes amplitudes e aplicadas em diferentes graus de liberdade são necessárias. Uma apropriação de força é dita perfeita quando os graus de liberdade estão vibrando de forma síncrona e defasada (atrasada) por $\pi/2$ rad em relação a excitação. Os autores em [74] fornecem uma revisão detalhada sobre diferentes métodos de apropriação de força utilizados em análise modal experimental [16, 40].

A primeira extensão da técnica de apropriação de força para sistemas não-lineares foi proposta por Atkins et al. [4] através de um método conhecido como FANS. Nesta extensão, o sistema é excitado em diferentes graus de liberdade através de forças periódicas (contendo harmônicos de ordem mais alta) a fim de conseguir compensar as forças não-lineares existentes no sistema e, desta forma, fazendo com que o sistema vibre de acordo com um dos seus MNL. Peeters et al. [49] propuseram uma metodologia diferente para a apropriação de força em que o movimento de um MNN é induzido ao sistema através de forças periódicas (contendo harmônicos de ordem elevada) em diferentes graus de liberdade. As forças aplicadas se contrapõem então às forças de dissipação e impõem um movimento de um dos MNNs no sistema. Uma generalização do critério de defasagem entre a resposta e a excitação é utilizada para sintonizar o movimento de um MNN e validar a apropriação de forças. É definido que um sistema está vibrando em um dos seus MNNs quando todos os harmônicos da resposta do sistema estão atrasadas em $\pi/2$ rad em relação aos respectivos harmônicos do forçamento. Esse método é discutido em detalhes a seguir.

Vamos supor que $\mathbf{q}_\epsilon(t)$ seja uma solução periódica que compõe um determinado MNN do sistema em um nível de energia ϵ . Essa resposta pode ser então imposta à equação de movimento, o que resulta para este exemplo

em

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_\epsilon(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_\epsilon(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}_\epsilon(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}_\epsilon(t)) = \mathbf{f}_{ap}(t), \quad (5.2.2)$$

onde $\mathbf{f}_{ap}(t)$ é um forçamento externo específico que precisa ser imposto ao sistema para satisfazer a Eq. (5.2.2). Ele permite que o sistema vibre de acordo com uma solução periódica que compõem um MNN, o que significa que $\mathbf{f}_{ap}(t)$ é o forçamento que garante uma perfeita apropriação. Para calcular esse forçamento específico, a definição de Rosenberg para os MNN pode ser utilizada, o que significa que $\mathbf{q}_\epsilon(t)$ satisfaz a seguinte equação

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_\epsilon(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}_\epsilon(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}_\epsilon(t)) = \mathbf{0}. \quad (5.2.3)$$

Subtraindo a Eq. (5.2.3) da Eq. (5.2.2), obtêm-se como resultado

$$\mathbf{f}_{ap}(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_\epsilon(t), \quad (5.2.4)$$

o que mostra que o forçamento externo imposto para obter um movimento periódico que pertence a um MNN é o produto da matriz de amortecimento de sistema e do vetor de velocidade da solução periódica. Um importante resultado da Eq. (5.2.4) é mostrar que a força \mathbf{f}_{ap} precisar ser aplicada em todos os graus de liberdade do sistema, o que experimentalmente é impossível.

Escreve-se agora a resposta periódica $\mathbf{q}_\epsilon(t)$ em uma série de Fourier:

$$\mathbf{q}_\epsilon(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \tilde{\mathbf{q}}_{\epsilon,k}^{(e)} e^{ik\Omega t}. \quad (5.2.5)$$

onde $\tilde{\mathbf{q}}_{\epsilon,k}$ representa o k -ésimo coeficiente de Fourier de $\mathbf{q}_\epsilon(t)$ e Ω é a respectiva frequência fundamental da solução periódica. Substituindo a Eq. (5.2.5) na Eq. (5.2.4), obtêm-se

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ap}(t) &= \mathbf{C} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \tilde{\mathbf{q}}_{\epsilon,k} e^{ik\Omega t} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \underbrace{ik\Omega \mathbf{C} \tilde{\mathbf{q}}_{\epsilon,k}}_{\tilde{\mathbf{f}}_{ap,k}} e^{ik\Omega t}, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

onde $\tilde{\mathbf{f}}_{ap,k}$ é o k -ésimo coeficiente de Fourier da força necessária para a apropriação. Reescreve-se agora os coeficiente de Fourier da solução periódica evidenciando as respectivas amplitudes e fases, isto é:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\epsilon,k} = |\tilde{\mathbf{q}}_{\epsilon,k}| e^{i\theta_k}, \quad (5.2.7)$$

onde θ_k é a respectiva fase de $\tilde{\mathbf{q}}_{N,k}$. Substituindo a Eq. (5.2.7) na Eq. (5.2.6), é possível escrever os coeficientes de Fourier do forçamento de apropriação

como sendo

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{ap,k} &= \mathbf{i}k\Omega\mathbf{C}\tilde{\mathbf{q}}_{N,k} \\ &= \mathbf{i}k\Omega\mathbf{C}|\tilde{\mathbf{q}}_{N,k}|e^{\mathbf{i}\theta_k} \\ &= \underbrace{k\Omega\mathbf{C}|\tilde{\mathbf{q}}_{N,k}|}_{|\tilde{f}_{ap,k}|}e^{\mathbf{i}(v_k+\frac{\pi}{2})}\end{aligned}$$

A equação acima mostra que, para um perfeita apropriação de força, cada coeficiente de Fourier do forçamento precisa estar $\pi/2$ rad adiantado em relação ao correspondente coeficiente de Fourier da solução periódica do MNN. Esse critério ajuda a definir quando a apropriação de força foi alcançada.

Uma perfeita apropriação de força é improvável de se obter experimentalmente uma vez que ela exige forçamentos em todos os graus de liberdade do sistema. No entanto, algumas pesquisas recentes [49, 50, 15, 75] mostraram que um forçamento simplificado (com poucos pontos de excitação) podem gerar resultados muito próximos dos desejados. Peeters et al. [49, 50] utilizaram o forçamento senoidal em apenas um grau de liberdade em um sistema com baixo amortecimento. Bons resultados numéricos e experimentais foram obtidos, mostrando uma primeira possível relação entre as soluções periódicas dos MNNs com as soluções periódicas das CRFNs. Essa conexão é explorada adiante no cálculo de isolas.

5.2.2 Balanço de energia

Busca-se nessa seção estabelecer mais uma relação entre as soluções periódicas que compõem os MNNs com as que compõem as CRFNs. Desta vez, a relação é definida considerando o balanço de energia ao longo de um período de oscilação. Essa relação permite estimar a amplitude do forçamento externo necessário para que o sistema vibre em um dos seus MNN sob a perspectiva energética.

Supõe-se nessa seção que a energia adicionada ao sistema pelo forçamento externo é igual, ao final de uma oscilação, a energia dissipada pelo amortecimento do sistema. Para os sistemas mecânicos considerados aqui, a energia adicionada ao sistema, ao longo de uma oscilação, é definida por

$$E_{\text{in}} = \int_0^T \dot{\mathbf{q}}(t)^T \mathbf{f}_{ex}(t) dt$$

De forma similar, a energia dissipada pelo amortecimento do sistema, ao longo de uma oscilação, é definida por

$$E_{\text{out}} = \int_0^T \dot{\mathbf{q}}(t)^T \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) dt.$$

Considera-se então o caso de perfeita apropriação de força, de forma que $\mathbf{f}_{ex}(t) = \mathbf{f}_{ap}(t)$ e $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_e(t)$. Um equação de balanço de energia pode ser

então escrita como

$$E_{\text{in}} = \int_0^T \dot{\mathbf{q}}_\epsilon(t)^T \mathbf{f}_{\text{ap}}(t) dt = \int_0^T \dot{\mathbf{q}}_\epsilon(t)^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_\epsilon(t) dt = E_{\text{out}}.$$

Como discutido anteriormente, uma perfeita apropriação de força não é possível experimentalmente uma vez que seria necessário excitações em todos os graus de liberdade. Considerando o caso simplificado de um forçamento de apropriação aproximado aplicado em apenas um grau de liberdade e de forma senoidal, a expressão de energia adicionada ao sistema pode ser escrita como

$$E_{\text{in}} = \int_0^T \dot{\mathbf{q}}(t)^T [A \mathbf{e}_i \cos(\omega t)] dt,$$

onde A é a amplitude do forçamento e $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de zeros em todas as entradas, exceto a i -ésima que é um. Esse vetor \mathbf{e}_i é responsável por definir em qual grau de liberdade o forçamento de apropriação (aproximado) é aplicado. Ao impor que a frequência de forçamento é igual a frequência fundamental de um MNN em um dado nível de energia, e que a apropriação de força utilizando uma função senoidal em apenas um grau de liberdade foi próxima o suficiente, uma estimativa da amplitude de forçamento necessária para gerar um movimento próximo do MNN pode ser obtida através do balanço de energia, que resulta em:

$$A \approx \frac{\int_0^T \dot{\mathbf{q}}_\epsilon(t)^T \mathbf{e}_i \cos(\Omega t) dt}{\int_0^T \dot{\mathbf{q}}_\epsilon(t)^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_\epsilon(t) dt} \quad (5.2.8)$$

A Eq. (5.2.8) é apenas uma aproximação porque uma perfeita apropriação de força é dificilmente obtida utilizando apenas um forçamento senoidal e em apenas um grau de liberdade do sistema. No entanto, desde que o movimento resultante deste forçamento seja próximo o bastante da solução periódica que compõe um MNN, a aproximação é suficientemente boa para detectar e calcular as isolas.

5.2.3 Procedimento de cálculo

Uma vez apresentado os conceitos que envolvem a apropriação de força e balanço de energia, pode-se estabelecer agora um procedimento para calcular as isolas de um sistema. Para isso, utilizaremos o sistema ilustrado na Figura 5.1, cuja equação de movimento é dada pela Eq. (5.1.1). O ponto de partida para a detecção e cálculo das isolas são os MNNs do sistema, que foram calculados na seção anterior utilizando tanto o MBH quanto o método do tiro. Focaremos apenas no primeiro MNN do sistema, uma vez que este é o modo que apresenta uma ressonância interna, condição para gerar uma nítida isola.

Supõe-se então que as soluções periódicas (para diferentes níveis de energia) que compõem o primeiro MNN sejam conhecidas. Através da Eq.

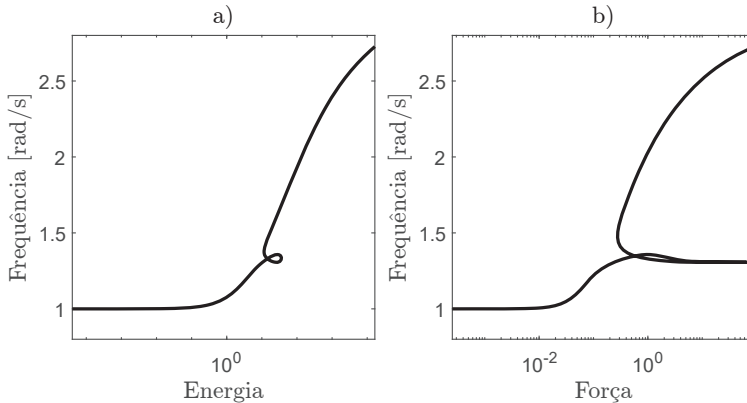


Figura 5.7: a) Diagrama Freqüência-Energia do primeiro MNN do sistema. b) Cálculo das forças para uma apropriação aproximada através de uma força pontual e senoidal.

(5.2.8), é possível avaliar qual seriam as amplitudes de um forçamento senoidal aplicada no primeiro grau de liberdade que resultariam em movimentos próximos às soluções periódicas do MNN. Para cada solução periódica do MNN é possível calcular a amplitude A correspondente pela Eq. (5.2.8). O resultado deste processo é mostrado na Figura 5.7. Na Figura 5.7a, as soluções periódicas do primeiro MNN são representadas pelo diagrama Freqüência-Energia. Para cada ponto neste gráfico, foi calculada a amplitude A de força senoidal que resultaria em uma boa aproximação do resultado. Dessa forma, pode-se construir o diagrama Freqüência-Amplitude mostrado na Figura 5.7b.

Uma importante observação a ser feita em relação a Figura 5.7b é o fato de existirem amplitudes de forçamento capazes de gerar soluções com diferentes freqüências fundamentais (neste caso diferentes freqüência de ressonância). Neste exemplo, isso ocorre para valores de A maiores que aproximadamente 0.3. Esse é o principal indício da existência de uma isola, uma vez que cada freqüência de ressonância deve estar simultaneamente posicionada na espinha dorsal (curva de ressonância) e em um pico da CRFN. Com a existência de uma isola, dois novos picos (um inferior e outro superior) são adicionados a CRFN e são atravessados pela curva de ressonância (pelo MNN). A Figura 5.8a mostra as três freqüências de ressonância (1.33, 1.38 e 1.64 rad/s) relacionadas a uma excitação com amplitude $A = 0.35$ (um círculo, uma estrela e um quadrado em vermelho, respectivamente). Cada uma dessas freqüência está associada a um movimento periódico definido pelo MNN que pode ser marcado na curva de ressonância (espinha dorsal) sobreposta a CRFN para $A = 0.35$, como mostrado Figura 5.8b. Pode-se observar que um desses pontos (o círculo) se encontra perto do pico do ramo

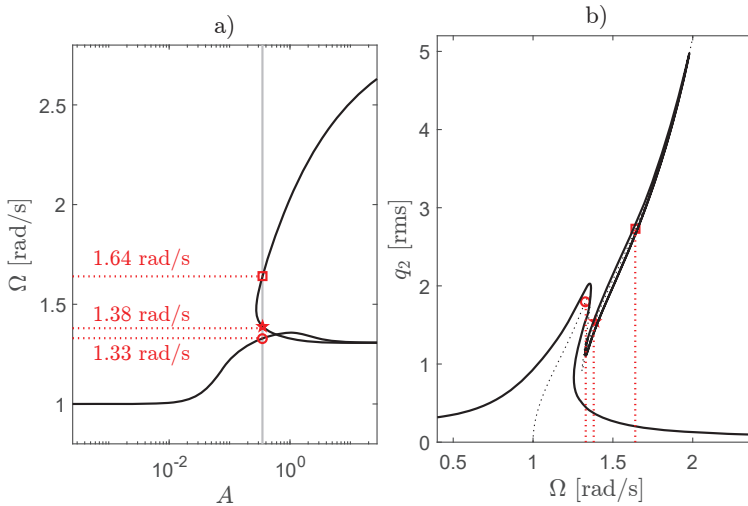


Figura 5.8: a) Identificação de 3 frequências de ressonância para uma amplitude de forçamento $A = 0.35$. b) Localização das soluções periódicas desses 3 pontos ao longo da curva de ressonância.

principal da CRFN. Já os outros dois pontos (a estrela e o quadrado) se encontram próximos da isola. Idealmente, esses pontos deveriam estar próximo as extremidades da isola, as respectivas frequências de ressonância, mas isso não aconteceu nesse exemplo. Algumas suposições feitas no desenvolvimento explicam esse erro: primeiro, a curva de ressonância (MNN) foi calculado para um sistema conservativo, enquanto as CRFNs foram calculadas considerando o sistema com a dissipação. Além disso, as amplitudes de forçamento A mostradas no gráfico da Figura 5.8a forma calculadas utilizando a Eq. (5.2.8), que estima a amplitude de uma apropriação de força simplificado (senoidal em apenas um grau de liberdade do sistema). De qualquer forma, sendo esses dois pontos (estrela e quadrado) próximos o suficiente da isola, as soluções periódicas que eles representam podem ser utilizados como boas propostas iniciais de solução da Eq. (5.1.1) com um forçamento senoidal de $A = 0.35$ e frequências 1.38 e 1.64, respectivamente. Vale ressaltar que ao definir essas soluções como propostas iniciais de solução para a Eq. (5.1.1), elas devem estar defasadas em $\pi/2$ rad do forçamento.

Supondo que pelo menos uma solução periódica da isola tenha sido obtida pelo procedimento descrito acima, a isola como um todo pode ser então calculada através do procedimento padrão de continuação numérica. Isso foi realizado para amplitudes de forçamento variando entre $A = 0.05$ e $A = 1.15$. Os resultados são mostrados na Figura 5.9. Uma isola foi detectada e calculada para os forçamentos com $A > 0.3$. Essa isola cresceu continuamente com o aumento da amplitude de forçamento até se fundir com o ramo principal

da CRFN em aproximadamente $A = 1$.

5.3 Transmissão irreversível de energia

Um último exemplo de aplicação dos MNN na interpretação da dinâmica de sistemas não lineares consiste em mostrar como esses modos podem ser utilizados para prever e compreender um complexo fenômeno de transmissão irreversível de energia, também conhecido como bombeamento de energia. Esse interessante fenômeno só acontece em sistemas não-lineares e podem ser explicados de forma simples através dos MNNs.

Considera-se inicialmente os três sistemas mostrados na Figura 5.10. O primeiro sistema consiste em um simples oscilador linear, enquanto que o segundo representa um oscilador de Duffing com uma mola cúbica. O terceiro sistema consiste na conexão entre esses dois osciladores através de uma mola com baixa rigidez, o que significa que o acoplamento entre os dois subsistemas é fraco. Este terceiro sistema foi analisado em detalhes nos artigos [19, 70]. As equações de movimento desses três sistemas são:

- Sistema 1

$$\ddot{q}(t) + 0.05\dot{q} + q(t) = 0 \quad (5.3.9)$$

- Sistema 2

$$\ddot{q}(t) + 0.05\dot{q} + 0.1q(t) + 5q^3(t) = 0 \quad (5.3.10)$$

- Sistema 3

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 5q_2^3(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{nl}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}} \quad (5.3.11)$$

Para ilustrar o fenômeno de bombeamento irreversível de energia, considera-se primeiro o problema de valor inicial composto pela Eq. (5.3.11) mais as condições iniciais $\mathbf{q}(0) = [0 \ 0]^T$ e $\dot{\mathbf{q}}(t) = [\Gamma \ 0]^T$, onde $\Gamma \in \mathbb{R}$. Essa específica condição inicial representa um impacto aplicado no primeiro grau de liberdade com energia Γ . Considera-se primeiro a resposta do sistema para o caso em que $\Gamma = 0.6$. A Figura 5.11a mostra o resultado da integração numérica desse problema para $t \in [0, 200]$ segundos. Nota-se que a amplitude do deslocamento q_1 é substancialmente maior que a amplitude do deslocamento q_2 durante todo período de integração, uma vez que esse foi o grau de liberdade que recebeu o impacto inicial, e dado o fato que acoplamento entre os osciladores é fraco. O decaimento na amplitude de q_1 ocorre devagar e respeitando um decaimento exponencial. O deslocamento q_1 se assemelha a vibração livre do oscilador linear representado pelo sistema 1, caso este fosse exposto a mesmo impacto. Esse comportamento dinâmico do sistema

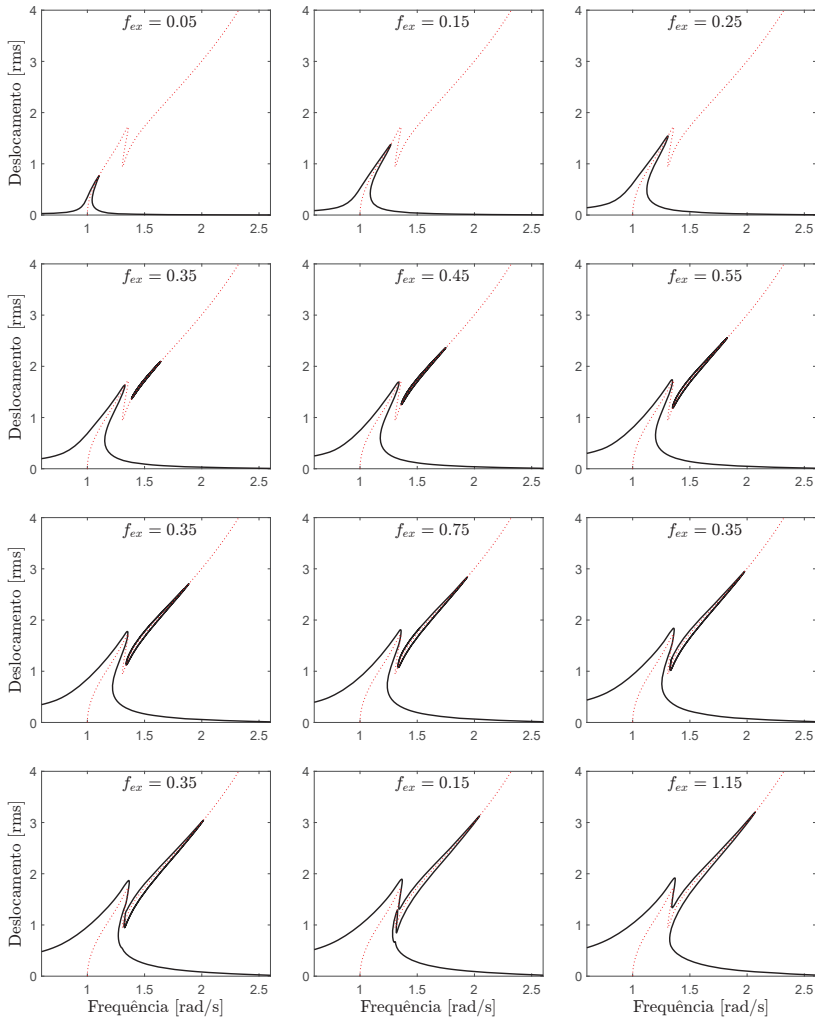


Figura 5.9: Cálculo da CRFN considerando a possibilidade de isolas para diferentes amplitudes de forçamento.

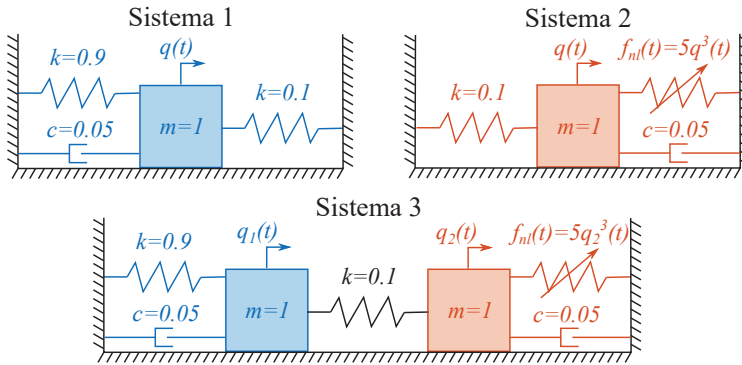


Figura 5.10: Três sistemas utilizados para estudar o fenômeno de transferência irreversível de energia.

3 é obtido para todas as simulações em que Γ é menor que 0.7. No entanto, a partir de valores maiores, um comportamento dinâmico de bombeamento de energia é observado. A Figura 5.11b mostra o resultado da integração numérica para $\Gamma = 0.72$. Neste caso, a amplitude do deslocamento q_1 sofre uma rápida redução enquanto a amplitude do deslocamento q_2 passa a crescer e ser superior ao longo de todo período de integração. Pode-se então afirmar que a energia aplicada inicialmente pelo impacto no primeiro grau de liberdade foi transferida de forma irreversível ao segundo grau de liberdade.

Buscando uma melhor interpretação desses resultados, as transformadas de Wavelet dos sinais de q_1 e q_2 para o caso em que Γ é igual a 0.6 são mostradas nas Figuras 5.11c e 5.11e, respectivamente. As transformadas de Wavelet para o caso em que Γ é igual a 0.72 são mostradas nas Figuras 5.11d e 5.11f. Essas transformadas possibilitam avaliar as composições espectrais de sinais ao longo do tempo, o que é indicado para sinais transientes como essas respostas ao impulso. Embora esses resultados sejam coerentes com as respostas temporais mostradas nas Figuras 5.11a e 5.11b, esses resultados não ajudam a entender a causa do fenômeno de bombeamento de energia.

Esse comportamento pouco intuitivo será interpretado a seguir através dos MNNs. Avalia-se primeiro os modos dos osciladores desacoplados (sistemas 1 e 2) e depois do sistema com os osciladores acoplados (sistema 3). Os resultados são mostrados na Figura 5.12a através de diagramas de Frequência-Energia. Como esperado, a frequência fundamental do modo relacionado ao sistema 1 é constante, uma vez que ele corresponde a um oscilador linear, cujas propriedades modais não são dependentes da energia no sistema. A frequência natural deste primeiro oscilador é 1 rad/s ($\sqrt{1/1}$).

Diferentemente, o sistema 2 apresenta um comportamento de enrijecimento graças a sua mola cúbica. Isso pode ser visto através do rápido crescimento da frequência fundamental de oscilação a medida que a energia no sistema aumenta. Para baixos níveis de energia, o sistema 2 pode

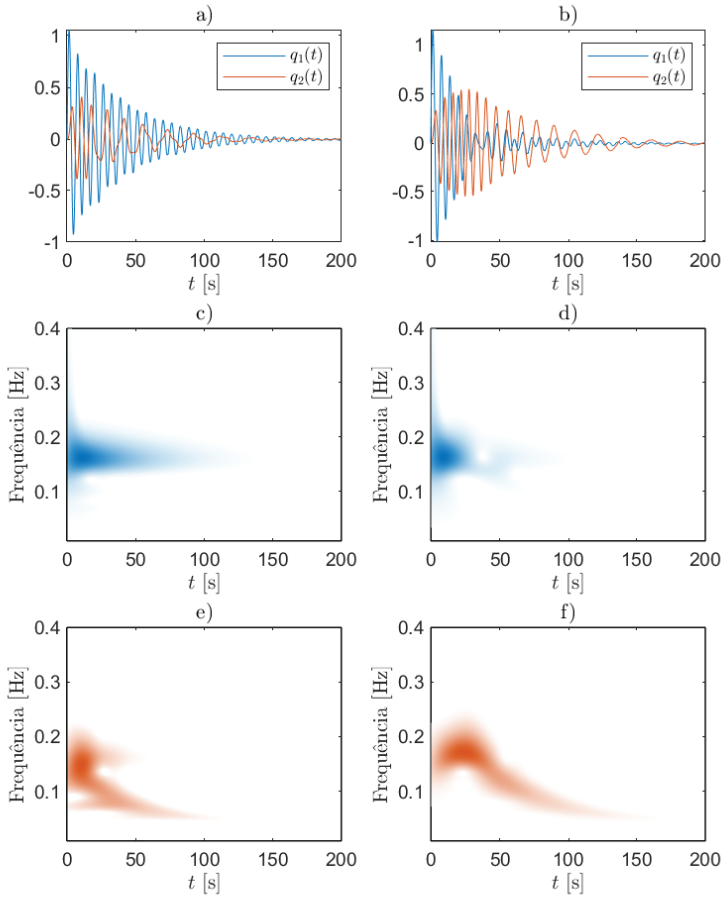


Figura 5.11: a) Resposta temporal do sistema para $\Gamma = 0.6$. b) Resposta temporal do sistema para $\Gamma = 0.72$. c) Transformação de Wavelet de $q_1(t)$ para $\Gamma = 0.6$. d) Transformação de Wavelet de $q_1(t)$ para $\Gamma = 0.72$. e) Transformação de Wavelet de $q_2(t)$ para $\Gamma = 0.6$. f) Transformação de Wavelet de $q_2(t)$ para $\Gamma = 0.72$.

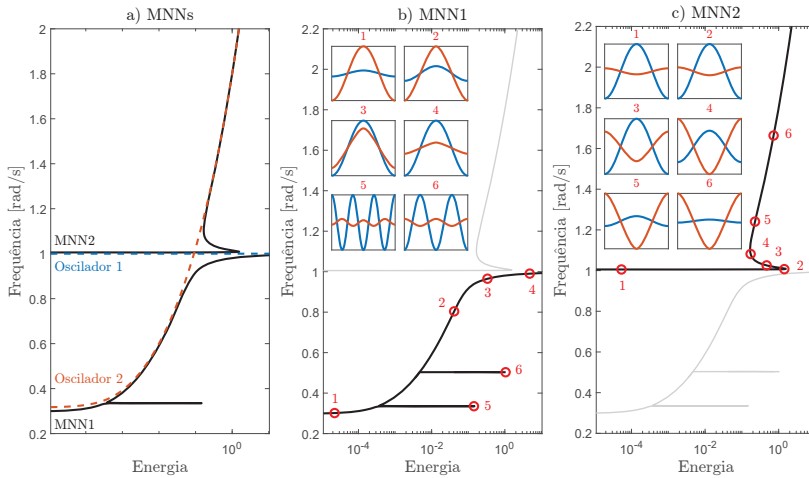


Figura 5.12: Modos normais do sistema com bombeamento de energia. a) Gráfico Frequência-Energia dos três sistemas analisados. b) Gráfico Frequência-Energia do primeiro MNN do sistema 3 com respectivas soluções periódicas. c) Gráfico Frequência-Energia do segundo MNN do sistema 3 com respectivas soluções periódicas.

ser linearizado, o que resultaria em uma frequência natural do sistema igual a $\sqrt{0.1}$ rad/s ($\sqrt{0.1/I}$), menor que a frequência natural do sistema 1. A Figura 5.12a também traz os resultados para os dois MNN do sistema acoplado (sistema 3). É possível ver que esses modos seguem as tendências dos modos dos sistemas desacoplados.

A Figura 5.12b mostra detalhes do primeiro MNN do sistema 3, onde 6 soluções periódicas que compõem este modo são mostradas e marcadas ao longo do diagrama Frequência-Energia com círculos vermelhos. é possível observar que, em baixos níveis de energia, a frequência fundamental desse primeiro MNN se aproxima da frequência fundamental do sistema 2 (oscilador de Duffing). No entanto, a medida que a energia aumenta, a frequência fundamental do modo se aproxima de 1 rad/s e depois tende a se manter constante nesse valor, em um comportamento semelhante ao do sistema 1 (oscilador linear). As soluções periódicas 1 e 2 mostram que esse primeiro MNN tem sua energia localizada no segundo grau de liberdade, o grau de liberdade em que a mola cubica está conectada. A medida que a energia do modo aumenta, existe uma troca na localização da resposta do modo, passando de maiores amplitudes no deslocamento do segundo grau de liberdade (curva em vermelho) para maiores amplitudes no deslocamento do primeiro grau de liberdade (curva em azul). Essa transição de localização da resposta é ilustrada pelas soluções periódicas 1-4. Observa-se que na solução periódica 3, as amplitudes de oscilação dos dois graus de liberdade são apro-

ximadamente iguais, enquanto na solução periódica 4, o deslocamento do primeiro grau de liberdade já é significativamente maior que o do segundo, o que significa que a mudança de localização já aconteceu. Uma característica importante dessas quatro soluções periódicas é o fato dos dois deslocamentos estarem sempre em fase. é possível observar também o surgimento de duas línguas de interação neste modo, uma na razão 3:1 e outra na razão 2:1. Essas duas interações modais são mostradas através das soluções periódicas 5 e 6, respectivamente.

A Figura 5.12c mostra detalhes do segundo MNN do sistema 3, onde novamente 6 soluções periódicas que compõem este modo são mostradas e marcadas no diagrama Frequência-Energia por círculos vermelhos. Percebe-se que, para pequenas e médias energias, o sistema se comporta como o oscilador linear, cuja frequência fundamental é constante e com valor aproximadamente igual a 1 rad/s, e o movimento está localizado no primeiro grau de liberdade (o oscilador linear). Isso pode ser visto através das soluções periódicas 1 e 2. No ponto referente a solução 2, ocorre um ponto de retorno no diagrama, no qual durante a redução de energia há uma gradual troca na localização das soluções. A solução representada pelo ponto 4 é novamente um ponto de retorno do diagrama, onde a energia das soluções voltam a crescer, no entanto agora com o movimento do modo localizado no segundo grau de liberdade. Essa etapa final do segundo MNN o diagrama Frequência-Energia se assemelha ao diagrama do oscilador de Duffing. Para todas as soluções periódicas desse segundo MNN, os deslocamentos dos dois graus de liberdade estão sempre defasados por π rad.

Retorna-se agora às respostas ao impulso com $\Gamma = 0.6$ e $\Gamma = 0.72$. Em ambos os casos, é possível avaliar a energia mecânica do sistema ao longo do tempo. Dada a presença de dissipação no sistema, a energia mecânica decai monotonicamente a partir do instante em que o impacto é aplicado. Dessa forma, é possível mostrar novamente os resultados das transformadas de Wavelet apresentados nas Figuras 5.11c-f, substituindo agora a variável tempo por energia, uma vez que esse mapeamento é conhecido. Esse tipo de análise foi feita por Lee et al. [39] e por Peeter [48, 49]. Essa nova representação das transformadas de Wavelet são mostradas nas Figuras 5.13a-d, onde os diagramas Frequência-Energia dos MNNs foram sobrepostos aos resultados. As Figuras 5.13a e 5.13b mostram os resultados de q_1 e q_2 para $\Gamma = 0.6$, respectivamente, enquanto as Figuras 5.13c e 5.13d mostram os resultados de q_1 e q_2 para $\Gamma = 0.72$, respectivamente. Ao comparar esses resultados, percebe-se que a resposta para $\Gamma = 0.72$ se concentrou ao redor dos MNNs, principalmente ao redor do primeiro MNN. é notável que para esse intervalo de energia, as soluções periódicas do primeiro MNN mostram um aumento da amplitude de q_2 em relação a q_1 a medida que a energia mecânica do sistema decresce. Esse é exatamente o comportamento observado durante o bombeamento de energia. Diz-se então que no bombeamento de energia (transferência irreversível de energia) houve uma captura de ressonância do primeiro MNN através da excitação por impacto com $\Gamma = 0.72$ [70]. A cap-

tura poderia ser mais eficiente caso as condições iniciais do sistema fossem o estado inicial de uma solução periódica desse MNN.

Para analisar em detalhes a captura de ressonância obtida durante o bombeamento de energia, a resposta temporal do sistema é segmentada em quatro trechos, conforme mostrado na Figura 5.14a. No primeiro trecho, os deslocamentos entre os graus de liberdade estão defasados por π rad, o que representa um movimento compatível ao segundo MNN. Como durante esse trecho a amplitude de q_2 cresce em relação a q_1 com a redução de energia, o único trecho do segundo MNN em que isso acontece está marcado em preto na Figura 5.14f. Isso pode ser confirmado analisando as soluções periódicas 2-4 na Figura 5.12c. A solução periódica marcada com um círculo vermelho no trecho 1 da Figura 5.14f é mostrado na Figura 5.14b. Comparando essa solução periódica com os deslocamento no trecho 1 da Figura 5.14a, é possível afirmar que o sistema vibrava próximo a esse segundo MNN. Após percorrer todo o trecho 1 do diagrama Frequência-Energia (trecho onde existe um bombeamento de energia), o diagrama chega em um ponto de retorno e não é mais possível reduzir a energia seguindo este movimento. Há então uma troca de energia entre o segundo e o primeiro MNN. Pode-se concluir isso observando que os deslocamentos dos graus de liberdade estão em fase neste trecho, uma característica exclusiva do primeiro MNN. As soluções periódicas do primeiro MNN em que os graus de liberdade estão vibrando em fase, com essa frequência e com essa razão de amplitude entre q_1 e q_2 está mostrado na Figura 5.14f. A solução periódica marcada por um círculo vermelho neste segundo trecho do diagrama é mostrado na Figura 5.14c. Seguindo a resposta ao impulso na Figura 5.14a, observa-se que o trecho 3 mostra cada grau de liberdade vibrando com uma diferente frequência predominante. É possível notar que q_1 vibra com uma amplitude inferior a q_2 e com uma frequência duas vezes maior. Conclui-se então que o sistema está vibrando de acordo com o movimento previsto na língua de interação modal 2:1. Esse trecho é marcado na Figura 5.14f, e a solução periódica representada por um círculo vermelho no diagrama é mostrada na Figura 5.14d. A resposta do sistema ao impulso muda então sua dinâmica, passando a vibrar de acordo com o trecho 4, o que representa uma transição da língua de interação 2:1 para a língua de interação 3:1. é possível ver que neste trecho o deslocamento q_1 vibra predominantemente com uma frequência três vezes maior que a frequência na qual q_2 vibra. Esse mesmo comportamento é observado pela solução periódica da língua de interação 3:1 mostrada na Figura 5.14e.

Através dessa última análise, pode-se concluir que a existência de um bombeamento de energia está condicionada a captura de ressonância de um modo do sistema em que a localização do movimento mude com a variação de energia no sistema. Nesse exemplo, mostrou-se que em um pequeno trecho do segundo MNN e em quase todo o primeiro MNN, há um aumento da amplitude de q_2 em relação a q_1 com a redução de energia. Em outras palavras, há uma troca de localização do movimento de q_1 para q_2 com a

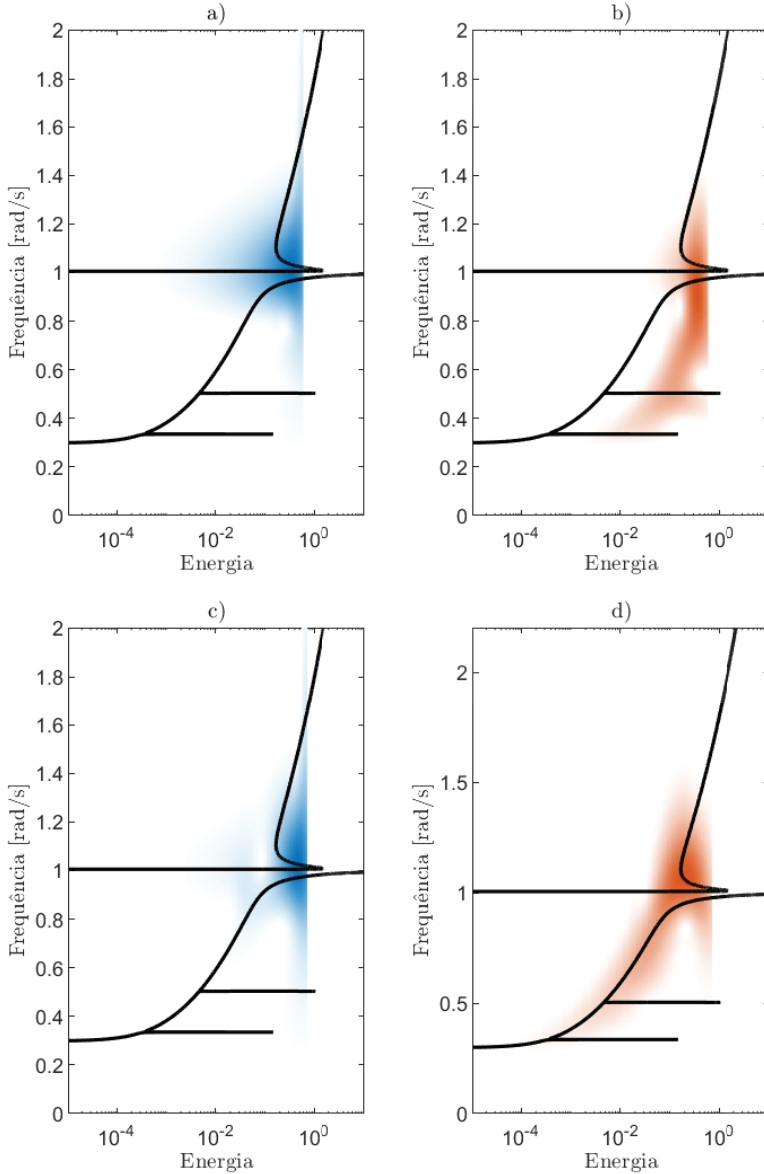


Figura 5.13: Gráficos de Frequência-Energia do MNNs sobrepostos aos resultados da transformada de Wavelet da resposta ao impulso. a) Transformada de Wavelet de q_1 para $\Gamma = 0.6$. b) Transformada de Wavelet de q_2 para $\Gamma = 0.6$. c) Transformada de Wavelet de q_1 para $\Gamma = 0.72$. d) Transformada de Wavelet de q_2 para $\Gamma = 0.72$

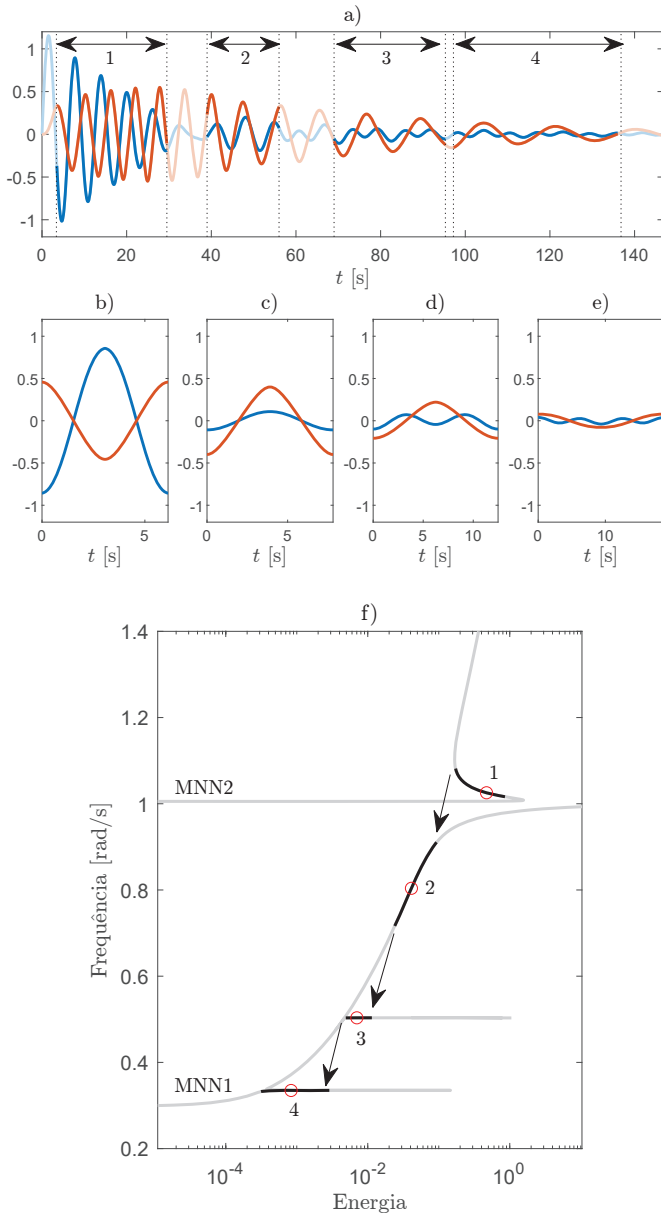


Figura 5.14: a) Resposta do sistema 3 para um impacto com $\Gamma = 0.72$ segmentada em 4 trechos destacados. b) Solução periódica do segundo MNN. c) Solução periódica do primeiro MNN. d) Solução periódica na língua de interação 2:1. e) Solução periódica na língua de interação 3:1. f) Gráficos de Freqüência-Energia mostrando o caminho percorrido pela resposta ao impulso com $\Gamma = 0.72$.

redução de energia. Assim, para que o bombeamento neste sistema exista, basta que as condições iniciais favoreçam a resposta a ser capturada por esses modos (ou trechos deles), o que acontece com $\Gamma > 0.7$.

Enfatiza-se aqui que em momento algum desta análise buscou-se escrever a resposta ao impulso do sistema como sendo a superposição dos MNNs, visto que isso não é válido uma vez que a superposição modal não existe para sistema não-lineares. No entanto, mostrou-se que o movimento tende a ficar concentrado ao redor dos modos, podendo haver até uma troca de energia entre os modos, fenômeno que não existe em sistemas lineares.

5.4 Exercícios

1. O que são curvas de resposta em frequência não-lineares e como os MNN estão relacionados a elas?
2. O que é enrijecimento e relaxamento de um sistema? Como isso pode ser visto no diagrama Frequência-Energia?
3. Para o sistema mostrado na Figura 5.1, considere agora o caso em que a força não linear é dada pela equação $f_{nl} = 5q_1(t) - 0.5q_1^3(t)$. O sistema sofre enrijecimento ou relaxamento? Mostre o diagrama Frequência-Energia.
4. O que é o fenômeno de localização?
5. Quais são as hipóteses simplificadoras utilizadas no procedimento proposto neste capítulo para calcular isolas a partir dos MNNs?
6. O que são isolas e como sua existência pode ser detectada utilizando os MNNs?

Bibliografia

- [1] ALBU-SCHÄFFER, A.; SANTINA, C. A review on nonlinear modes in conservative mechanical systems. *Annual Reviews in Control*, v. 50, p. 49–71, 2020. ISSN 1367-5788.
- [2] ALEXANDER, N.; SCHILDER, F. Exploring the performance of a nonlinear tuned mass damper. *Journal of Sound and Vibration*, v. 319, n. 1, p. 445–462, 2009. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X08004823>>.
- [3] ANASTASIO, D. et al. Experimental identification of distributed nonlinearities in the modal domain. *Journal of Sound and Vibration*, v. 458, p. 426–444, 2019.
- [4] ATKINS, P.; WRIGHT, J.; WORDEN, K. An extension of force approximation to the identification of non-linear multi-degree of freedom systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 237, n. 1, p. 23–43, 2000.
- [5] AVITABILE, P. *Modal Testing: A Practitioner's Guide*. 1st. ed. West Sussex, UK: Wiley, 2017.
- [6] BELYTSCHKO, T.; HUGHES, T. *Computational Methods for Transient Analysis*. [S.l.]: North-Holland, 1983. (1). ISBN 9780444864796.
- [7] BLANC, F. et al. On the numerical computation of nonlinear normal modes for reduced-order modelling of conservative vibratory systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 36, n. 2, p. 520–539, 2013.
- [8] BRANDT, A. *Noise and vibration analysis: signal analysis and experimental procedures*. 1st. ed. West Sussex, UK: John Wiley and Sons, 2011.
- [9] BRINCKER, R.; VENTURA, C. *Introduction to operational modal analysis*. 1st. ed. West Sussex, UK: John Wiley and Sons, 2015.
- [10] CAMERON, T.; GRIFFIN, J. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, v. 56, n. 1, p. 149–154, 03 1989. ISSN 0021-8936.

- [11] CHUNG, J.; HULBERT, G. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method. *Journal of Applied Mechanics*, v. 60, n. 2, p. 371–375, 06 1993. ISSN 0021-8936.
- [12] COCHELIN, B.; VERGEZ, C. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, v. 324, n. 1, p. 243–262, 2009.
- [13] DEBEURRE, M. et al. Finite element computation of nonlinear modes and frequency response of geometrically exact beam structures. *Journal of Sound and Vibration*, v. 548, p. 117534, 2023. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X22007179>>.
- [14] DETROUX, T. et al. The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 296, p. 18–38, 2015.
- [15] EHRHARDT, D.; HARRIS, R.; ALLEN, M. Numerical and experimental determination of nonlinear normal modes of a circular perforated plate. In: CLERCK, J. D. (Ed.). *Topics in Modal Analysis I, Volume 7*. Cham: Springer International Publishing, 2014. p. 239–251.
- [16] EWINS, D. *Modal Testing: theory and practice*. 1st. ed. [S.l.]: Wiley, 1984.
- [17] FIDLIN, A. *Nonlinear oscillations in mechanical engineering*. Netherlands: Springer, 2006. 366 p.
- [18] FRISWELL, M.; MOTTERSHEAD, J. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. [S.l.]: Kluwer academic publishers, 1995.
- [19] GENDELMAN, O. et al. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part i — dynamics of the underlying hamiltonian systems. *Journal of Applied Mechanics*, v. 68, n. 1, p. 34–41, 2001.
- [20] GERADIN, M.; RIXEN, D. *Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics*. [S.l.]: Wiley, 2015. ISBN 9781118900208.
- [21] GUILLEN, J.; PIERRE, C. An efficient, hybrid, frequency-time domain method for the dynamics of large-scale dry-friction damped structural systems. In: PFEIFFER, F.; GLOCKER, C. (Ed.). *IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1999. p. 169–178. ISBN 978-94-011-4275-5.
- [22] GUILLOT, L.; COCHELIN, B.; VERGEZ, C. A taylor series-based continuation method for solutions of dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, v. 98, p. 2827–2845, 2019.

- [23] HABIB, G.; CIRILLO, G.; KERSCHEN, G. Isolated resonances and nonlinear damping. *Nonlinear Dynamics*, v. 93, p. 979–994, 2018.
- [24] HAGEDORN, P. *Non-linear oscillations*. Segunda edição. Grã Bretanha: Clarendon Press, Oxford, 1988. 311 p. ISBN 978-0198561422.
- [25] HAGEDORN, P. Mechanical systems: equations of motion and stability. In: HAGEDORN, P. P.; SPELSBERG-KORSPETER, G. (Ed.). *Active and passive vibration control of structures*. Itália: Springer, 2014. cap. 1, p. 1–132.
- [26] HE, J.; FU, Z. *Modal analysis*. 1st. ed. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2001.
- [27] HILBER, H.; HUGHES, T.; TAYLOR, R. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 5, n. 3, p. 283–292, 1977.
- [28] HILL, T. et al. An analytical method for the optimisation of weakly nonlinear systems. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics – EURO DYN 2014*. Porto, Portugal: [s.n.], 2014.
- [29] HILL, T. et al. Interpreting the forced response of a two-degree-of-freedom nonlinear oscillator using backbone curves. *Journal of Sound and Vibration*, v. 349, p. 276–288, 2015.
- [30] INMAN, D. *Engineering vibration*. Quarta edição. Estados Unidos: Pearson, 2014. ISBN 978-0-13-287169-3.
- [31] KERSCHEN, G. *Modal analysis of nonlinear mechanical systems*. 1st. ed. Udine, Italy: Springer, 2014.
- [32] KERSCHEN, G. et al. Nonlinear normal modes, part i: A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 23, n. 1, p. 170–194, 2009. ISSN 0888-3270.
- [33] KERSCHEN, G.; PEETERS, M.; GOLINVAL, J.-C. Nonlinear modal analysis of a full-scale aircraft. *Journal of Aircraft*, v. 50(5), p. 1409–1419, 2013.
- [34] KERSCHEN, G. et al. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 20, p. 505–592, 2006.
- [35] KRACK, M. Nonlinear modal analysis of nonconservative systems: Extension of the periodic motion concept. *Computers and Structures*, v. 154, p. 59–71, 2015.
- [36] KRACK, M.; GROSS, J. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. 1st. ed. Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019.

- [37] KUETHER, R. et al. Nonlinear normal modes, modal interactions and isolated resonance curves. *Journal of Sound and Vibration*, v. 351, p. 299–310, 2015.
- [38] LAXALDE, D.; THOUVEREZ, F. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems: Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of sound and vibration*, v. 322, p. 1009–1025, 2009.
- [39] LEE, Y. et al. Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 204, n. 1, p. 41–69, 2005. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016727890500120X>>.
- [40] MAIA, N.; SILVA, J. *Theoretical and experimental modal analysis*. 1st. ed. Somerset, England: Research studies press, 1997.
- [41] MEIROVITCH, L. *Principles and Techniques of Vibrations*. [S.l.]: Prentice Hall, 1997. ISBN 9780023801419.
- [42] NACIVET, S. et al. A dynamic lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 265, n. 1, p. 201–219, 2003. ISSN 0022-460X.
- [43] NAYFEH, A.; BALACHANDRAN, B. *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1995. (Wiley series in nonlinear science). ISBN 0-471-59348-6.
- [44] NAYFEH, A.; MOOK, D. *Nonlinear oscillations*. [S.l.]: Wiley Classics Library, 1995.
- [45] NEWMARK, N. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959.
- [46] NÖEL, J.-P.; KERSCHEN, G. Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 83, p. 2–35, 2017.
- [47] NÖEL, J.-P. et al. Identification of nonlinear normal modes of engineering structures under broadband forcing. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 74, p. 95–110, 2016.
- [48] PEETERS, M. *Theoretical and Experimental Modal Analysis of Nonlinear Vibrating Structures using Nonlinear Normal Modes*. Tese (PhD Thesis) — Aerospace and Mechanical Engineering Department, University of Liège, Liège, 2010.
- [49] PEETERS, M.; KERSCHEN, G.; GOLINVAL, J. Dynamic testing of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, n. 3, p. 486–509, 2011. ISSN 0022-460X.

- [50] PEETERS, M.; KERSCHEN, G.; GOLINVAL, J. Modal testing of nonlinear vibrating structures based on nonlinear normal modes: Experimental demonstration. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 25, n. 4, p. 1227–1247, 2011. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327010003821>>.
- [51] PEETERS, M. et al. Nonlinear normal modes, part ii: Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 23, p. 195–216, 2009.
- [52] RENSON, L. *Nonlinear Modal Analysis of Conservative and Nonconservative Aerospace Structures*. Tese (Doctor in Engineering Sciences Thesis) — Aerospace and Mechanical Engineering Department, University of Liège, Liège, 2014.
- [53] RENSON, L.; DELIÉGE, G.; KERSCHEN, G. An effective finite-element-based method for the computation of nonlinear normal modes of nonconservative systems. *Meccanica*, v. 49, p. 1901–1916, 2014.
- [54] RENSON, L. et al. Robust identification of backbone curves using control-based continuation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 367, p. 145–158, 2016.
- [55] RENSON, L. et al. Force appropriation of nonlinear structures. *Proc. R. Soc. A*, v. 474, 2018.
- [56] RENSON, L.; KERSCHEN, G.; COCHELIN, B. Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. *Journal of Sound and Vibration*, v. 364, p. 177–206, 2016.
- [57] ROSENBERG, R. Normal modes of nonlinear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, v. 27, n. 2, p. 263–268, 1960. ISSN 0021-8936.
- [58] ROSENBERG, R. The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, v. 29, n. 1, p. 7–14, 1962. ISSN 0021-8936.
- [59] ROSENBERG, R. On nonlinear vibration of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, v. 9, p. 155–242, 1966.
- [60] SAMPAIO, R.; FERREIRA, E.; BRANDÃO, A. *Análise e processamento de sinais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2012. (Notas em Matemática Aplicada, v. 22).
- [61] SEYDEL, R. *Practical bifurcation and stability analysis*. 3rd. ed. New York: Springer, 2010.
- [62] SHAW, S.; PIERRE, C. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, v. 150, n. 1, p. 170–173, 1991.

- [63] SHAW, S.; PIERRE, C. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 164, n. 1, p. 85–124, 1993.
- [64] SHAW, S.; PIERRE, C. Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 169, n. 3, p. 319–347, 1994.
- [65] STRANG, G. *Linear algebra and its applications*. Estados Unidos: Cengage Learning, 2006. 544 p.
- [66] THOMAS, O.; SÉNÉCHAL, A.; DEÛ, J. Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams. *Nonlinear Dynamics*, v. 86, p. 1293–1318, 2016.
- [67] THOUVEREZ, F. Presentation of the ecl benchmark. *Mechanical System and Signal Processing*, v. 17(1), p. 195–202, 2003.
- [68] TOUZÉ, C.; AMABILI, M. Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems: Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures. *Journal of Sound and Vibration*, v. 298, n. 4, p. 958–981, 2006.
- [69] TREFETHEN, L.; BAU, D. *Numerical linear algebra*. Estados Unidos: Society for Industrial and Applied Mathematic (SIAM), 1997. 361 p.
- [70] VAKAKIS, A.; GENDELMAN, O. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part ii — resonance capture. *Journal of Applied Mechanics*, v. 68, n. 1, p. 42–48, 2001.
- [71] VIZZACCARO, A. et al. Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 384, p. 113957, 2021.
- [72] WAGNER, G. *An excursion in the dynamics of flexible beams: from modal analysis to nonlinear modes*. Tese (PhD Thesis) — Mechanical Engineering Department, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.
- [73] WAGNER, G.; LIMA, R.; SAMPAIO, R. A versatile strategy to compute nonlinear normal modes of flexible beams. *Nonlinear Dynamics*, accepted, 2023.
- [74] WRIGHT, J.; COOPER, J.; DESFORGES, M. Normal-mode force appropriation—theory and application. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 13, n. 2, p. 217–240, 1999. ISSN 0888-3270.
- [75] ZAPICO-VALLE, J.; GARCÍA-DIÉGUEZ, M.; ALONSO-CAMBLOR, R. Nonlinear modal identification of a steel frame. *Engineering Structures*, v. 56, p. 246–259, 2013.

Índice

- amolecimento, xiii
- apropriação de força, 108
- balanço de energia, 111
- bombeamento de energia, xiv, 115, 117, 120, 121
- continuação, xiv, 27, 49, 56, 57, 87, 101, 103, 108, 114
- enrijecimento, xiii, 21, 25, 27, 54, 57, 87, 103, 104, 117
- espinha dorsal, 105, 113
- frequência de Nyquist, 40–42
- isola, 21, 106, 108, 112
- localização, xiii, 21, 28, 30, 57, 104, 105, 119–121
- método de Lagrange, 2, 4, 6
- método da secante, 90, 96
- método da tangente, 90, 91, 96
- método de alternância frequência-tempo, 36, 54, 58, 104
- método de Newton-Raphson, 17, 23, 36, 45, 49–51, 67, 93, 96
- método de Runge-Kutta, 67
- método do balanço harmônico, xiv, 17, 35, 89, 101
- método do tiro, xiv, 67, 89, 101
- mascaramento, 36, 39, 41, 42, 61, 62
- modos normais lineares, 1, 7
- modos normais não-lineares, 1
- movimento síncrono, 12, 13, 15, 22
- Newmark, 67, 68
- ortogonalidade, 10, 37
- problema de autovalor, 7
- problema de valor de contorno periódico, 7, 12, 15
- relaxamento, xiii, 21, 25, 87
- resíduos ponderados, 36, 44
- ressonância interna, 28, 30, 48, 106, 112
- Rosenberg, xiii, 1, 21, 35, 87, 101, 110
- série de Fourier, 18, 24, 35, 36
- superposição modal, 15, 21, 22, 101, 124
- variedades invariantes de Shaw e Pierre, 21
- vazamento, 39, 42
- Wavelet, 117, 120