Notas em Matemática Aplicada

ISSN 2175-3385
E-ISSN 2236-5915

Volume 98, 2024

SBMAC **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**

2024

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC publica, desde as primeiras edições do evento, monografias dos cursos que são ministrados nos CNMAC.

Para a comemoração dos 25 anos da SBMAC, que ocorreu durante o XXVI CNMAC em 2003, foi criada a série **Notas em Matemática Aplicada** para publicar as monografias dos minicursos ministrados nos CNMAC, o que permaneceu até o XXXIII CNMAC em 2010.

A partir de 2011, a série passa a publicar, também, livros nas áreas de interesse da SBMAC. Os autores que submeterem textos à série Notas em Matemática Aplicada devem estar cientes de que poderão ser convidados a ministrarem minicursos nos eventos patrocinados pela SBMAC, em especial nos CNMAC, sobre assunto a que se refere o texto.

O livro deve ser preparado em **Latex, com as figuras em .eps, .pdf e etc.** e ter entre **80 e 150 páginas**. O texto deve ser redigido de forma clara, acompanhado de uma excelente revisão bibliográfica e de **exercícios de verificação de aprendizagem** ao final de cada capítulo. O idioma pode ser Português ou Espanhol.

Veja todos os títulos publicados nesta série na página
http://https://proceedings.science/notas-sbmac

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

2024

INTRODUÇÃO À ANÁLISE INTERVALAR

Nicole Cristina Cassimiro de Oliveira
nicolecassimiro1@gmail.com

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Nara Bobko
narabobko@utfpr.edu.br
Rodolfo Gotardi Begiato
begiato@utfpr.edu.br

Departamento Acadêmico de Matemática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Curitiba

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

São Carlos - SP, Brasil
2024

Coordenação Editorial: Mateus Bernardes

Coordenação Editorial da Série: Sandra M. C. Malta

Editora: SBMAC

Capa: Matheus Botossi Trindade

Patrocínio: SBMAC

Catalogação elaborada pela Biblioteca do IBILCE/UNESP
Bibliotecária: Maria Luiza Fernandes Jardim Froner

Cassimiro, Nicole C.
Análise Intervalar - Curitiba, PR :
SBMAC, 2024, 143 p., 21,5 cm - (Notas em Matematica Aplicada; v. 98)

ISBN 978-65-86388-26-8 e-ISBN 978-65-86388-24-4

1. Análise Intervalar I. Cassimiro, Nicole C. II. Bobko, Nara. III. Begiato, Rodolfo G. IV. Título. V. Série

CDD - 51

Dedicamos este trabalho às nossas famílias.

Conteúdo

Prefácio

A Análise Intervalar, também conhecida como Aritmética Intervalar ou Matemática Intervalar, é um campo de estudo recente que tem se mostrado de grande valor e aplicabilidade. Em linhas gerais, consiste em estudar e aplicar diversos conceitos matemáticos substituindo as variáveis reais por variáveis que são intervalos, donde segue a nomenclatura "Análise Intervalar".

A Análise Intervalar consiste em um conjunto de métodos para manipulação de intervalos numéricos que representam dados com incertezas. Na computação, os intervalos podem ser aplicados para representar valores desconhecidos e também para representar valores contínuos. Servem ainda para controlar o erro de arredondamento e para representar dados inexatos, aproximações e erros de truncamento [21]. Assim, essa teoria é de grande valia para o desenvolvimento de métodos numéricos com resultados confiáveis, visto que permite analisar a propagação de erros com exatidão.

A origem do desenvolvimento da Análise Intervalar é incerta, e provavelmente decorre da contribuição de diferentes autores ao longo do tempo visando lidar com diferentes problemas. Um exemplo bastante antigo do uso de enclausuramento intervalar é o Método de Arquimedes para o cálculo aproximado do valor de π. Usando uma sequência de polígonos inscritos e uma sequência de polígonos circunscritos a um círculo de raio 1, ele obteve limites inferiores e superiores para a razão entre o perímetro da circunferência e o diâmetro da mesma. Ou seja, ele obteve um intervalo para aproximar o valor de π.

Todavia, a consolidação da Análise Intervalar como ferramenta em computação numérica é bem mais recente. De acordo com Vargas [24], Norbert Wiener foi uma das primeiras pessoas a utilizar intervalos para descrever resultados de mensurações de distâncias e tempo, em trabalhos realizados nos anos de 1914 e 1920 [25, 26].

Nas décadas subsequentes, textos de diversos autores começaram a apresentar passos sutis em direção à formalização da Análise Intervalar. Nos trabalhos de Burkill [2], de 1924, e no de Young [27] (1931) a elaboração de uma aritmética entre intervalos começa a ser mencionada. No trabalho de H. Grell, K. Maruhn e W. Rinow [10] (originalmente publicado em russo, em 1951), já podem ser encontradas regras para a aritmética de intervalos de números positivos. Em 1951, Dwyer publica o livro "Linear computations", no qual aborda sobre cálculos matriciais usando aritmética intervalar [8]. Em 1958 é publicado o trabalho de Sunaga [23], onde podem ser encontradas desde regras algébricas para operações intervalares básicas e suas propriedades, até mesmo a ideia do cálculo computacional do que hoje é chamado de método intervalar de Newton (que será abordado neste texto). Entretanto, foram os trabalhos de Moore [18, 19] que introduziram os conceitos de Análise Intervalar de maneira mais sólida.

Com o avanço dos estudos, a Análise Intervalar mostrou-se também de grande valor em muitos campos distintos do qual ela se originou, como computação gráfica, engenharia química, engenharia elétrica, engenharia mecânica e até mesmo dentro da própria matemática, como no cálculo de zeros de funções. Além disso, a Análise Intervalar é uma teoria muito interessante do ponto de vista puramente matemático, com muitas propriedades notáveis e instigantes.

Apesar da Análise Intervalar ser um tópico muito relevante e com uma estrutura matemática bastante rica, os textos a respeito do assunto ainda são escassos, especialmente se restringirmos ao idioma português. Além disso, a maioria dos textos são voltados para um público mais geral, deixando assim várias lacunas no que diz respeito a formalização matemática. Tendo isto em vista, o objetivo destas notas é apresentar um texto introdutório sobre Análise Intervalar, em língua portuguesa, e com considerável formalização matemática. Este texto é voltado para estudantes da área de matemática e afins do final da graduação ou início de mestrado. Para o bom entendimento do texto, é desejável que o leitor esteja familiarizado com conceitos de Análise Real.

Estas notas foram inspiradas na monografia de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, desenvolvida por Nicole C. Cassimiro sob a orientação dos professores Nara Bobko e Rodolfo G. Begiato [4].

O texto é composto por quatro capítulos. No Capítulo 1 é apresentado ao leitor os fundamentos elementares da Análise Intervalar, a fim de propiciar o embasamento necessário para abordar conceitos de maior complexidade nos demais capítulos. Neste capítulo são abordadas, por exemplo, as operações aritméticas intervalares e suas principais propriedades.

No Capítulo 2, é apresentado o estudo de funções intervalares e suas propriedades. O foco principal está na obtenção de funções intervalares a partir de funções reais. Tais funções são chamadas de extensões intervalares e estão no cerne do o Teorema Fundamental da Análise Intervalar, um dos resultados mais importantes da teoria. Ainda neste capítulo é apresentado um breve estudo sobre continuidade de funções intervalares. Por fim, é abordado sobre subdivisões de intervalos e refinamentos de funções intervalares, conceitos relevantes no aprimoramento de estimativas fornecidas por extensões intervalares.

O conceito de sequências intervalares bem como o estudo de convergência destas são tratados no Capítulo 3. Neste capítulo são apresentados também alguns resultados sobre sequeências intervalares encaixadas, que são conceitos bastante relevantes no contexto de métodos iterativos. Isto é exemplificado na determinação de um critério de parada natural para sequências intervalares encaixadas, apresentada no final deste capítulo.

O Capítulo 4 traz algumas aplicações da Análise Intervalar no contexto de Métodos Numéricos Iterativos para determinação de raízes reais de funções reais. O primeiro método intervalar abordado baseia-se no conhecido Método da Bissecção, e é bastante relevante para descartar intervalos sem raízes, auxiliando assim no processo de encontrar intervalos com raízes. Neste capítulo também é abordado a adequação do Método de Newton para o caso de variáveis intervalares. Esta adequação não é tão simples quanto poderia-se intuir e é possível realizar diferentes abordagens, obtendo assim diferentes variações para o Método de Newton Intervalar. Neste texto são discutidos três dessas variações. Para concluir, o Capítulo 5 apresenta algumas considerações finais sobre o texto e indicações de referências para estudos futuros.

Curitiba, 09 de janeiro de 2024.

Nara Bobko
Nicole Cristina Cassimiro de Oliveira
Rodolfo Gotardi Begiato

Capítulo 1

Fundamentos da Aritmética Intervalar

A Análise Intervalar propõe uma abordagem diferenciada para lidar com problemas em que as variáveis envolvidas não são precisamente estabelecidas. Neste contexto, as variáveis não são representadas por números reais, mas por intervalos, geralmente fechados. Ao estabelecer esta mudança, se introduz uma nova aritimética, chamada Aritmética Intervalar, que exige novas regras e procedimentos de maneira que possamos operar estes elementos intervalares de maneira adequada.

Neste primeiro capítulo o objetivo central é introduzir os conceitos fundamentais da Aritmética Intervalar e fornecer ao leitor o embasamento necessário para a compreensão dos demais capítulos do livro. Acreditamos ainda que este capítulo possa ser interessante para dar uma ideia geral de como a Aritmética e a Análise Intervalar se diferenciam da Aritmética e da Análise Real.

Iniciamos o capítulo apresentando conceitos elementares de Análise Intervalar que serão utilizados ao longo do texto, tais como comprimento, valor absoluto e ponto médio de um intervalo. Alguns conceitos do estudo de conjuntos podem ser aplicados diretamente ao contexto de análise intervalar, como igualdade de intervalos, abordada na Seção 1.1, ou interseção de intervalos, abordada na Seção 1.2. Todavia, isto não é válido para outros conceitos como a união de intervalos. Mas é possível adequar esta operação, conforme é discutido na Seção 1.2.

Nas Seções 1.3 e 1.4, apresentamos e exploramos as operações aritméticas intervalares (adição, subtração, multiplicação e divisão) essenciais para o estudo de Análise Intervalar.

Por fim, na Seção 1.5 exploramos brevemente a possibilidade de estabelecer uma relação de ordem parcial no conjunto dos intervalos, conceito essencial para organizar, comparar e analisar os elementos de um conjuntos.

1.1 Conceitos Básicos de Análise Intervalar

Na Análise Intervalar os elementos centrais com os quais iremos operar serão intervalos fechados de números reais. Um intervalo real pode ser caracterizado como um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ e, embora haja outros tipos de intervalos (abertos, semi-abertos), na Análise Intervalar trabalharemos apenas com os intervalos fechados, ou seja, com intervalos da forma

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}|\ a \leq x \leq b\}, \tag{1.1.1}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Vale mencionar que alguns autores incluem os casos de $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, todavia neste texto não consideraremos estas possibilidades. Além disso, a fim de melhorar a fluência do texto, daqui em diante o termo "intervalo" será usado para referir-se a um intervalo da forma (1.1.1), isto é, um intervalo fechado e limitado.

O conjunto que contém todos os intervalos fechados de $\mathbb{R}$ será denotado por $\mathcal{I}$, e os elementos de $\mathcal{I}$ serão indicados por meio de letras maiúsculas. Além disso, denotaremos o extremo inferior de um intervalo X por $\underline{X}$ e o extremo superior por $\overline{X}$. Assim,

$$\mathcal{I} = \{X = [\underline{X},\ \overline{X}] \mid \underline{X},\ \overline{X} \in \mathbb{R},\ \underline{X} \leq \overline{X}\}.$$

Observe que um intervalo da forma $[x, x]$ conterá apenas o número real x. Desta forma, qualquer $x \in \mathbb{R}$ pode ser visto como um elemento de $\mathcal{I}$. Estes intervalos são chamados de degenerados, conforme a definição a seguir.

Definição 1.1. *Um intervalo* $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$ *tal que*

$$\underline{X} = x = \overline{X}$$

é denominado de **intervalo degenerado** *ou* **intervalo pontual**. *Neste caso,* $X = [x,\ x]$ *pode ser denotado simplesmente pelo número real* x.

Uma vez que intervalos reais são subconjuntos do conjunto dos números reais, os conceitos já estabelecidos para conjuntos em geral serão utilizados. Como sabemos, dois conjuntos A e B são iguais se possuem os mesmos elementos. Isto é,

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A). \tag{1.1.2}$$

Ou seja, para garantir que A e B sejam iguais, precisamos averiguar se todos os elementos de A pertencem ao conjunto B, e se todos os elementos de B pertencem ao conjunto A. Mas note que no caso de conjuntos dados por intervalos fechados bastará verificar se os extremos dos intervalos são iguais, conforme enunciado na proposição a seguir.

Proposição 1.1. *Dados $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$ e $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$, tem-se que $X = Y$ se, e somente se, $\underline{X} = \underline{Y}$ e $\overline{X} = \overline{Y}$.*

A demonstração deste resultado segue diretamente de (1.1.2) e fica a cargo do leitor.

Ao lidarmos com intervalos, muitas vezes será interessante e necessário extrair certas características destes conjuntos, tais como o tamanho (comprimento), o ponto médio e o módulo, apresentadas a seguir na (Definição 1.2). Antes de prosseguir, ressaltamos que o comprimento e o ponto médio permitirão escrever qualquer intervalo num formato, conhecido como Fórmula Usual (1.4.13), que é bastante conveniente para demonstrações de resultados. A int requer outros conceitos ainda não introduzidos.

Definição 1.2. *Seja $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$ um intervalo de $\mathcal{I}$.*

- *O **comprimento de** X, denotado por $w(X)$, é o número real não negativo dado por*
$$w(X) = \overline{X} - \underline{X}.$$
- *O **valor absoluto** ou **módulo do intervalo** X, denotado por $|X|$, é o número real não negativo dado por*
$$|X| = \max\{|\underline{X}|,\ |\overline{X}|\}.$$
- *O **ponto médio do intervalo** X, denotado por $m(X)$ ou por $med(X)$, é o número real dado por*
$$m(X) = \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X}).$$

Em alguns trabalhos (por exemplo [21, p. 27]), o comprimento de um intervalo X também pode ser chamado de *diâmetro de X* e, neste caso, utiliza-se a notação $diam(X)$.

Exemplo 1.1. *Seja $X = [-10, 4]$. Vamos calcular o comprimento, o valor absoluto e o ponto médio do intervalo X:*

- $w(X) = 4 - (-10) = 4 + 10 = 14,$
- $|X| = \max\{|-10|,\ |4|\} = \max\{10,\ 4\} = 10$ *e*
- $m(X) = \frac{1}{2}(-10 + 4) = \frac{1}{2}(-6) = -3.$

A Figura 1.1 apresenta a interpretação geométrica dos conceitos apresentados, utilizando, particularmente, os valores obtidos no Exemplo 1.1.

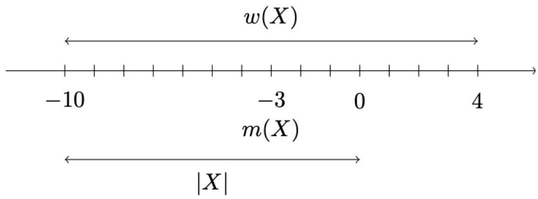

Figura 1.1: Representação geométrica de $w(X)$, $|X|$ e $m(X)$.

Considerando que o módulo de um intervalo é definido utilizando-se o módulo de números reais, é natural questionar a relação entre o módulo de um intervalo e o módulo dos números pertencentes a este intervalo. A proposição a seguir resume esta ideia.

Proposição 1.2. *Seja $X \in \mathcal{I}$. Para qualquer $x \in X$ temos que*

$$|x| \leq |X|.$$

Demonstração: Seja $x \in X$, ou seja, $\underline{X} \leq x \leq \overline{X}$. Logo, se $x \geq 0$ então segue que

$$|x| = x \leq \overline{X} \leq |\overline{X}| \leq \max\{|\underline{X}|,\ |\overline{X}|\}.$$

Por outro lado, se $x < 0$, então

$$\underline{X} \leq x < 0.$$

Segue então que $|x| < |\underline{X}| \leq \max\{|\underline{X}|,\ |\overline{X}|\}$. ■

Uma vez que intervalos são um tipo de conjunto, outra forma de compará-los é utilizando a inclusão de conjuntos. Isto é, $X \subseteq Y$ quando todos os elementos de X pertencem também ao intervalo Y. A Proposição 1.3 apresenta como podemos verificar a inclusão de um intervalo em outro olhando apenas para os extremos destes intervalos.

Proposição 1.3. *Sejam $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$ e $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}]$ intervalos quaisquer. Então,*

$$X \subseteq Y \text{ se, e somente se, } \underline{Y} \leq \underline{X} \text{ e } \overline{X} \leq \overline{Y}.$$

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se $X \subseteq Y$, então $x \in Y$, $\forall x \in X$. Em particular, $\underline{X} \in Y$ e $\overline{X} \in Y$. Logo, $\underline{Y} \leq \underline{X} \leq \overline{Y}$ e $\underline{Y} \leq \overline{X} \leq \overline{Y}$. Portanto,

$$\underline{Y} \leq \underline{X} \text{ e } \overline{X} \leq \overline{Y}.$$

$(\Leftarrow)$ Seja x um elemento qualquer de X. Então $\underline{X} \leq x \leq \overline{X}$. Mas, por hipótese, $\underline{Y} \leq \underline{X}$ e $\overline{X} \leq \overline{Y}$. Disso, segue que

$$\underline{Y} \leq \underline{X} \leq x \leq \overline{X} \leq \overline{Y}.$$

Isto é, $x \in [\underline{Y},\ \overline{Y}] = Y$. Portanto, $X \subseteq Y$. ■

1.2 Operações entre Intervalos

Como intervalos são um caso particular de conjuntos, é razoável tentar aplicar operações de conjuntos, tais como união e interseção, no contexto da Análise Intervalar. Todavia, note que para estas operações estarem bem definidas em $\mathcal{I}$ precisamos garantir que o resultado dessas operações sejam intervalos. Como veremos a seguir, isto não será um problema para o caso da interseção de intervalos, mas para o caso da união de intervalos o resultado nem sempre será sempre um intervalo. Para contornar este problema, introduziremos uma nova operação com ideia similar a união.

1.2.1 Interseção entre Intervalos

A interseção entre dois conjuntos quaisquer X e Y é definida da seguinte maneira

$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ e } z \in Y\}.$$

No caso em que X e Y são conjuntos dados por intervalos de $\mathcal{I}$, o resultado $X \cap Y$ também será um intervalo (eventualmente vazio). Isto é, a operação de interseção está bem definida em $\mathcal{I}$. Além disso, no caso de interseção entre intervalos, poderemos encontrar o resultado $X \cap Y$ diretamente através dos valores de seus extremos, como mostra a Proposição 1.4.

Proposição 1.4. *Sejam* $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$ *e* $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}]$ *intervalos de* $\mathcal{I}$ *não-disjuntos*[1]*. Então* $X \cap Y \in \mathcal{I}$ *e*

$$X \cap Y = [\max\{\underline{X},\ \underline{Y}\},\ \min\{\overline{X},\ \overline{Y}\}].$$

Demonstração: Seja $z \in X \cap\ Y$. Logo, $z \in X$ e $z \in Y$, ou seja,

$$\underline{X} \leq z \leq \overline{X} \text{ e } \underline{Y} \leq z \leq \overline{Y}.$$

De $\underline{X} \leq z$ e $\underline{Y} \leq z$, segue que $\max\{\underline{X}, \underline{Y}\} \leq z$. Analogamente, do fato de $z \leq \overline{X}$ e $z \leq \overline{Y}$, segue que $z \leq \min\{\overline{X}, \overline{Y}\}$. Logo $z \in [\max\{\underline{X},\ \underline{Y}\},\ \min\{\overline{X},\ \overline{Y}\}]$. Isto é,

$$X \cap\ Y \subseteq [\max\{\underline{X},\ \underline{Y}\},\ \min\{\overline{X},\ \overline{Y}\}].$$

Por outro lado, se $w \in [\max\{\underline{X},\ \underline{Y}\},\ \min\{\overline{X},\ \overline{Y}\}]$, então

$$\max\{\underline{X},\ \underline{Y}\} \leq w \leq \min\{\overline{X},\ \overline{Y}\}.$$

[1] Dois conjuntos quaisquer X e Y são ditos disjuntos quando não admitem elementos em comum, isto é, quando que $X \cap Y = \emptyset$.

Em particular, $\max\{\underline{X},\ \underline{Y}\} \leq w$, logo $\underline{X} \leq w$ e $\underline{Y} \leq w$. Ainda, temos que $w \leq \min\{\overline{X},\ \overline{Y}\}$, isto é, $w \leq \overline{X}$ e $w \leq \overline{Y}$. Dessa forma, $\underline{X} \leq w \leq \overline{X}$ e $\underline{Y} \leq w \leq \overline{Y}$, ou seja, $w \in X \cap\ Y$.

Portanto, $X \cap Y = [\max\{\underline{X},\ \underline{Y}\},\ \min\{\overline{X},\ \overline{Y}\}]$ e, consequentemente, $X \cap Y \in \mathcal{I}$. ■

Observe que os intervalos X e Y serão disjuntos ($X \cap Y = \emptyset$) se, e somente se, $\overline{Y} < \underline{X}$ ou $\overline{X} < \underline{Y}$.

1.2.2 União Intervalar

Analogamente ao feito para a operação de interseção, vamos tentar aplicar a operação de união de conjuntos em elementos de $\mathcal{I}$. Lembrando, a união entre dois conjuntos X e Y quaisquer é dada por

$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ ou } z \in Y\}.$$

Porém, diferentemente do que ocorre com a interseção, o resultado da união entre dois intervalos nem sempre será um intervalo, conforme ilustra o Exemplo 1.2. Desta forma, conclui-se que a união não está bem definida em $\mathcal{I}$.

Exemplo 1.2. *Considere os intervalos* $X = [1, 2]$ *e* $Y = [4, 7]$ *em* $\mathcal{I}$. *Note que*

$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ ou } z \in Y\} = \{z \mid 1 \leq z \leq 2 \text{ ou } 4 \leq z \leq 7\},$$

em que o conjunto resultante não é um intervalo, pois $1 \leq 3 \leq 7$ *mas* $3 \notin X \cup Y$. *Ou seja,* $X \cup Y \notin \mathcal{I}$ *(Figura 1.2).*

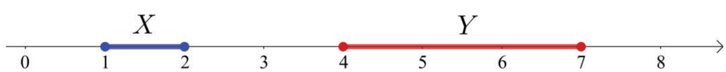

Figura 1.2: Representação geométrica da união entre intervalos.

No exemplo que acabamos de ver, os intervalos X e Y não tinham elementos em comum e o resultado da união entre esses conjuntos não resultou em um intervalo. Isto pois os elementos entre os dois intervalos acabaram formando um “buraco"no conjunto resultante. Observe que isto ocorrerá de maneira geral. Isto é, quando os intervalos (fechados) X e Y são disjuntos, teremos que $X \cup Y \notin \mathcal{I}$. Por outro lado, quanto X e Y não são intervalos disjuntos, então $X \cup Y \in \mathcal{I}$.

Todavia, podemos contornar esta questão introduzindo uma nova operação no espírito da união de forma a incluir, no caso de intervalos disjuntos, os elementos entre os dois intervalos (isto é, incluir os elementos que formaram o “buraco"). Esta operação é chamada de união convexa (ou união intervalar), pois equivale ao fecho convexo da união de conjuntos.

Definição 1.3. *Sejam* $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$ *e* $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}]$ *dois intervalos de* $\mathcal{I}$. *A **união convexa entre** X **e** Y é dada por*

$$X \underline{\cup} Y = [\min\{\underline{X},\ \underline{Y}\},\ \max\{\overline{X},\ \overline{Y}\}].$$

Vejamos o resultado da união convexa se considerarmos os mesmos intervalos do Exemplo 1.2.

Exemplo 1.3. *Considere os intervalos* $X = [1, 2]$ *e* $Y = [4, 7]$ *em* $\mathcal{I}$. *Temos que*

$$X \underline{\cup} Y = [\min\{1,\ 4\},\ \max\{2,\ 7\}] = [1,\ 7] \in \mathcal{I}.$$

A Figura 1.3 ilustra o resultado da união convexa de X *e* Y.

Figura 1.3: Representação geométrica da união convexa.

Desta forma, mesmo no caso de intervalos X e Y disjuntos, o resultado de $X \underline{\cup} Y$ será um intervalo de $\mathcal{I}$. Note que, o intervalo resultante da união convexa será o intervalo de menor diâmetro que contém tanto o intervalo X quanto o intervalo Y [21, p. 22]. Com base nisso, segue a Proposição 1.5.

Proposição 1.5. *Dados dois intervalos* $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$, *temos que*

$$X \cup Y \subseteq X \underline{\cup} Y.$$

Demonstração: Seja $z \in X \cup Y$, isto é, $z \in X$ ou $z \in Y$. No caso em que $z \in X$ segue que $\underline{X} \leq z \leq \overline{X}$. Mas então temos que

$$\min\{\underline{X}, \underline{Y}\} \leq \underline{X} \leq z \leq \overline{X} \leq \max\{\overline{X}, \overline{Y}\}.$$

Desta forma, $z \in X \underline{\cup} Y$. O caso em que $z \in Y$ é análogo. Portanto, $X \cup Y \subseteq X \underline{\cup} Y$. ∎

Recapitulando, podemos dizer que a união convexa resolveu o problema da falta de boa definição da união usual. No entanto, é razoável esperar que estas operações coincidam nos casos em que a união usual não causava problemas, isto é, no caso de intervalos não disjuntos. De fato isto irá ocorrer, conforme mostra a Proposição 1.6.

Proposição 1.6. *Sejam* $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$. *Então,*

$$X \cup Y = X \,\underline{\cup}\, Y \text{ se, e somente se, } X \cap Y \neq \emptyset.$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha por absurdo que $X \cap Y = \emptyset$. Sem perda de generalidade, vamos considerar o caso em que $\overline{X} < \underline{Y}$. Dessa forma, como $X \cap Y = \emptyset$, $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{X} < a < \underline{Y}$. Assim, $a \in X \,\underline{\cup}\, Y$, mas $a \notin X \cup Y$, contrariando a hipótese.

($\Leftarrow$) Tome $z \in X \,\underline{\cup}\, Y$. Sem perda de generalidade, considere $\underline{X} \leq \underline{Y}$. Como $X \cap Y \neq \emptyset$, temos que $\underline{Y} \leq \overline{X}$, em que temos dois casos:

- Caso 1: se $\overline{Y} \leq \overline{X}$ então $\underline{X} \leq \underline{Y} \leq \overline{Y} \leq \overline{X}$, como mostra a Figura 1.4. Logo, temos que $z \in X \,\underline{\cup}\, Y = [\underline{X},\ \overline{X}] = X \subseteq X \cup Y$.

Figura 1.4: Representação geométrica do Caso 1.

- Caso 2: se $\overline{X} \leq \overline{Y}$ então $\underline{X} \leq \underline{Y} \leq \overline{X} \leq \overline{Y}$, como mostra a Figura 1.5. Assim, conclui-se que $z \in X \,\underline{\cup}\, Y = [\underline{X},\ \overline{Y}] = [\underline{X},\ \overline{X}] \cup [\underline{Y},\ \overline{Y}] = X \cup Y$, pois $\underline{Y} \leq \overline{X}$.

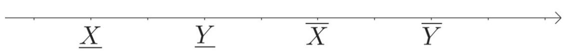

Figura 1.5: Representação geométrica do Caso 2.

Assim, segue que $X \,\underline{\cup}\, Y \subseteq X \cup Y$. Disto e da Proposição 1.5, concluímos que $X \cup Y = X \,\underline{\cup}\, Y$. ■

1.3 Operações Aritméticas entre Intervalos

Como mencionado anteriormente, podemos correlacionar os números reais com intervalos através da bijeção entre os intervalos degenerados e os números reais, dada por

$$[x,\ x] \longleftrightarrow x.$$

Desta forma, podemos aplicar as operações aritméticas básicas dos números reais para intervalos degenerados. Mas queremos aplicar estas operações a todos os intervalos de $\mathcal{I}$. Considerando $\odot$ uma das quatro operações aritméticas básicas em $\mathbb{R}$ (adição, subtração, multiplicação ou divisão), podemos definir a operação aritmética intervalar[2] $\odot$ entre dois intervalos X e Y como sendo

$$X \odot Y = \{x \odot y \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}. \tag{1.3.3}$$

No caso da operação de divisão, para garantir a boa definição, deve-se ainda exigir que $0 \notin Y$.

Vale mencionar que esta forma de definir operações em conjuntos não é novidade da Análise Intervalar, uma vez que já é utilizada para conjuntos em diversos contextos. Todavia, assim como no caso da operações de união e interseção entre intervalos, precisaremos verificar se estas operações estão bem definidas em $\mathcal{I}$. Isto é, se os conjuntos resultantes ainda são intervalos. Além disso, temos interesse em obter formas de efetuar estas operações utilizando apenas os extremos dos intervalos X e Y, evitando a árdua tarefa de efetuar as operações com todos os elementos destes intervalos. Nas seções a seguir, lidaremos com cada uma das operações aritméticas básicas.

1.3.1 Adição Intervalar

Seguindo (1.3.3), a adição de dois intervalos quaisquer X e $Y \in \mathcal{I}$ será definida da seguinte forma

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}. \tag{1.3.4}$$

Chamaremos esta operação de **adição intervalar**.

A proposição a seguir mostra que o conjunto resultante da adição de dois intervalos X e Y pode ser expressa como um intervalo em que os extremos são obtidos com base nos extremos de X e Y. Note que isso garante que esta operação está bem definida em $\mathcal{I}$ e nos fornece uma maneira prática de efetuar a adição entre intervalos.

Proposição 1.7. *Dados* $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$ *intervalos quaisquer, temos que*

$$X + Y = [\underline{X} + \underline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}].$$

[2] Existem diferentes abordagens para definir a aritmética intervalar, sendo a aqui apresentada frequentemente denominada por *Standard Interval Arithmetic* (em português, Aritmética Intervalar Padrão). Outras formas de definir aritmética intervalar podem ser encontradas em [14, 20, 22].

Demonstração: Seja $w \in X + Y$. Temos então que existe $x \in X$ e $y \in Y$ tal que $w = x + y$. Isto nos garante que

$$\underline{X} \leq x \leq \overline{X} \text{ e } \underline{Y} \leq y \leq \overline{Y}.$$

Somando as duas desigualdades obtemos

$$\underline{X} + \underline{Y} \leq x + y \leq \overline{X} + \overline{Y}.$$

Portanto, $X + Y \subseteq [\underline{X} + \underline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}]$.

Por outro lado, note que

$$\underline{X} + \underline{Y} \leq \underline{X} + \overline{Y} \leq \overline{X} + \overline{Y}.$$

Isto é, $\underline{X} + \overline{Y}$ é um elemento do intervalo $[\underline{X} + \underline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}]$. Então podemos reescrever este intervalo na forma

$$[\underline{X} + \underline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}] = [\underline{X} + \underline{Y},\ \underline{X} + \overline{Y}] \cup [\underline{X} + \overline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}].$$

Mas

$$\begin{aligned} [\underline{X} + \underline{Y},\ \underline{X} + \overline{Y}] &= \{\underline{X} + y \mid y \in Y\} \subseteq X + Y \\ [\underline{X} + \overline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}] &= \{x + \overline{Y} \mid x \in X\} \subseteq X + Y. \end{aligned}$$

Donde segue que $[\underline{X} + \underline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}] \subseteq X + Y$.

Das duas inclusões, segue a igualdade $[\underline{X} + \underline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}] = X + Y$. ■

Exemplo 1.4. *Sejam* $X = [-1,\ 2]$ *e* $Y = [3,\ 4]$ *em* $\mathcal{I}$. *Então,*

$$X + Y = [-1,\ 2] + [3,\ 4] = [(-1) + 3,\ 2 + 4] = [2,\ 6].$$

Uma consequência da Proposição 1.7 será que a união convexa da soma de intervalos estará contida na soma dos intervalos resultantes da união convexa, conforme enunciado na proposição a seguir.

Proposição 1.8. *Sejam* A_1, A_2, B_1 *e* B_2 *intervalos de* $\mathcal{I}$. *Então,*

$$(A_1 + B_1) \underline{\cup} (A_2 + B_2) \subseteq (A_1 \underline{\cup} A_2) + (B_1 \underline{\cup} B_2).$$

Demonstração: Seja C o intervalo resultante à esquerda da inclusão e D o intervalo resultante à direita da inclusão. Usando a Definição de união convexa 1.3 e a Proposição 1.7, segue que

$$\begin{aligned} C &= (A_1 + B_1) \underline{\cup} (A_2 + B_2) \\ &= [\underline{A_1} + \underline{B_1}, \overline{A_1} + \overline{B_1}] \underline{\cup} [\underline{A_2} + \underline{B_2}, \overline{A_2} + \overline{B_2}] \\ &= \left[\min\{\underline{A_1} + \underline{B_1}, \underline{A_2} + \underline{B_2}\}, \max\{\overline{A_1} + \overline{B_1}, \overline{A_2} + \overline{B_2}\}\right] \quad \text{e} \\ D &= (A_1 \underline{\cup} A_2) + (B_1 \underline{\cup} B_2) \\ &= \left[\min\{\underline{A_1}, \underline{A_2}\}, \max\{\overline{A_1}, \overline{A_2}\}\right] + \left[\min\{\underline{B_1}, \underline{B_2}\}, \max\{\overline{B_1}, \overline{B_2}\}\right] \\ &= \left[\min\{\underline{A_1}, \underline{A_2}\} + \min\{\underline{B_1}, \underline{B_2}\}, \max\{\overline{A_1}, \overline{A_2}\} + \max\{\overline{B_1}, \overline{B_2}\}\right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\underline{D} = \min\{\underline{A_1}, \underline{A_2}\} + \min\{\underline{B_1}, \underline{B_2}\} \leq \min\{\underline{A_1} + \underline{B_1}, \underline{A_2} + \underline{B_2}\} = \underline{C} \text{ e} \\
&\overline{C} = \max\{\overline{A_1} + \overline{B_1}, \overline{A_2} + \overline{B_2}\} \leq \max\{\overline{A_1}, \overline{A_2}\} + \max\{\overline{B_1}, \overline{B_2}\} = \overline{D}.
\end{aligned}$$

Portanto, $C \subseteq D$. ∎

1.3.2 Subtração Intervalar

De acordo com a Equação (1.3.3), a subtração entre dois intervalos quaisquer X, $Y \in \mathcal{I}$, que chamaremos de **subtração intervalar**, será definida como

$$X - Y = \{x - y \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}. \tag{1.3.5}$$

Assim como no caso da adição, o resultado da subtração intervalar entre X e Y será de fato um intervalo. Além disso, é possível obter os extremos deste intervalo utilizando apenas os valores dos extremos dos intervalos X e Y, conforme mostra a Proposição 1.9 .

Proposição 1.9. *Dados dois intervalos quaisquer $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$ e $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}]$ em $\mathcal{I}$, temos que*

$$X - Y = [\underline{X} - \overline{Y},\ \overline{X} - \underline{Y}].$$

Demonstração: Seja $w \in X - Y$. Pela Equação (1.3.5) temos $w = x - y$ para algum $x \in X$ e algum $y \in Y$. Note que, assim, $\underline{X} \leq x \leq \overline{X}$ e $-\overline{Y} \leq -y \leq -\underline{Y}$. Somando as inequações, segue que $\underline{X} - \overline{Y} \leq x - y \leq \overline{X} - \underline{Y}$. Disso, obtemos que $X - Y \subseteq [\underline{X} - \overline{Y},\ \overline{X} - \underline{Y}]$.

Por outro lado, temos que

$$[\underline{X} - \overline{Y},\ \overline{X} - \underline{Y}] = [\underline{X} - \overline{Y},\ \overline{X} - \overline{Y}] \cup [\overline{X} - \overline{Y},\ \overline{X} - \underline{Y}],$$

uma vez que $\underline{X} - \overline{Y} \leq \overline{X} - \overline{Y} \leq \overline{X} - \underline{Y}$. Mas

$$\begin{aligned}
&[\underline{X} - \overline{Y},\ \overline{X} - \overline{Y}] = \{x - \overline{Y} \mid x \in X\} \subseteq X - Y \text{ e} \\
&[\overline{X} - \overline{Y},\ \overline{X} - \underline{Y}] = \{\overline{X} - y \mid y \in Y\} \subseteq X - Y.
\end{aligned}$$

Isto garante que $[\underline{X} - \overline{Y},\ \overline{X} - \underline{Y}] \subseteq X - Y$.

Das duas inclusões, segue a igualdade $X - Y = [\underline{X} - \overline{Y},\ \overline{X} - \underline{Y}]$. ∎

Nos números reais, podemos olhar a subtração entre dois números x e y como sendo a soma entre x e o inverso aditivo de y, denotado por $-y$. No contexto da subtração intervalar poderemos fazer algo similar. Para tal, precisaremos antes definir o pseudo inverso aditivo intervalar.

Definição 1.4. *Dado $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$, o* ***pseudo inverso aditivo intervalar de*** *X, denotado por $-X$, é o intervalo*

$$-X = [-\overline{X},\ -\underline{X}].$$

Note que $-Y = \left[-\overline{Y},\ -\underline{Y}\right] = \{-y \mid y \in Y\}$. Então, assim como nos números reais, teremos que $X - Y = X + (-Y)$. Antes de prosseguir, gostaríamos de ressaltar que embora o intervalo $-Y$ assim definido permita essa operação, ele não é, em si, um elemento inverso aditivo para Y, no sentido de que nem sempre teremos $Y + (-Y)$ igual ao elemento neutro da adição (que veremos mais adiante). Daí o nome "pseudo inverso aditivo".

Vejamos o resultado da subtração intervalar para os mesmos intervalos do Exemplo 1.4.

Exemplo 1.5. *Dados $X = [-1,\ 2]$ e $Y = [3,\ 4]$ em $\mathcal{I}$, temos que*

$$\begin{aligned} X - Y &= [-1,\ 2] - [3,\ 4] = [-1,\ 2] + [-4,\ -3] \\ &= [(-1) + (-4),\ 2 + (-3)] = [-5,\ -1]. \end{aligned}$$

Dizemos que dois números reais são simétricos quando são equidistantes em relação à origem. Isto quer dizer que x e seu inverso aditivo $-x$ são números simétricos. Note que o conceito de simetria neste contexto é uma propriedade que depende de dois elementos. Já no caso de intervalos, o conceito de simetria (Definição 1.5) dirá respeito a apenas ao próprio intervalo, sem copará-lo a outro intervalo. Neste caso, veremos que um intervalo simétrico terá a propriedade de que seus extremos são números reais simétricos (Proposição 1.10).

Definição 1.5. *Seja $X \in \mathcal{I}$. Dizemos que X é um intervalo simétrico se ele coincide com seu pseudo inverso aditivo, isto é, $X = -X$.*

Exemplo 1.6. *Os intervalos $[-2,\ 2]$, $[0,\ 0]$ e $[-\pi,\ \pi]$ são intervalos simétricos.*

Proposição 1.10. *Todo intervalo simétrico pode ser escrito na forma $[-x,\ x]$, com $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$.*

<u>Demonstração</u>: Seja $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$ um intervalo simétrico. Isto é,

$$[\underline{X},\ \overline{X}] = X = -X = [-\overline{X},\ -\underline{X}].$$

Definamos $x = \overline{X}$. Assim, utilizando a igualdade acima teremos que $\underline{X} = -\overline{X} = -x$. Portanto $X = [\underline{X},\ \overline{X}] = [-x, x]$. Como X é um intervalo, isto garante ainda que $x \geq 0$. ■

É interessante observar que todo intervalo simétrico tem como ponto médio o número 0, uma vez que seus extremos serão números reais simétricos.

Note ainda que podemos escrever qualquer intervalo X utilizando seu comprimento, seu valor absoluto e o intervalo simétrico $[-1, 1]$ da seguinte forma

$$X = |X|[-1,\ 1] = \frac{1}{2}w(X)[-1,\ 1].$$

1.3.3 Multiplicação Intervalar

Conforme (1.3.3), a multiplicação entre intervalos X e Y, que chamaremos de **multiplicação intervalar**, é dada por

$$X \cdot Y = \{xy \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}. \tag{1.3.6}$$

Também denotamos a multiplicação $X \cdot Y$ por XY. Assim como ocorre nas duas operações aritméticas anteriores, a multiplicação intervalar também resulta em um intervalo, e este intervalo pode ser obtido através dos extremos dos intervalos de X e Y (Proposição 1.11).

Proposição 1.11. *Dados quaisquer $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$ e $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}]$ em $\mathcal{I}$, temos que*

$$X \cdot Y = [\min S,\ \max S],$$

em que $S = \left\{\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\right\}$.

<u>Demonstração</u>: Para provar este resultado, vamos primeiro observar quais serão os valores de $\min S$ e de $\max S$. Escrevê-los de forma geral pode ser complicado. Todavia, quando separamos em casos de acordo com os sinais dos extremos dos intervalos, é fácil observar que tais valores poderão ser escritos como apresenta a Tabela 1.1.

Agora basta verificar que o intervalo $[\min S,\ \max S]$ coincide com $X \cdot Y$, em cada um dos casos. Apresentaremos aqui o caso em que $\underline{X} \geq 0$ e $\underline{Y} \geq 0$. Os demais casos serão similares, e deixaremos a cargo do leitor.

Como estamos no caso da primeira linha da Tabela 1.1, queremos provar que $X \cdot Y = [\min S,\ \max S] = [\underline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}]$. Seja $a \in X \cdot Y$. Então, $a = x \cdot y$ para algum $x \in [\underline{X},\ \overline{X}]$ e algum $y \in [\underline{Y},\ \overline{Y}]$. Assim,

$$\underline{X}\,\underline{Y} \leq \underline{X} \cdot y \leq x \cdot y \leq \overline{X} \cdot y \leq \overline{X}\,\overline{Y},$$

pois $x \geq 0$ e $y \geq 0$, uma vez que $\underline{X} \geq 0$ e $\underline{Y} \geq 0$. Isto garante que $X \cdot Y \subseteq [\underline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}]$.

Caso	min S	max S
$\underline{X} \geq 0$ e $\underline{Y} \geq 0$	$\underline{X} \cdot \underline{Y}$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\underline{Y} \geq 0$	$\underline{X} \cdot \overline{Y}$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$
$\overline{X} \leq 0$ e $\underline{Y} \geq 0$	$\underline{X} \cdot \overline{Y}$	$\overline{X} \cdot \underline{Y}$
$\underline{X} \geq 0$ e $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$\overline{X} \cdot \underline{Y}$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$
$\overline{X} \leq 0$ e $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$\underline{X} \cdot \overline{Y}$	$\underline{X} \cdot \underline{Y}$
$\underline{X} \geq 0$ e $\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X} \cdot \underline{Y}$	$\underline{X} \cdot \overline{Y}$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X} \cdot \underline{Y}$	$\underline{X} \cdot \underline{Y}$
$\overline{X} \leq 0$ e $\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$	$\underline{X} \cdot \underline{Y}$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$\min\{\underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y}\}$	$\max\{\underline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\}$

Tabela 1.1: Mínimo e máximo de $S = \{\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\}$.

Vamos agora provar a inclusão no sentido contrário. Para tal, observe que podemos escrever $[\underline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}] = \left[\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y}\right] \cup \left[\underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\right]$. Mas

$$\left[\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y}\right] = \{a \in \mathbb{R} \mid a = \underline{X} \cdot y, \text{com } y \in Y\} \subseteq X \cdot Y,$$

pois $\underline{X} \in X$. Temos também que

$$\left[\underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\right] = \{a \in \mathbb{R} \mid a = x \cdot \overline{Y}, \text{com } x \in X\} \subseteq X \cdot Y,$$

pois $\overline{Y} \in Y$. Destas caracterizações para estes conjuntos, segue que

$$[\underline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}] = \left[\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y}\right] \cup \left[\underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\right]\ \subseteq\ X \cdot Y.$$

Uma vez que as duas inclusões são válidas, podemos concluir que

$$X \cdot Y = [\underline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}] = [\min S,\ \max S].$$

■

Exemplo 1.7. *Sejam $X = [-1,\ 2]$ e $Y = [3,\ 4]$ em $\mathcal{I}$. Temos que*

$$X \cdot Y = [-1,\ 2] \cdot [3,\ 4] = [\min S,\ \max S],$$

com $S = \{(-1) \cdot 3,\ (-1) \cdot 4,\ 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 4\} = \{-3,\ -4,\ 6,\ 8\}$. Logo, $X \cdot Y = [-4,\ 8]$.

Considerando que podemos associar números reais com intervalos degenerados, conforme mencionado anteriormente, é natural que a multiplicação de intervalo por escalar seja definida da seguinte forma

$$\alpha \cdot X = [\alpha, \alpha] \cdot X = \{\alpha \cdot x \mid x \in X\}. \tag{1.3.7}$$

Exemplo 1.8. *Se* $X = [1,\ 2] \in \mathcal{I}$ *e* $\alpha = 5$*, então*

$$\alpha \cdot X = [5,\ 5] \cdot [1,\ 2] = [5,\ 10].$$

Note que, uma vez que temos definido adição de intervalos e multiplicação de intervalo por escalar, podemos falar então de combinação linear de intervalos. O resultado a seguir nos fornece como calcular o comprimento da combinação linear de dois intervalos em função dos comprimentos dos intervalos e dos módulos dos escalares.

Proposição 1.12. *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $X, Y \in \mathcal{I}$*. Então, é válido que*

$$w(\alpha X + \beta Y) = |\alpha| w(X) + |\beta| w(Y).$$

Demonstração: Pela definição de comprimento de intervalo 1.2 e usando a caracterização da adição dada pela Proposição 1.7, temos que

$$\begin{aligned} w(\alpha X + \beta Y) &= \overline{\alpha X + \beta Y} - \underline{\alpha X + \beta Y} \\ &= \overline{\alpha X} + \overline{\beta Y} - \underline{\alpha X} - \underline{\beta Y} \\ &= \overline{\alpha X} - \underline{\alpha X} + \overline{\beta Y} - \underline{\beta Y} \\ &= |\alpha|(\overline{X} - \underline{X}) + |\beta|(\overline{Y} - \underline{Y}) \\ &= |\alpha| w(X) + |\beta| w(Y). \end{aligned}$$

∎

De maneira similar ao que foi feito na Proposição 1.12, podemos obter o comprimento do intervalo resultante da multiplicação de dois intervalos X e Y sem realizar a multiplicação propriamente dita. De fato, precisaremos apenas do comprimento e do valor absoluto dos intervalos X e Y, conforme enunciado na Proposição 1.13.

Proposição 1.13. *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $X, Y \in \mathcal{I}$*. Então, é válido que*

$$w(XY) \leq |X| w(Y) + |Y| w(X).$$

Demonstração: Pela definição de comprimento de um intervalo 1.2:

$$w(XY) = \overline{XY} - \underline{XY} = max(S) - min(S),$$

em que $S = \left\{\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\right\}$. Disto, e analisando as possibilidades da Tabela 1.1, podemos reescrever $w(XY)$ conforme a Tabela 1.2.

Caso	$w(XY)$
$\underline{X} \geq 0$ e $\underline{Y} \geq 0$	$\overline{X}\cdot\overline{Y} - \underline{X}\cdot\underline{Y} = \overline{X}(\overline{Y}-\underline{Y}) + \underline{Y}(\overline{X}-\underline{X})$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\underline{Y} \geq 0$	$\overline{X}\cdot\overline{Y} - \underline{X}\cdot\overline{Y} = \overline{Y}(\overline{X}-\underline{X})$
$\overline{X} \leq 0$ e $\underline{Y} \geq 0$	$\overline{X}\cdot\underline{Y} - \underline{X}\cdot\overline{Y} = (-\overline{X})(\overline{Y}-\underline{Y}) + \overline{Y}(\overline{X}-\underline{X})$
$\underline{X} \geq 0$ e $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$\overline{X}\cdot\overline{Y} - \overline{X}\cdot\underline{Y} = \overline{X}(\overline{Y}-\underline{Y})$
$\overline{X} \leq 0$ e $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$\underline{X}\cdot\underline{Y} - \underline{X}\cdot\overline{Y} = (-\underline{X})(\overline{Y}-\underline{Y})$
$\underline{X} \geq 0$ e $\overline{Y} \leq 0$	$\underline{X}\cdot\overline{Y} - \overline{X}\cdot\underline{Y} = \underline{X}(\overline{Y}-\underline{Y}) + (-\underline{Y})(\overline{X}-\underline{X})$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\overline{Y} \leq 0$	$\underline{X}\cdot\underline{Y} - \overline{X}\cdot\underline{Y} = (-\underline{Y})(\overline{X}-\underline{X})$
$\overline{X} \leq 0$ e $\overline{Y} \leq 0$	$\underline{X}\cdot\underline{Y} - \overline{X}\cdot\overline{Y} = (-\overline{X})(\overline{Y}-\underline{Y}) + (-\underline{Y})(\overline{X}-\underline{X})$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$\max\{\underline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\} - \min\{\underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y}\}$

Tabela 1.2: Comprimento do intervalo $X \cdot Y$.

Note que o caso da última linha da Tabela 1.2 recairá em algum dos casos anteriores. Mas, da definição de valor absoluto 1.2, temos que

$$\pm\underline{X} \leq |X|\ ,\ \pm\overline{X} \leq |X|\ ,\ \pm\underline{Y} \leq |Y| \ \text{ e } \ \pm\overline{Y} \leq |Y|.$$

Então, em todos os casos a Tabela 1.2 teremos

$$w(XY) \leq |X|w(Y) + |Y|w(X).$$

■

1.3.4 Divisão Intervalar

Conforme a Equação (1.3.3), temos que a divisão entre dois intervalos X e Y, com $0 \notin Y$, é dada por

$$\frac{X}{Y} = \left\{\frac{x}{y} \mid x \in X \text{ e } y \in Y\right\}. \tag{1.3.8}$$

Assim como para as outras operações intervalares abordadas até aqui, precisamos garantir que esta operação, que chamaremos de **divisão intervalar**, está bem definida em $\mathcal{I}$. Mas antes disso, será conveniente olharmos a operação de divisão sobre outra perspectiva.

Note que para os números reais, podemos escrever a divisão entre dois números x e y como sendo a multiplicação de x pelo inverso multiplicativo de y, denotado por y^{-1}. Isto é, $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$. Vamos então definir algo similar para os intervalos. Vale destacar que, assim como ocorreu na soma, não será possível definir o inverso multiplicativo para qualquer intervalo. Isto é, nem todo intervalo X admitirá outro intervalo Y tal que o produto deles resulte no neutro multiplicativo (que veremos mais adiante). Por isso o intervalo X^{-1} que definiremos a seguir será chamado de pseudo inverso multiplicativo. Tal intervalo é bastante relevante pois nos permite enxergar a divisão intervalar como produto intervalar.

Definição 1.6. *Seja $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$ com $0 \notin X$. O **pseudo inverso multiplicativo intervalar de** X, denotado por X^{-1} ou $\dfrac{1}{X}$, é o intervalo*

$$X^{-1} = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in X \right\} = \left[\frac{1}{\overline{X}},\ \frac{1}{\underline{X}} \right].$$

Com a definição de pseudo inverso multiplicativo intervalar, podemos enunciar a Proposição 1.14, que nos garante que o resultado da divisão intervalar é de fato um intervalo, e ainda nos fornece uma maneira de efetuarmos o resultado usando apenas os extremos dos intervalos X e Y (via resultado similar para multiplicação intervalar).

Proposição 1.14. *Dados dois intervalos $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}]$ $\in \mathcal{I}$, com $0 \notin Y$, temos que*

$$\frac{X}{Y} = X \cdot Y^{-1}.$$

Demonstração: Seja $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$ com $0 \notin Y$. Para qualquer $y \in Y$, temos que $\underline{Y} \leq y \leq \overline{Y}$. Disso, segue que

$$\frac{1}{\overline{Y}} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\underline{Y}}.$$

Logo, $\dfrac{1}{y} \in \left[\dfrac{1}{\overline{Y}},\ \dfrac{1}{\underline{Y}} \right] = Y^{-1}$. Portanto, podemos reescrever a divisão intervalar de X por Y como uma operação de multiplicação intervalar entre X por $\dfrac{1}{Y}$. Isto é,

$$\frac{X}{Y} = X \cdot Y^{-1}.$$

■

Note que podemos usar a Proposição 1.14 em conjunto com a Proposição 1.11, donde temos que

$$\frac{X}{Y} = X \cdot Y^{-1} = \left[\min \left\{ \frac{\underline{X}}{\overline{Y}},\ \frac{\underline{X}}{\underline{Y}},\ \frac{\overline{X}}{\overline{Y}},\ \frac{\overline{X}}{\underline{Y}} \right\},\ \max \left\{ \frac{\underline{X}}{\overline{Y}},\ \frac{\underline{X}}{\underline{Y}},\ \frac{\overline{X}}{\overline{Y}},\ \frac{\overline{X}}{\underline{Y}} \right\} \right].$$

A Tabela 1.3 indica quem é o mínimo e o máximo do conjunto $\left\{\frac{\underline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\underline{X}}{\underline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\underline{Y}}\right\}$ para cada caso.

Caso	$\underline{\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}^{-1}}$	$\overline{\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}^{-1}}$
$\underline{X} > 0$ e $\underline{Y} > 0$	$\underline{X}\cdot\overline{Y}^{-1}$	$\overline{X}\cdot\underline{Y}^{-1}$
$\underline{X} > 0$ e $0 \in [\underline{Y},\ \overline{Y}]$	não definido	não definido
$\underline{X} > 0$ e $\overline{Y} < 0$	$\overline{X}\cdot\overline{Y}^{-1}$	$\underline{X}\cdot\underline{Y}^{-1}$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\underline{Y} > 0$	$\underline{X}\cdot\underline{Y}^{-1}$	$\overline{X}\cdot\underline{Y}^{-1}$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $0 \in [\underline{Y},\ \overline{Y}]$	não definido	não definido
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\overline{Y} < 0$	$\overline{X}\cdot\overline{Y}^{-1}$	$\underline{X}\cdot\overline{Y}^{-1}$
$\overline{X} < 0$ e $\underline{Y} > 0$	$\underline{X}\cdot\underline{Y}^{-1}$	$\overline{X}\cdot\overline{Y}^{-1}$
$\overline{X} < 0$ e $0 \in [\underline{Y},\ \overline{Y}]$	não definido	não definido
$\overline{X} < 0$ e $\overline{Y} < 0$	$\overline{X}\cdot\underline{Y}^{-1}$	$\underline{X}\cdot\overline{Y}^{-1}$

Tabela 1.3: Extremos da divisão intervalar.

Exemplo 1.9. *Se* $X = [-1,\ 2]$ *e* $Y = [3,\ 4] \in \mathcal{I}$, *então*

$$\begin{aligned}
\frac{X}{Y} &= X \cdot \left(\frac{1}{Y}\right) = [-1,\ 2] \cdot \frac{1}{[3,\ 4]} = [-1,\ 2] \cdot \left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{3}\right] \\
&= \left[\min\left\{-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{3}\right\},\ \max\left\{-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{3}\right\}\right] \\
&= \left[\min\left\{-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right\},\ \max\left\{-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right\}\right] \\
&= \left[-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right].
\end{aligned}$$

Alguns estudos [19, p. 109] aceitam a possibilidade de realizar a divisão quando o intervalo do denominador contém o 0. Esta possibilidade dá origem à chamada Análise Intervalar Estendida. Neste caso, se Y contém o 0, define-se que

$$\frac{1}{Y} = \begin{cases} \left(-\infty,\ \frac{1}{\underline{Y}}\right] \cup \left[\frac{1}{\overline{Y}},\ +\infty\right), & \text{se } \underline{Y} \neq 0 \text{ e } \overline{Y} \neq 0 \\ \left(-\infty,\ \frac{1}{\underline{Y}}\right], & \text{se } \overline{Y} = 0 \\ \left[\frac{1}{\overline{Y}},\ +\infty\right), & \text{se } \underline{Y} = 0. \end{cases}$$

O estudo deste tipo de abordagem foge do escopo deste livro, no sentido de que vamos trabalhar somente com os intervalos pertencentes a $\mathcal{I}$ (fechados e limitados).

Assim como no caso da multiplicação e da combinação linear de intervalos, é possível estabelecer uma relação entre o comprimento do pseudo-inverso multiplicativo de um intervalo Y com o seu valor absoluto e o comprimento de Y, conforme aborda a proposição a seguir. A demonstração dessa proposição é simples e está proposta como exercício para o leitor (vide Exercício 10).

Proposição 1.15. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in \mathcal{I}$ com $0 \notin Y$. Então,*

$$w\left(\frac{1}{Y}\right) \leq \left|\frac{1}{Y}\right|^2 w(Y).$$

1.4 Propriedades Algébricas de Intervalos

Na seção anterior apresentamos as operações aritméticas intervalares fundamentais (adição, multiplicação, subtração e divisão). Para que tais operações estivessem bem definidas em $\mathcal{I}$, foi necessário tomar certo cuidado nas definições das operações a fim de garantir que o resultado das mesmas ainda fosse um elemento deste conjunto (intervalo fechado e limitado). Ainda na seção anterior, exploramos alguns resultados com o intuito de obter formas mais práticas de efetuar tais operações aritméticas, em que somente precisávamos nos preocupar com os extremos de cada intervalo envolvido na operação. Nesta seção, estamos interessados em obter propriedades algébricas relacionadas a estas operações. Mais especificamente, estamos interessados em verificar a validade de propriedades correspondentes às propriedades básicas das operações de adição e multiplicação de números reais. Isto é, a associatividade, a comutatividade, a existência e unicidade do elemento neutro, a existência e unicidade do elemento inverso e a distributividade. Iremos explorar a possibilidade de estender cada uma dessas propriedades separadamente, com o objetivo de identificar com clareza os problemas que surgem em casos específicos e analisar as adaptações necessárias. Posteriormente, apresentaremos a Proposição 1.19 com todas as propriedades agrupadas, sintetizando-as e simplificando assim a consulta delas no contexto deste livro.

Apresentaremos ainda nesta seção a “Fórmula Usual", que é uma maneira interessante de escrever um intervalo em função do seu ponto médio e do seu comprimento, e o Princípio da Monotonicidade das Operações Itervalares, que será de grande utilidade no estudo de funções intervalares.

1.4.1 Propriedades da Adição Intervalar

Algumas propriedades da adição de números reais são muito importantes para o desenvolvimento da matemática, principalmente para conseguirmos lidar com expressões algébricas. Dentre elas, a associatividade, a comutatividade, a existência e unicidade do elemento neutro da adição, e a existência e unicidade do elemento inverso da adição. Como consequência de algumas destas propriedades, temos ainda a Lei do Cancelamento para a adição. Aqui estamos interessados em explorar quais destas propriedades ainda serão válidas para a adição intervalar.

Vamos relembrar o que garantem cada uma destas propriedades no caso de números reais a fim de facilitar o estudo das mesmas para o caso da adição intervalar.

- Associatividade: $(x+y)+z = x+(y+z)$ para quaisquer x, y e $z \in \mathbb{R}$.

- Comutatividade: $x+y = y+x$ para quaisquer x e $y \in \mathbb{R}$.

- Elemento Neutro: existe um único número real $y \in \mathbb{R}$ tal que $x+y = x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. A saber, $y = 0$.

- Elemento Inverso: para cada $x \in \mathbb{R}$ existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que $x+y = 0$. A saber, $y = -x$.

- Lei do Cancelamento: sejam x, y e $z \in \mathbb{R}$. Se $x+y = x+z$, então $y = z$.

A fim de explorar a validade da associatividade e a da comutatividade, consideremos $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}]$ e $Z = [\underline{Z},\ \overline{Z}] \in \mathcal{I}$. No caso da associatividade, note que

$$
\begin{aligned}
X + (Y + Z) &= [\underline{X},\ \overline{X}] + \big([\underline{Y},\ \overline{Y}] + [\underline{Z},\ \overline{Z}]\big) \\
&= [\underline{X},\ \overline{X}] + [\underline{Y} + \underline{Z},\ \overline{Y} + \overline{Z}] \\
&= [\underline{X} + (\underline{Y} + \underline{Z}),\ \overline{X} + (\overline{Y} + \overline{Z})] \\
&= [(\underline{X} + \underline{Y}) + \underline{Z},\ (\overline{X} + \overline{Y}) + \overline{Z}] \\
&= [\underline{X} + \underline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}] + [\underline{Z},\ \overline{Z}] \\
&= ([\underline{X},\ \overline{X}] + [\underline{Y},\ \overline{Y}]) + [\underline{Z},\ \overline{Z}] \\
&= (X + Y) + Z.
\end{aligned}
$$

Ou seja, a adição intervalar é associativa.

Além disso, a adição intervalar também será comutativa, pois

$$\begin{aligned} X+Y &= [\underline{X},\ \overline{X}]+[\underline{Y},\ \overline{Y}] \\ &= [\underline{X}+\underline{Y},\ \overline{X}+\overline{Y}] \\ &= [\underline{Y}+\underline{X},\ \overline{Y}+\overline{X}] \\ &= [\underline{Y},\ \overline{Y}]+[\underline{X},\ \overline{X}] \\ &= Y+X. \end{aligned}$$

Vamos verificar agora se a adição intervalar admite elemento neutro. Para qualquer $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$, queremos $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$ tal que $X + Y = X$. Mas isto é equivalente a

$$[\underline{X}+\underline{Y},\ \overline{X}+\overline{Y}] = [\underline{X},\ \overline{X}].$$

Da Proposição 1.1 sabemos que esta igualdade só será válida quando

$$\begin{cases} \underline{X}+\underline{Y}=\underline{X} \\ \overline{X}+\overline{Y}=\overline{X} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{Y}=0 \\ \overline{Y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow Y=[0,\ 0]=0.$$

Portanto, o intervalo degenerado 0 é o elemento neutro da adição intervalar em $\mathcal{I}$. Note que as contas realizadas ainda permitem garantir a unicidade do mesmo.

Entretanto, a adição intervalar não admite inverso aditivo. Dado $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$, deveríamos ter $Y \in \mathcal{I}$ tal que $X + Y = 0$, mas isso não ocorre em geral. Vejamos a seguir.

$$\begin{gathered} X+Y=0 \\ [\underline{X},\ \overline{X}]+[\underline{Y},\ \overline{Y}]=[0,\ 0] \\ [\underline{X}+\underline{Y},\ \overline{X}+\overline{Y}]=[0,\ 0]. \end{gathered}$$

Analogamente à propriedade anterior, para haver a igualdade de intervalos (Proposição 1.1), temos que

$$\begin{cases} \underline{X}+\underline{Y}=0 \\ \overline{X}+\overline{Y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{Y}=-\underline{X} \\ \overline{Y}=-\overline{X} \end{cases} \Rightarrow Y=[-\underline{X},-\overline{X}].$$

Dessa forma, diferentemente da ideia intuitiva, $-X$ não é o inverso aditivo em $\mathcal{I}$. O inverso aditivo, quando existir, deve ser $[-\underline{X},-\overline{X}]$ que, de maneira geral, não existe já que nem sempre se tem $-\underline{X} \leq -\overline{X}$. Como $\underline{X} \leq \overline{X}$, por definição, tem-se que $\overline{X} \leq \underline{X}$, sendo assim o inverso aditivo somente existirá quando $\underline{X} = \overline{X}$. Isto é, quando X for um intervalo degenerado.

Exemplo 1.10. *Considere o intervalo* $X = [2,\ 3]$ *e o intervalo degenerado* $Y = [2,\ 2]$ *em* $\mathcal{I}$*. Então,*

$$X - X = [2 + (-3),\ 3 + (-2)] = [-1,\ 1] \neq [0,\ 0] = 0.$$

Ou seja, $-X = [-3,\ -2]$ *não é o inverso aditivo de* $X = [2,\ 3]$*. Porém,* $-Y = [-2,\ -2]$ *é o inverso aditivo do intervalo degenerado* Y*, pois*

$$Y - Y = [2 + (-2),\ 2 + (-2)] = [0,\ 0] = 0.$$

A última propriedade que mencionamos da adição dos números reais é a Lei do Cancelamento. Note que esta propriedade decorre da associatividade, da existência do inverso aditivo e da existência do elemento neutro da adição dos números reais, conforme podemos analisar a seguir.

$$\begin{aligned} x + z = y + z &\Leftrightarrow (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) \\ &\Leftrightarrow x + (z + (-z)) = y + (z + (-z)) \\ &\Leftrightarrow x + 0 = y + 0 \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Apesar da adição intervalar não admitir inverso, a Lei do Cancelamento ainda será válida. De fato, dados $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}]$ e $Z = [\underline{Z},\ \overline{Z}] \in \mathcal{I}$, temos que

$$\begin{aligned} X + Z = Y + Z &\Leftrightarrow [\underline{X} + \underline{Z},\ \overline{X} + \overline{Z}] = [\underline{Y} + \underline{Z},\ \overline{Y} + \overline{Z}] \\ &\Leftrightarrow \underline{X} + \underline{Z} = \underline{Y} + \underline{Z} \ \text{ e } \ \overline{X} + \overline{Z} = \overline{Y} + \overline{Z} \\ &\Leftrightarrow \underline{X} = \underline{Y} \ \text{ e } \ \overline{X} = \overline{Y} \\ &\Leftrightarrow X = Y. \end{aligned}$$

Note que da segunda para a terceira linha acabamos aplicando a Lei do Cancelamento da adição de números reais em cada um dos extremos do intervalo resultante.

As propriedades algébricas da adição intervalar abordadas nesta subseção encontram-se resumidas na Proposição 1.19, em conjunto com as outras propriedades discutidas nesta seção.

1.4.2 Propriedades da Multiplicação Intervalar

A operação de multiplicação de números reais também apresenta propriedades muito importantes que nos permitem manipular com mais facilidade expressões algébricas, a saber: a associatividade, a comutatividade, a existência e unicidade do elemento neutro da multiplicação, e a existência e unicidade do elemento inverso da multiplicação.

Assim como fizemos para a adição, vamos relembrar o que garantem cada uma destas propriedades no caso de números reais a fim de facilitar o estudo das mesmas para o caso da multiplicação intervalar.

- Associatividade: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para quaisquer x, y e $z \in \mathbb{R}$.
- Comutatividade: $x \cdot y = y \cdot x$ para quaisquer x e $y \in \mathbb{R}$.
- Elemento Neutro: existe um único número real $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \cdot x = x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. A saber, $y = 1$.
- Elemento Inverso: para cada $x \in \mathbb{R}$ não nulo, existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot y = 1$. A saber, $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.
- Lei do Cancelamento: sejam x, y e $z \in \mathbb{R}$, com x não nulo. Se $x \cdot y = x \cdot z$, então $y = z$.

A fim de verificar a validade da associatividade e da comutatividade para a multiplicação intervalar, consideremos $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}]$ e $Z = [\underline{Z},\ \overline{Z}] \in \mathcal{I}$ quaisquer. Então,

$$\begin{aligned} X(YZ) &= [\underline{X},\ \overline{X}]\left([\underline{Y},\ \overline{Y}][\underline{Z},\ \overline{Z}]\right) \\ &= [\underline{X},\ \overline{X}][\min S_1,\ \max S_1], \text{ onde } S_1 = \left\{\underline{Y}\,\underline{Z},\ \underline{Y}\,\overline{Z},\ \overline{Y}\,\underline{Z},\ \overline{Y}\,\overline{Z}\right\}. \\ &= [\min S_2,\ \max S_2], \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{\underline{Y}\,\underline{Z},\ \underline{Y}\,\overline{Z},\ \overline{Y}\,\underline{Z},\ \overline{Y}\,\overline{Z}\right\} \text{ e} \\ S_2 &= \left\{\underline{X}\,\underline{Y}\,\underline{Z},\ \underline{X}\,\underline{Y}\,\overline{Z},\ \underline{X}\,\overline{Y}\,\underline{Z},\ \underline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z},\ \overline{X}\,\underline{Y}\,\underline{Z},\ \overline{X}\,\underline{Y}\,\overline{Z},\ \overline{X}\,\overline{Y}\,\underline{Z},\ \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} (XY)Z &= \left([\underline{X},\ \overline{X}][\underline{Y},\ \overline{Y}]\right)[\underline{Z},\ \overline{Z}] \\ &= [\min S_3,\ \max S_3][\underline{Z},\ \overline{Z}], \text{ onde } S_3 = \left\{\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\right\}. \\ &= [\min S_4,\ \max S_4], \end{aligned}$$

em que

$$S_4 = \left\{\underline{X}\,\underline{Y}\,\underline{Z},\ \underline{X}\,\overline{Y}\,\underline{Z},\ \overline{X}\,\underline{Y}\,\underline{Z},\ \overline{X}\,\overline{Y}\,\underline{Z},\ \underline{X}\,\underline{Y}\,\overline{Z},\ \underline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z},\ \overline{X}\,\underline{Y}\,\overline{Z},\ \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}\right\}.$$

Observe que $S_2 = S_4$, assim $\min S_2 = \min S_4$ e $\max S_2 = \max S_4$ e, portanto, $X(YZ) = (XY)Z$.

Além disso, temos que

$$XY = [\underline{X},\ \overline{X}][\underline{Y},\ \overline{Y}] = [\min S_5,\ \max S_5],$$

onde $S_5 = \left\{\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\right\}$. Por outro lado,

$$YX = [\underline{Y},\ \overline{Y}][\underline{X},\ \overline{X}] = [\min S_6,\ \max S_6],$$

onde $S_6 = \{\underline{Y}\,\underline{X},\ \underline{Y}\,\overline{X},\ \overline{Y}\,\underline{X},\ \overline{Y}\,\overline{X}\}$. Como $S_5 = S_6$, teremos que $\min S_5 = \min S_6$ e $\max S_5 = \max S_6$. Portanto, $XY = YX$.

Vejamos agora que, de fato, a multiplicação intervalar admite elemento neutro. Para tal, consideremos um intervalo $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$ qualquer e analisemos o resultado deste intervalo multiplicado pelo intervalo $Y = [1, 1]$. Como a multiplicação de intervalos é comutativa e como Y é um intervalo degenerado, de acordo com a Equação (1.3.7), teremos que

$$X \cdot Y = Y \cdot X = 1 \cdot X = \{1 \cdot x \mid x \in X\} = X.$$

Isto nos garante a existência do elemento neutro para a multiplicação intervalar.

Exploremos agora a questão da unicidade do elemento neutro. Note que, para certos intervalos, será possível encontrar outro intervalo além de $[1, 1]$ cujo resultado da multiplicação resulta no intervalo original. Por exemplo, para $X = [0, 2]$ e $Z = [0, 1]$ temos que

$$X \cdot Z = [0, 2] \cdot [0, 1] = [0, 2] = X.$$

Isto não implica que o neutro da multiplicação intervalar não seja único, uma vez que o que precisamos averiguar é se existe algum outro intervalo $Z \neq Y = [1, 1]$ tal que $X \cdot Z = X$ para qualquer $X \in \mathcal{I}$ (e não para algum intervalo X específico). Algo similar ocorre nos números reais para o elemento $x = 0$. Neste caso, qualquer número real y irá satisfazer

$$x \cdot y = 0 \cdot y = 0 = x.$$

O interessante é que, para intervalos, teremos elementos diferentes do $[0, 0]$ para os quais isto ocorre.

Todavia, ainda permanece a pergunta: o neutro para a multiplicação intervalar é único? Para responder isso, vamos tentar encontrar quais as condições para que um intervalo $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$ satisfaça $XY = X$, para qualquer $X \in \mathcal{I}$. Isto é,

$$\begin{aligned}
&X \cdot Y = X, \quad \forall X \in \mathcal{I} \\
\Leftrightarrow &[\underline{X},\ \overline{X}] \cdot [\underline{Y},\ \overline{Y}] = [\underline{X},\ \overline{X}], \quad \forall X \in \mathcal{I} \\
\Leftrightarrow &[\min S_7,\ \max S_7] = [\underline{X},\ \overline{X}], \quad \forall X \in \mathcal{I},
\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

em que $S_7 = \{\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\}$. Como isto deve ser válido para qualquer $X \in \mathcal{I}$, em particular deverá também ser válido para qualquer intervalo X tal que $\underline{X} > 0$. Pela Tabela 1.1, temos que $\min S_7 = \underline{X} \cdot \underline{Y}$ e $\max S_7 = \overline{X} \cdot \overline{Y}$. Disso e da Equação(1.4.9), segue então que

$$\underline{X} \cdot \underline{Y} = \min S_7 = \underline{X} \ \text{ e } \ \overline{X} \cdot \overline{Y} = \max S_7 = \overline{X}.$$

Mas, como $\underline{X} > 0$ (e consequentemente $\overline{X} \neq 0$), segue que $\underline{Y} = \overline{Y} = 1$. Portanto, o intervalo degenerado $Y = [1, 1]$ de fato é o único elemento neutro da multiplicação intervalar.

Vamos agora analisar a existência do elemento inverso para a multiplicação intervalar. Na Subseção 1.3.4 definimos o pseudo inverso multiplicativo intervalar de um intervalo X que não contém o zero. Este intervalo foi denotado por X^{-1} e definido por

$$X^{-1} = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in X \right\} = \left[\frac{1}{\overline{X}}, \frac{1}{\underline{X}} \right].$$

Seria razoável esperar que este elemento satisfizesse a propriedade de inverso multiplicativo. Isto é, que $X \cdot X^{-1} = [1, 1]$. Mas esta igualdade não é válida de forma geral. De fato, considerando um intervalo X positivo para facilitar a visualização do resultado da multiplicação, temos que

$$[\underline{X}, \overline{X}] \cdot [\underline{X}, \overline{X}]^{-1} = [\underline{X}, \overline{X}] \cdot \left[\frac{1}{\overline{X}}, \frac{1}{\underline{X}} \right] = \left[\underline{X}\frac{1}{\overline{X}}, \overline{X}\frac{1}{\underline{X}} \right].$$

Note que o resultado não será o intervalo $[1, 1]$, a menos que X seja um intervalo degenerado ($\underline{X} = \overline{X}$). Todavia, poderia ainda existir outro intervalo Y, diferente do pseudo-inverso X^{-1}, tal que $X \cdot Y = 1$. Vamos tentar encontrar tal intervalo Y. Note que

$$\begin{aligned} & X \cdot Y = 1 \\ \Leftrightarrow & [\underline{X},\ \overline{X}] \cdot [\underline{Y},\ \overline{Y}] = [1,\ 1] \\ \Leftrightarrow & [\min S_8,\ \max S_8] = [1,\ 1], \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

em que $S_8 = \left\{ \underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y} \right\}$. Assim como fizemos anteriormente, consideraremos o caso particular em que X é estritamente positivo para facilitar a compreensão do resultado da multiplicação intervalar. Neste caso, os resultados dos extremos dependerá dos valores dos extremos de Y, conforme a segunda e terceira coluna da Tabela 1.4. Com estes resultados, podemos comparar com a Equação (1.4.10), obtendo os valores de $\underline{Y}$ e $\overline{Y}$, conforme as duas últimas colunas da Tabela 1.4.

Caso	$\min S_8$	$\max S_8$	$\underline{Y}$	$\overline{Y}$
$\underline{Y} \geq 0$	$\underline{X} \cdot \underline{Y}$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$	$(\underline{X})^{-1}$	$(\overline{X})^{-1}$
$\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$\overline{X} \cdot \underline{Y}$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$	$(\overline{X})^{-1}$	$(\overline{X})^{-1}$
$\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X} \cdot \underline{Y}$	$\underline{X} \cdot \overline{Y}$	$(\overline{X})^{-1}$	$(\underline{X})^{-1}$

Tabela 1.4: Extremos de $X \cdot Y$ considerando $\underline{X} > 0$

Com base na tabela, note que caso X seja um intervalo degenerado $X = [x, x]$, teremos que existe inverso multiplicativo e este será o intervalo degenerado $Y = [x^{-1}, x^{-1}]$. Mas caso X não seja um intervalo degenerado, então nenhum dos casos da Tabela 1.4 representa uma solução. De fato, se X não é degenerado, então $\underline{X} < \overline{X}$, o que implica que $(\underline{X})^{-1} > (\overline{X})^{-1}$. Logo $Y = [(\underline{X})^{-1}, (\overline{X})^{-1}]$ é vazio. Nos casos da segunda e da terceira linha, note que o Y resultante não atende as condições impostas na primeira coluna. Analises similares podem ser feitas para o caso de X negativo, ou mesmo para o caso de intervalos X que contenham o zero. Portanto, a multiplicação intervalar não admite inverso multiplicativo, a menos dos casos de intervalos degenerados não nulos.

Exemplo 1.11. *Seja* $X = [2,\ 3]$ *em* $\mathcal{I}$. *Então* $X \cdot X^{-1} = [2,\ 3] \cdot [2,\ 3]^{-1} = [2,\ 3] \cdot \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right] \neq [1,\ 1] = 1$. *Ou seja,* $X^{-1} = \frac{1}{X} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ *não é o inverso multiplicativo de* $X = [2,\ 3]$.

Por fim, ao contrário da adição intervalar, a multiplicação intervalar não admite a Lei de Cancelamento. De fato, para $X = [0,\ 2]$, $Y = [1,\ 1]$ e $Z = [0,\ 1]$ temos que

$$X \cdot Z = [0,\ 2] \cdot [0,\ 1] = [0,\ 2] \text{ e } X \cdot Y = [0,\ 2] \cdot [1,\ 1] = [0,\ 2].$$

Apesar de $X \cdot Z = X \cdot Y$, temos que $Z = [0,\ 1] \neq [1,\ 1] = Y$.

As propriedades algébricas da multiplicação intervalar abordadas nesta subseção encontram-se resumidas na Proposição 1.19, em conjunto com as outras propriedades discutidas nesta seção.

1.4.3 Subdistributividade

A propriedade distributiva dos números reais nos garante que

$$x(y + z) = xy + xz, \tag{1.4.11}$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$. Note que esta propriedade é muito usada nas manipulações algébricas, uma vez que permite "abrir" a conta, bem como colocar certos números em evidência (o que é essencial quando queremos isolar uma incógnita, por exemplo).

Porém, no caso das operações intervalares esta propriedade não será válida, como pode-se ver no exemplo a seguir.

Exemplo 1.12. *Sejam* $X = [1,\ 3]$*,* $Y = [0,\ 1]$ *e* $Z = [-2, 0] \in \mathcal{I}$*. Então,*

$$\begin{aligned} X(Y+Z) &= [1,\ 3] \cdot ([0,\ 1] + [-2,\ 0]) \\ &= [1,\ 3] \cdot ([0-2,\ 1-0]) \\ &= [1,\ 3] \cdot [-2,\ 0] \\ &= [-6,\ 0] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} XY + XZ &= [1,\ 3] \cdot [0,\ 1] + [1,\ 3] \cdot [-2,\ 0] \\ &= [0,\ 3] + [-6,\ 0] \\ &= [0-6,\ 3-0] \\ &= [-6,\ 3]. \end{aligned}$$

Logo, $X(Y+Z) \neq XY + XZ$*.*

Todavia, a Proposição 1.16 garante um resultado similar, baseado na contenção. Adicionalmente a isto, uma condição que garante a igualdade será fornecida na Proposição 1.17.

Proposição 1.16 (Lei Subdistributiva). *Sejam* $X, Y, Z \in \mathcal{I}$*. Então, a lei subdistributiva é dada por*

$$X(Y+Z) \subseteq XY + XZ. \tag{1.4.12}$$

Demonstração: Seja $w \in X(Y+Z)$. Então existem $x \in X$ e $v \in Y+Z$ tal que $w = x \cdot v$. Mas como $v \in Y+Z$, então existem $y \in Y$ e $z \in Z$ tal que $v = y + z$. Logo, $w = x \cdot v = c \cdot (y+z) = xy + xz$ em que a última igualdade decorre da propriedade distributiva dos números reais. Mas isto garante que $w \in XY + XZ$. Portanto, $X(Y+Z) \subseteq XY + XZ$. ■

Além disso, caso os intervalos Y e Z sejam ambos positivos, ou ambos negativos, então a propriedade distributiva será válida.

Proposição 1.17. *Sejam* $X, Y, Z \in \mathcal{I}$ *tal que* $yz \geq 0$*, para todos* $y \in Y$ *e* $z \in Z$*. Então, vale*

$$X(Y+Z) = XY + XZ.$$

Demonstração: Devido ao que foi provado na Proposição 1.16, é suficiente mostrar que $XY + XZ \subseteq X(Y+Z)$. Seja $w \in XY + XZ$, então $w = x_1 y + x_2 z$, para algum $x_1,\ x_2 \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$. Como $yz \geq 0$, temos que

$$y + z = 0 \Leftrightarrow y = z = 0.$$

Desta forma, se $y+z=0$ teremos $y=z=0$ e, assim, $w=x_1y+x_2z=0$. Mas note que neste caso $0=y+z\in Y+Z$, donde $0\in X(Y+Z)$. Segue então que $w\in X(Y+Z)$.

Consideremos agora o caso que $y+z\neq 0$. Note que, como x_1 e $x_2\in X$, e X é um intervalo, então qualquer combinação linear convexa de x_1 e x_2 estará em X. Em particular,

$$x=x_1\frac{y}{y+z}+x_2\frac{z}{y+z}\in X,$$

uma vez que $\dfrac{y}{y+z}>0$ e $\dfrac{z}{y+z}>0$ (pois os elementos de Y e Z possuem os mesmos sinais), e $\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{z}{y+z}=1$. Além disso,

$$x(y+z)=\left(x_1\frac{y}{y+z}+x_2\frac{z}{y+z}\right)(y+z)=x_1y+x_2z=w.$$

Ou seja, $w=x(y+z)\in X(Y+Z)$. ■

1.4.4 Fórmula Usual

Dado um intervalo $X\in\mathcal{I}$, geometricamente é fácil observar que os extremos de X são equidistantes do ponto médio deste intervalo, sendo que esta distância será a metade do comprimento de X. Isto é,

$$X=m(X)+\frac{1}{2}w(X)[-1,\ 1]. \tag{1.4.13}$$

Esta forma de escrever um intervalo é bastante útil, e recebe o nome de **Fórmula Usual**. Vamos verificar algebricamente que esta expressão é de fato válida, conforme a seguir.

$$\begin{aligned}
X&=[\underline{X},\ \overline{X}]\\
&=\left[\frac{1}{2}(\underline{X}+\overline{X}-\overline{X}+\underline{X}),\ \frac{1}{2}(\underline{X}+\overline{X}+\overline{X}-\underline{X})\right]\\
&=\left[\frac{1}{2}(\underline{X}+\overline{X})-\frac{1}{2}(\overline{X}-\underline{X}),\ \frac{1}{2}(\underline{X}+\overline{X})+\frac{1}{2}(\overline{X}-\underline{X})\right]\\
&=\left[\frac{1}{2}(\underline{X}+\overline{X}),\ \frac{1}{2}(\underline{X}+\overline{X})\right]+\left[-\frac{1}{2}(\overline{X}-\underline{X}),\ \frac{1}{2}(\overline{X}-\underline{X})\right]\\
&=\frac{1}{2}(\underline{X}+\overline{X})+\left[-\frac{1}{2}(\overline{X}-\underline{X}),\ \frac{1}{2}(\overline{X}-\underline{X})\right]\\
&=\frac{1}{2}(\underline{X}+\overline{X})+\frac{1}{2}(\overline{X}-\underline{X})[-1,\ 1]\\
&=m(X)+\frac{1}{2}w(X)[-1,\ 1].
\end{aligned}$$

Exemplo 1.13. *Seja* $X = [-1,\ 3] \in \mathcal{I}$*. Temos então que*

$$m(X) = \frac{1}{2}(-1+3) = 1 \ \ e \ \ w(X) = 3 - (-1) = 4.$$

Aplicando a Fórmula Usual, segue que

$$X = 1 + \frac{4}{2}[-1,\ 1] = 1 + 2[-1,\ 1].$$

1.4.5 Monotonicidade das Operações Intervalares

Uma propriedade fundamental no contexto de Análise Intervalar é a monotonicidade das operações intervalares em relação a inclusão. Uma operação qualquer $\odot$ é dita monótona em $\mathcal{I}$ em relação à inclusão se para quaisquer $A,\ B,\ C,\ D \in \mathcal{I}$, tem-se que $A \odot B \subseteq C \odot D$. A proposição a seguir mostra que as operações definidas neste texto gozam desta propriedade. Isto será bastante relevante no próximo capítulo, pois estudaremos a monotonicidade (em relação à inclusão) das funções intervalares. Vale mencionar que o conceito de monotonicidade pode ser aplicado a diferentes tipos de relações de ordem. Neste texto, exploraremos exclusivamente a monotonicidade relativa a relação de ordem inclusão.

Proposição 1.18 (Princípio da Monotonicidade das Operações Intervalares). *Seja* $\odot$ *o símbolo que denota uma das operações aritméticas intervalares básicas: adição, subtração, multiplicação ou divisão. Sejam* $A,\ B,\ C$ *e* D *elementos de* $\mathcal{I}$*, com* $A \subseteq C$ *e* $B \subseteq D$*. Além disso, no caso da operação de divisão, suponha* $0 \notin B$*. Então,*

$$A \odot B \subseteq C \odot D.$$

<u>Demonstração</u>: Seja x um elemento qualquer de $A \odot B$. Logo, existe $a \in A$ $b \in B$ tal que $x = a \odot b$. Como $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$, segue que $a \in C$ e $b \in D$. Consequentemente, $x = a \odot b$ pertence a $C \odot D$. Portanto, $A \odot B \subseteq C \odot D$. ■

Exemplo 1.14. *Sejam* $A = [2,\ 3] \subseteq [1,\ 4] = C$ *e* $B = [5,\ 8] \subseteq [3,\ 10] = D$ *intervalos em* $\mathcal{I}$*. Considerando* $\odot$ *a operação de adição intervalar, temos que*

$$[2,\ 3] + [5,\ 8] = [7,\ 11] \subseteq [4,\ 14] = [1,\ 4] + [3,\ 10].$$

1.4.6 Resumo das Propriedades Algébricas

A fim de facilitar a visualização conjunta, apresentamos a seguir um resultado com todas as propriedades algébricas das operações intervalares básicas discutidas ao longo desta seção.

Proposição 1.19. *São válidas as seguintes propriedades algébricas para as operações aritméticas intervalares.*

1. *Associatividade da adição:* $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ *para quaisquer* X, Y *e* $Z \in \mathcal{I}$.

2. *Comutatividade da adição:* $X + Y = Y + X$ *para quaisquer* X *e* $Y \in \mathcal{I}$.

3. *Elemento Neutro da adição: existe um único intervalo* $Y \in \mathcal{I}$ *tal que* $X + Y = X$ *para qualquer* $X \in \mathcal{I}$. *A saber,* Y *é o intervalo degenerado* $[0, 0] = 0$.

4. *Lei do Cancelamento da adição: sejam* X, Y *e* $Z \in \mathcal{I}$. *Se* $X+Y = X + Z$, *então* $Y = Z$.

5. *Associatividade da multiplicação:* $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ *para quaisquer* X, Y *e* $Z \in \mathcal{I}$.

6. *Comutatividade da multiplicação:* $X \cdot Y = Y \cdot X$ *para quaisquer* X *e* $Y \in \mathcal{I}$.

7. *Subdistributividade:* $X(Y + Z) \subseteq XY + XZ$ *para quaisquer* X, Y *e* $Z \in \mathcal{I}$.

8. *Se* $X, Y, Z \in \mathcal{I}$ *com* $yz \geq 0$ *para todo* $y \in Y$ *e para todo* $z \in Z$, *então* $X(Y + Z) = XY + XZ$.

9. *Fórmula Usual:* $X = m(X) + \dfrac{1}{2}w(X)[-1,\ 1]$.

10. *Princípio da Monotonicidade: Sejam* $A,\ B,\ C,\ D \in \mathcal{I}$ *com* $A \subseteq C$ *e* $B \subseteq D$, *então*
$$A \odot B \subseteq C \odot D,$$
em que $\odot \in \{+,\ -,\ \cdot,\ \div\}$. *No caso da divisão,* $0 \notin B$ *e* $0 \notin D$.

Note que as demonstrações destas propriedades consiste nas discussões já apresentadas ao longo da Seção 1.4. Em particular, os itens 7, 8 e 10 correspondem, respectivamente, às Proposições 1.16, 1.17 e 1.18.

1.5 Relações de Ordem no Conjunto dos Intervalos

Uma maneira de ordenar os elementos do conjunto dos números reais é utilizar a comparação "menor que ou igual a". Essa organização dos elementos de $\mathbb{R}$ é importante em diferentes contextos, como manipulações algébricas, resolução de inequações, ou ainda na definição de conceitos como limites, supremos e ínfimos, essenciais no cálculo e análise matemática.

A relevância de poder comparar e organizar os elementos de um conjunto não se restringe aos números reais, e será de grande valia no contexto do conjunto de intervalos $\mathcal{I}$. O conceito que permite realizar estas comparações é denominado relação de ordem, conforme será definido adiante.

Relações de ordem podem ser exploradas em diferentes conjuntos, em particular no conjunto dos intervalos $\mathcal{I}$, o qual é o foco deste texto. Devido à variedade nas nomenclaturas e notações associadas às relações de ordem presentes em diferentes referências bibliográficas, apresentaremos a seguir um breve resumo[3] sobre este tópico de forma geral, isto é, sem nos restringirmos ao conjunto $\mathcal{I}$. Posteriormente, concentraremos nossa atenção nas relações de ordem específicas em $\mathcal{I}$.

Antes de abordar formalmente uma relação de ordem, relembremos o significado de uma relação do ponto de vista matemático. Uma relação sobre um conjunto C especifica pares de elementos de C que têm uma determinada propriedade ou estão de alguma forma inter-relacionados. Formalmente, uma relação $\mathcal{R}$ sobre C é um subconjunto do produto cartesiano $C \times C$. Se $(x, y) \in \mathcal{R}$, isso indica que o elemento x está relacionado ao elemento y pela relação $\mathcal{R}$, sendo denotado também por $x\mathcal{R}y$.

Podemos definir diferentes relações sobre um determinado conjunto. O exemplo a seguir apresenta algumas possibilidades de relações sobre o conjunto dos números reais.

Exemplo 1.15. *Cada um dos subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a seguir é uma relação sobre $\mathbb{R}$:*

- $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \geq y\}$,
- $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \leq y\}$ *e*
- $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x < y\}$.

Em particular, $(8, 9) \notin \mathcal{R}_1$, mas $(8, 9) \in \mathcal{R}_2$ e $(8, 9) \in \mathcal{R}_3$. Estas duas últimas afirmações podem ser escritas na forma $8\mathcal{R}_2 9$ e $8\mathcal{R}_3 9$, respectivamente.

[3] O leitor que tiver interesse em saber um pouco mais sobre relações de ordem pode consultar o livro An Introduction to Set Theory and Topology [9] ou Álgebra Moderna [7].

Exemplo 1.16. *Seja C o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma relação $\mathcal{R}_I$ sobre C é dada pela inclusão de conjuntos. Isto é,*

$$\mathcal{R}_I = \{(X,Y) \in C \times C; X \subseteq Y\}.$$

Em particular, esta relação pode ser empregada considerando o conjunto dos intervalos, isto é, $C = \mathcal{I}$. Neste sentido temos, por exemplo, que $[1,2]\mathcal{R}_I[0,5]$, ou ainda $[-7,\sqrt{2}]\mathcal{R}_I[-10,5]$.

Definição 1.7. *Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto C, e sejam x, y e z elementos quaisquer de C. A relação $\mathcal{R}$ é dita*

1. ***transitiva**: se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ implica em $x\mathcal{R}z$.*
2. ***reflexiva**: se $x\mathcal{R}x$.*
3. ***irreflexiva**: se $\neg x\mathcal{R}x$, isto é, $(x,x) \notin \mathcal{R}$.*
4. ***simétrica**: se $x\mathcal{R}y$ implica em $y\mathcal{R}x$.*
5. ***antissimétrica**: se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ implica em $x = y$.*

Note que a relação $\mathcal{R}_2$ definida no Exemplo 1.15 é transitiva, reflexiva e antissimétrica. Estas são as condições para uma relação ser chamada de relação de ordem parcial ampla[4].

Definição 1.8. *Uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto C é chamada de **relação de ordem parcial ampla** se é transitiva, reflexiva e antissimétrica.*

A relação de ordem sobre $\mathcal{I}$ dada pela inclusão (Exemplo 1.16) é transitiva, reflexiva e antissimétrica. Logo $\mathcal{R}_I$ é uma relação de ordem parcial ampla em $\mathcal{I}$. Outra ordem ordem parcial ampla sobre $\mathcal{I}$ bastante utilizada é a relação de Kulish-Miranker [13].

Proposição 1.20. *A relação de Kulish-Miranker ($\mathcal{R}_{KM}$) sobre $\mathcal{I}$ dada por*

$$\mathcal{R}_{KM} = \{(X,Y) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}; \underline{X} \leq \underline{Y} \text{ e } \overline{X} \leq \overline{Y}\}$$

é uma relação de ordem parcial ampla.

Demonstração: Sejam X, Y e Z elementos quaisquer de $\mathcal{I}$. Provemos que $\mathcal{R}_{KM}$ é transitiva, reflexiva e antissimétrica.

[4] Dependendo da referência bibliográfica, tal relação pode ser chamada de **relação de ordem parcial não estrita**, **relação de ordem parcial**, ou ainda simplesmente de **relação de ordem**.

- Transitiva.
  Se $X\mathcal{R}_{KM}Y$ e $Y\mathcal{R}_{KM}Z$, então, pela definição da relação $\mathcal{R}_{KM}$, teremos que
  $$\underline{X} \leq \underline{Y}, \;\; \overline{X} \leq \overline{Y}, \;\; \underline{Y} \leq \underline{Z} \;\text{ e }\; \overline{Y} \leq \overline{Z}.$$
  De primeira e da terceira desigualdade segue que
  $$\underline{X} \leq \underline{Y} \leq \underline{Z},$$
  enquanto a segunda e a quarta desigualdade implicam em
  $$\overline{X} \leq \overline{Y} \leq \overline{Z}.$$
  Ou seja, $\underline{X} \leq \underline{Z}$ e $\overline{X} \leq \overline{Z}$, donde $X\mathcal{R}_{KM}Z$.
- Reflexiva.
  Como $\overline{X} \leq \overline{X}$ e $\underline{X} \leq \underline{X}$, então $X\mathcal{R}_{KM}X$.
- Antissimétrica.
  Se $X\mathcal{R}_{KM}Y$ e $Y\mathcal{R}_{KM}X$, então, pela definição da relação $\mathcal{R}_{KM}$, teremos que
  $$\underline{X} \leq \underline{Y}, \;\; \overline{X} \leq \overline{Y}, \;\; \underline{Y} \leq \underline{X} \;\text{ e }\; \overline{Y} \leq \overline{X}.$$
  A primeira e a terceira desigualdade garantem que $\underline{X} = \underline{Y}$, enquanto a segunda e a quarta desigualdade implicam em $\overline{X} = \overline{Y}$. Logo, $X = Y$.

■

Com respeito às relações sobre $\mathbb{R}$ definidas no Exemplo 1.15, é fácil verificar que as relações $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são relações de ordem parcial ampla. Já a relação $\mathcal{R}_3$ não pois, apesar de ser transitiva, não é reflexiva uma vez que não é válido que $x < x$. De fato, $\mathcal{R}_3$ é irreflexiva. Relações com estas propriedades (transitiva e irreflexiva) são chamadas de relações de ordem parcial estrita.

Definição 1.9. *Uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto C é chamada de **relação de ordem parcial estrita** se é transitiva e irreflexiva.*

Vale notar que alguns autores exigem que a relação de ordem parcial estrita além de transitiva e irreflexiva, seja também assimétrica[5]. Mas é possível provar que se a relação é transitiva e irreflexiva, então ela será também assimétrica, por isso não há necessidade de incluir esta condição adicional na definição.

[5] Uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto C é dita assimétrica quando $x\mathcal{R}y \Rightarrow \neg y\mathcal{R}x$, para todo x e $y \in C$.

Na relação proposta por Kulish-Miranker é possível que dois intervalos não disjuntos estejam relacionados. Por exemplo $[1,3]\mathcal{R}_{KM}[2,4]$, uma vez que $1 \leq 2$ e $3 \leq 4$. Já a relação proposta por Moore [19] não permitirá que os intervalos relacionados possuam elementos em comum. De fato tal relação será uma relação de ordem parcial estrita sobre $\mathcal{I}$.

Proposição 1.21. *A relação $\mathcal{R}_M$ sobre $\mathcal{I}$ dada por*

$$\mathcal{R}_M = \{(X,Y) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}; \overline{X} < \underline{Y}\}$$

é uma relação de ordem parcial estrita.

Demonstração: Sejam X, Y e Z elementos quaisquer de $\mathcal{I}$. Provemos que $\mathcal{R}_M$ é transitiva e irreflexiva.

- Transitiva.
  Se $X\mathcal{R}_M Y$ e $Y\mathcal{R}_M Z$, então

  $$\overline{X} \leq \underline{Y}, \quad \text{e} \quad \overline{Y} \leq \underline{Z}.$$

  Mas $\underline{Y} \leq \overline{Y}$, uma vez que $Y \in \mathcal{Y}$. Combinando esta desigualdade com as anteriores temos

  $$\overline{X} \leq \underline{Y} \leq \overline{Y} \leq \underline{Z}.$$

  Isto é, $\overline{X} \leq \underline{Z}$ e, assim, $X\mathcal{R}_M Z$.

- Irreflexiva.
  Como é $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ é um intervalo, então $\underline{X} \leq \overline{X}$. Logo, é impossível que $\overline{X} < \underline{X}$. Isto é, $\neg X\mathcal{R}_M X$.

∎

Apresentamos aqui três diferentes relações de ordem parcial para o conjunto dos intervalos $\mathcal{I}$, sendo duas amplas e uma estrita. A Figura 1.6 ilustra as posições de dois conjuntos X e Y para que estes estejam relacionados de acordo com cada uma destas relações.

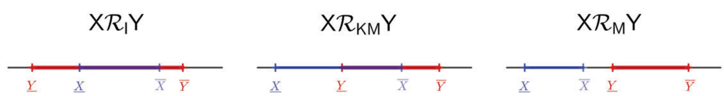

Figura 1.6: Representação de três diferentes relações de ordem parcial em $\mathcal{I}$.

Vejamos um exemplo ilustrando as diferenças entre estas três relações de ordem parcial em $\mathcal{I}$.

Exemplo 1.17. *Considere as relações de ordem parciais $\mathcal{R}_I$, $\mathcal{R}_{KM}$ e $\mathcal{R}_M$ definidas previamente. Vamos verificar se os intervalos X e Y estão relacionados com respeito a cada uma destas relações, em cada um dos casos.*

- *Para $X = [1,2]$ e $Y = [0,2]$ teremos $X \subseteq Y$, ou seja*

  $$X\mathcal{R}_IY.$$

  Mas $\underline{X} = 1 > 0 = \underline{Y}$, logo X e Y não estão relacionados pela relação de ordem $\mathcal{R}_{KM}$. Estes intervalos também não estarão relacionados considerando $\mathcal{R}_M$ visto que $\overline{X} = 2 > 0 = \underline{Y}$.

- *Para $X = [-1,2]$ e $Y = [0,2]$ teremos $\underline{X} = -1 < 0 = \underline{Y}$ e $\overline{X} = 2 \leq 2 = \overline{Y}$, ou seja*

  $$X\mathcal{R}_{KM}Y.$$

  Mas agora $X \not\subseteq Y$, isto é, X e Y não estão relacionados considerando-se $\mathcal{R}_I$. Além disso, $\overline{X} = 2 > 0 = \underline{Y}$, isto é, X e Y também não estão relacionados por $\mathcal{R}_M$.

- *Para $X = [-1,0]$ e $Y = [1,2]$ teremos $\overline{X} = 0 < 1 = \underline{Y}$, ou seja*

  $$X\mathcal{R}_MY.$$

  Além disso, $\underline{X} = -1 < 1 = \underline{Y}$ e $\overline{X} = 0 < 2 = \overline{Y}$, donde

  $$X\mathcal{R}_{KM}Y.$$

  Mas agora $X \not\subseteq Y$, ou seja, X e Y não estão relacionados pela relação de ordem $\mathcal{R}_I$.

Neste exemplo vimos que o caso onde $X\mathcal{R}_MY$ também satisfez $X\mathcal{R}_{KM}Y$. Isto sempre será válido, conforme irá assegura a Proposição 1.22. Ou seja, a relação $\mathcal{R}_{KM}$ é mais abrangente do que a relação $\mathcal{R}_M$, ou ainda, de maneira mais formal, $\mathcal{R}_M \subset \mathcal{R}_{KM}$.

Proposição 1.22. *Sejam $\mathcal{R}_{KM}$ e $\mathcal{R}_M$ as relações sobre $\mathcal{I}$ definidas nas Proposições 1.20 e 1.21, respectivamente. Então para quaisquer $X, Y \in \mathcal{I}$ tem-se que*

$$X\mathcal{R}_MY \Rightarrow X\mathcal{R}_{KM}Y.$$

Demonstração: Se $X\mathcal{R}_MY$, então

$$\overline{X} < \underline{Y}.$$

Mas $\underline{X} \leq \overline{X}$ e $\underline{Y} \leq \overline{Y}$, donde segue que

$$\underline{X} \leq \overline{X} < \underline{Y} \leq \overline{Y}.$$

Isto garante que

$$\underline{X} < \underline{Y} \text{ e } \overline{X} < \overline{Y}.$$

Ou seja, $X\mathcal{R}_{KM}Y$. ■

Caso todos os elementos de um conjunto possam ser comparados por uma relação de ordem parcial $\mathcal{R}$, então esta relação de ordem é chamada de total (ou linear). Isto é, para quaisquer x e y do conjunto, $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$ acontece. Note que esta definição não se aplica para relações de ordem estrita, uma vez que a propriedade irreflexiva garante que um elemento não é comparável com ele mesmo.

No caso das relações de ordem parcial amplas abordadas neste texto ($\mathcal{R}_I$ e $\mathcal{R}_{KM}$), nenhuma delas é total. Por exemplo, os intervalos $[1,3]$ e $[2,4]$ não são comparáveis pela relação $\mathcal{R}_I$ visto que $[1,3] \nsubseteq [2,4]$ e $[2,4] \nsubseteq [1,3]$. No caso da relação de Kulish-Miranker, podemos observar que os intervalos $[1,4]$ e $[2,3]$ são incomparáveis. Existem outras relações totais que refinam a ordem de Kulish-Miranker, mas que não serão abordadas neste texto[6].

Daqui em diante, iremos utilizar apenas a relação de ordem parcial estrita $\mathcal{R}_M$. Para simplificar a notação, utilizaremos o símbolo $<$, em vez de $\mathcal{R}_M$. Isto é, diremos que o intervalo X é menor do que o intervalo Y ($X < Y$) quando $X\mathcal{R}_MY$.

Definição 1.10. *Considere os intervalos $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ e $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}] \in \mathcal{I}$. Dizemos que X* ***é menor que*** *Y, e denotamos por $X < Y$, se*

$$\overline{X} < \underline{Y}.$$

No caso em que $X < 0$, dizemos que o intervalo X é ***negativo****. No caso em que $X > 0$, dizemos que o intervalo X é* ***positivo****.*

Note que $X < Y$ significa que todos os elementos de X são menores que todos os elementos de Y. No caso particular em que $X < 0$, X é menor que o único elemento do intervalo degenerado $[0,0] = 0$ e, então, todos os seus elementos são números reais negativos. Analogamente, X é um intervalo positivo quando todos os seus elementos são números reais positivos.

Dado um número real x não nulo, sabemos que este número será positivo ou negativo (de forma excludente). Isto não se aplica ao caso dos intervalos. Isto é, além do intervalo degenerado $[0,0]$, existem outros intervalos que não são positivos nem negativos. Por exemplo, o intervalo $[-1,1]$.

[6] O leitor que tiver interesse pode encontrar mais informações sobre este assunto na referência [3].

1.6 Exercícios

1. Considere $X = [-10,\ 2] \in \mathcal{I}$. Determine as medidas $w(X)$, $|X|$ e $m(X)$ utilizando a Definição 1.2 e faça uma ilustração para comparar os resultados.

2. Em cada item, calcule o que se pede considerando $A = [-2,\ 5]$, $B = [6,\ 8]$, $C = [-3,\ -1] \in \mathcal{I}$ e a Definição 1.2.

   a. $|A|$, $m(A)$ e $w(A)$.
   b. $|A + B|$, $m(A + B)$ e $w(A + B)$.
   c. $|B - C|$ e $m(B - C)$.
   d. $|A \cdot C|$, $m(A \cdot C)$, $w(A \cdot C)$, $|A| \cdot |C|$ e $w(A) \cdot w(C)$.

3. Sendo $Y = [-2,\ 16] \in \mathcal{I}$, encontre sua Fórmula Usual (Equação (1.4.13)).

4. Sejam $A,\ B \in \mathcal{I}$ quaisquer. Demonstre as seguintes propriedades, usando a Definição 1.2 e a Proposição 1.3.

   a. $|-A| = |A|$.
   b. $m(-A) = -m(A)$.
   c. $w(-A) = w(A)$.
   d. $m(A + B) = m(A) + m(B)$.
   e. $w(A + B) = w(A) + w(B)$.
   f. Se $A \subseteq B$ então $w(A) \leq w(B)$.
   g. Se $A \subseteq B$ então $|A| \leq |B|$.

5. Sejam X, Y, Z intervalos simétricos de $\mathcal{I}$. Demonstre que
$$X \cdot (Y \pm Z) = |X| \cdot (|Y| + |Z|) \cdot [-1, 1].$$

6. Considere os intervalos $A = [-1,\ 4]$, $B = [2,\ 5]$, $C = [-3,\ 2] \in \mathcal{I}$. Em cada item, calcule o que se pede usando a Definição 1.3 e as Proposições 1.4, 1.7, 1.9, 1.11 e 1.14.

   a. $A + B$.
   b. $B - C$.
   c. $A \cdot C$.
   d. $A \cdot B \cdot C$.
   e. $A \cdot (B + C)$.
   f. $A \cdot B + A \cdot C$.

g. $\dfrac{1}{B}$.

h. $\dfrac{A}{B}$.

i. $A \cap B$.

j. $A \cap (-C)$.

k. $B \underline{\cup} C$.

l. $(A \cap C) \cdot B$.

m. $(A \cap C) + B$.

n. $(A + B) \cap (C + B)$.

o. $(A - C) \underline{\cup} (B - C)$.

7. Encontre dois intervalos A, $B \in \mathcal{I}$ tais que $A - A = 0$ e $B - B \neq 0$.

8. Determine A, $B \in \mathcal{I}$, com $0 \notin A$ e $0 \notin B$, tais que $\dfrac{A}{A} = 1$ e $\dfrac{B}{B} \neq 1$.

9. Apresente $X, Y, Z \in \mathcal{I}$ que satisfaçam $X \cdot (Y + Z) \subseteq X \cdot Y + X \cdot Z$.

10. (Demonstração da Proposição 1.15) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in \mathcal{I}$ com $0 \notin Y$. Demonstre que

$$w\left(\frac{1}{Y}\right) \leq \left|\frac{1}{Y}\right|^2 w(Y).$$

(Dica: utilize as Definições de comprimento e módulo de um intervalo 1.2).

Capítulo 2

Funções Intervalares

Neste capítulo, estamos interessados em estudar funções que agem sobre intervalos, chamadas funções intervalares. Estas funções possuem domínio e contradomínio contidos em $\mathcal{I}$ ou, de uma maneira mais geral, em $\mathcal{I}^n = \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \cdots \times \mathcal{I}$. Por exemplo, se queremos uma função entre intervalos que cumpra um papel similar ao que desempenha a função real afim

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

com a e b reais fixos, podemos explorar o que ocorrerá se trocarmos a variável real x por uma variável intervalar $X \in \mathcal{I}$. Uma forma de abordar isto seria considerar a seguinte adaptação em f

$$F(X) = a \cdot X + [b, b].$$

Note que, para isso, vamos utilizar o produto de um número real por um intervalo $(a \cdot X)$ e a soma intervalar. Daí a importância da definição das operações básicas intervalares estabelecida no capítulo anterior.

Mas será que esta adaptação de uma função real para uma função intervalar é única? Quais propriedades da função real original terá a função intervalar? Estas são questões centrais que discutimos ao longo deste capítulo. Também é apresentado neste capítulo que funções intervalares podem ser definidas sem qualquer necessidade de se assemelhar a uma função real previamente fornecida, embora uma boa parte das aplicações da Análise Intervalar objetivam algum tipo de semelhança.

Iniciamos este capítulo definindo formalmente o que são funções intervalares e como obter determinadas funções intervalares a partir de funções reais. Apresentamos a definição de função intervalar racional, assim como a extensão intervalar natural de uma função real. Apresentamos então o Teorema Fundamental da Análise Intervalar, um dos resultados mais importantes da Análise Intervalar (se não o mais importante).

Em seguida, exploramos alguns conceitos de continuidade de funções intervalares fundamentais para a Análise Intervalar, assim como o estudo de continuidade de funções reais é fundamental para Análise Real. Finalizamos o capítulo abordando sobre subdivisões de intervalos e refinamentos de funções intervalares, que são conceitos relevantes para melhorar as estimativas que uma extensão intervalar pode fornecer em relação a função real correspondente.

Para efeito do que é explorado no Capítulo 4, em que tratamos de encontrar Zeros de funções, é suficiente lidar com funções intervalares cujo domínio e contradomínio são subconjuntos de $\mathcal{I}$. Mas muitos dos resultados deste capítulo são válidos para funções intervalares de forma geral (domínio e contradomínio em espaços intervalares n-dimensionais). A fim de abordar a Teoria de Análise Intervalar de maneira um pouco mais geral, mas ao mesmo tempo não deixar a escrita tão carregada, optamos por apresentar os resultados deste capítulo considerando funções intervalares em várias variáveis intervalares mas com contradomínio em $\mathcal{I}$.

Conforme mencionado anteriormente, existem outras formas de definir aritmética em intervalos diferentes da abordada neste texto. Portanto, é importante ressaltar que o estudo da extensão intervalar apresentada neste capítulo se baseia na aritmética intervalar usual, que foi previamente discutida.

2.1 Introdução às Funções Intervalares

Como já adiantamos no início deste capítulo, a nossa intenção é trabalhar com funções cujo domínio e contradomínio são subconjuntos do Espaço Intervalar n-dimensional. Este espaço é dado pelo produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathcal{I}$, com $n = 1, 2, \ldots$, em que denotaremos por $\mathcal{I}^n$ (análogo ao Espaço Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$). Isto é,

$$\mathcal{I}^n = \underbrace{\mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \cdots \times \mathcal{I}}_{n \text{ vezes}}.$$

Assim, um elemento $\mathbf{X} \in \mathcal{I}^n$, chamado de ponto de $\mathcal{I}^n$, é uma n-upla de intervalos fechados de números reais. Ou seja, $\mathbf{X} = (X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$, em que $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n \in \mathcal{I}$.

Definição 2.1. *Uma função F é dita **função intervalar** se*

$$F : D \longrightarrow C, \text{ com } D \subseteq \mathcal{I}^n \text{ e } C \subseteq \mathcal{I}^m.$$

Exemplo 2.1. *Seja a função intervar F dada por*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{I} \\ [\underline{X},\ \overline{X}] &\longmapsto [\underline{X},\ \overline{X} + 10]. \end{aligned}$$

Neste caso, tanto o domínio quanto o contradomínio são o Espaço Intervalar de dimensão 1. Isto é, $C = D = \mathcal{I}$. Ou seja, a cada intervalo *de $\mathcal{I}$, a função F retorna outro intervalo de $\mathcal{I}$. Vamos calcular F no intervalo $[-1,\ 5]$, assim*

$$F([-1,\ 5]) = [-1,\ 5+10] = [-1,\ 15].$$

Calculemos agora F no intervalo degenerado $[2,2]$. Então,

$$F([2,2]) = [2,\ 2+10] = [2,12].$$

Exemplo 2.2. *Seja F a função intervalar dada por*

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathcal{I} \\ & X & \longmapsto & -3 \cdot X + [1,1]. \end{array}$$

Note que esta F tem a forma da função mencionada na introdução deste capítulo, considerando $a = -3$ e $b = 1$. Assim como no Exemplo 2.1, o domínio e o contradomínio de F é o próprio $\mathcal{I}$. Mas neste caso, se aplicarmos F em intervalos degenerados obteremos também um intervalo degenerado. De fato,

$$F([x,x]) = -3 \cdot [x,x] + [1,1] = [-3x+1, -3x+1].$$

Exemplo 2.3. *Seja F a função intervalar dada por*

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathcal{I}^3 & \longrightarrow & \mathcal{I} \\ & (X_1, X_2, X_3) & \longmapsto & X_1 + 2 \cdot X_2 - X_3. \end{array}$$

Neste caso o domínio D de F é o Espaço Intervalar de dimensão 3, enquanto o contradomínio $C = \mathcal{I}$. Isto é, a cada tripla ordenada de intervalos, a função retornará um intervalo. Por exemplo,

$$F\left([0,1],[1,2],[2,2]\right) = [0,1] + 2 \cdot [1,2] - [2,2] = [0,3].$$

Exemplo 2.4. *Seja $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ e $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ a função real dada por $g(x) = \sqrt{x}$. Definamos a função intervalar F agindo na variável X como a imagem da função real g restrita a este intervalo. Isto é,*

$$\begin{array}{rccl} F: & D & \longrightarrow & \mathcal{I} \\ & X & \longmapsto & F(X) = Im(g)\left|_{x\, \in X}\right. \end{array},$$

em que $D = \{X \in \mathcal{I} \mid X > 0\}$. Por exemplo,

$$F\left([0,4]\right) = Im(g)\left|_{x\, \in [0,4]}\right. = [0,2].$$

Note que $Im(g)\left|_{x\, \in X}\right.$ de fato será sempre um intervalo de $\mathcal{I}$ uma vez que g é contínua.

2.2 Imagem Intervalar de uma Função Real

Na seção anterior, vimos alguns exemplos de funções intervalares. No caso do Exemplo 2.4, a função intervalar foi definida a partir da imagem de uma função real. Isto é, a função intervalar aplicada na variável (intervalar) X correspondia a imagem da função real com domínio restrito ao intervalo X. Esta ideia pode ser aplicada de forma geral, e a função intervalar obtida desta maneira é chamada de Extensão Unida da função real.

Antes de apresentar a definição formal de Extensão Unida, vamos introduzir uma notação que será útil ao longo do texto. Dado $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathcal{I}^n$ e $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, denotaremos $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ caso $x_i \in X_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

Definição 2.2. *A* ***extensão unida*** *de uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função intervalar $\overline{f} : \mathcal{I}^n \longrightarrow \mathcal{I}$ dada por*

$$\overline{f}(\boldsymbol{X}) = Im(f)\,|_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}}\,,$$

em que $Im(f)\,|_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}} = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}} \{f(\boldsymbol{x})\}$.

A definição de extensão unida exige que a função real seja contínua. Neste caso, sabe-se[1] que f admitirá máximo e mínimo no conjunto compacto X, e que

$$\overline{f}(\mathbf{X}) = Im(f)\,|_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} = [\min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X}\},\ \max\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}].$$

Isto não só garante uma outra forma de encontrar o resultado de $\overline{f}(\mathbf{X})$, mas também garante que o resultado $\overline{f}(\mathbf{X})$ é de fato um intervalo, o que é essencial para que a função intervalar $\overline{f}$ esteja bem definida em $\mathcal{I}$.

Uma vez que $\overline{f}(\mathbf{X})$ é definida via a imagem de f restrita ao domínio $\mathbf{X}$, usaremos o termo "imagem intervalar" para $\overline{f}(\mathbf{X})$. Além disso, apesar de f agir em enuplas de números reais, usaremos a notação $f(\mathbf{X})$ para representar o mesmo conjunto que $Im(f)\,|_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}$. Isto é, $\overline{f}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})$.

Apesar da definição de extensão unida dada em 2.2 considerar uma função real com domínio sendo o $\mathbb{R}^n$, é possível considerar também funções reais com domínio $D \subsetneq \mathbb{R}^n$. Podemos escrever este conjunto na forma $D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$, onde $D_i \subseteq \mathbb{R}$. Neste caso o domínio da extensão unida será $\widetilde{D} = \widetilde{D}_1 \times \widetilde{D}_2 \times \cdots \times \widetilde{D}_n \subset \mathcal{I}^n$, onde $\widetilde{D}_i \subseteq \mathcal{I}$ é o conjunto formado por todos os intervalos fechados e limitados contidos em D_i. Este é o caso do Exemplo 2.4.

[1] Trata-se do Teorema de Weierstrass que garante que em um intervalo fechado, uma função contínua admite valor máximo e mínimo. O leitor interessado neste teorema pode consultar, por exemplo, o livro Curso de Análise [16].

Note ainda que a função intervalar $\overline{f}$ aplicada em um intervalo degenerado será equivalente a função f aplicada no elemento do intervalo degenerado. Isto é,

$$\overline{f}([x,x]) = [f(x), f(x)].$$

Exemplo 2.5. *Seja* $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$. *Se* $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$. *Então a extensão unida de* f *será a função* $\overline{f}$ *tal que*

$$\overline{f}(X) = f(X) = \begin{cases} \left[\underline{X}^2,\ \overline{X}^2\right], \ se\ 0 \le \underline{X} \le \overline{X}, \\ \left[\overline{X}^2,\ \underline{X}^2\right], \ se\ \underline{X} \le \overline{X} \le 0, \\ \left[0,\ \max\{\underline{X}^2,\ \overline{X}^2\}\right], \ se\ \underline{X} < 0 < \overline{X}. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Note que esta é uma forma de definir a potência X^2 *em intervalos, no entanto, vamos aproveitar este exemplo para mostrar que* X^2 *definida desta forma (via extensão unida de* $f(x) = x^2$*), não resulta sempre no mesmo intervalo que obtemos ao fazer* $X \cdot X$. *De fato,* $X \cdot X = [\min S, \max S]$, *em que* $S = \{\underline{X}\underline{X},\ \underline{X}\overline{X},\ \overline{X}\overline{X}\}$. *Em particular para* $X = [-1,\ 1]$ *teremos*

$$\overline{f}([-1,\ 1]) = [-1,\ 1]^2 = [0,\ 1],$$

enquanto

$$[-1,\ 1] \cdot [-1,\ 1] = [-1,\ 1].$$

E neste sentido, podemos concluir que trata-se duas funções intervalares distintas. Na Figura 2.1 buscamos esclarecer essa diferença através de uma ilustração. Nesta figura "$[-1,1](Im(f))$*" refere-se ao resultado considerando a extensão unida (imagem da função* f*), enquanto "*$[-1,1]\cdot[-1,1](AI)$*" refere-se ao resultado obtido usando a aritimética intervalar (multiplicação intervalar).*

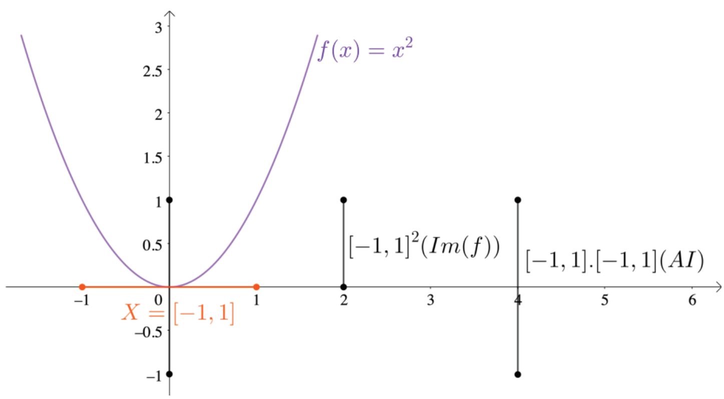

Figura 2.1: Imagem Ilustrativa para o Exemplo 2.5, com $X = [-1,\ 1]$.

Note que no Exemplo 2.5, $f([-1,\ 1]) = [0,\ 1] \subset [-1,\ 1]$, ou seja, o resultado obtido via multiplicação intervalar nos fornece uma sobreestimativa para a imagem intervalar de f. Este fenômeno ocorre devido à chamada **dependência de intervalo**. Isto é, se assumirmos que x é uma variável desconhecida no intervalo X, então quando formamos o produto $x \cdot x$ o segundo fator x é o mesmo que o primeiro, mesmo que a única informação seja apenas que x esteja em X. Em contrapartida, na definição de produto intervalar $X \cdot X$, assume-se que os valores no primeiro e segundo fatores variam independentemente. Por exemplo, $-1 \in [-1,1] \cdot [-1,1]$ pois é o resultado de $(-1) \cdot 1$, mas $-1 \notin f([-1,1])$ pois não existe $x \in [-1,1]$ tal que $x^2 = -1$.

De forma geral, dado n natural podemos definir a enésima potência de um intervalo X via extensão unida. Isto é, $X^n = \{x^n \mid x \in X\}$. Observe que podemos reescrever o intervalo resultante da seguinte forma:

$$X^n = \begin{cases} \left[\underline{X}^n,\ \overline{X}^n\right], \text{ se } \underline{X} > 0 \text{ ou se n é ímpar}, \\ \left[\overline{X}^n,\ \underline{X}^n\right], \text{ se } \overline{X} < 0 \text{ e se n é par}, \\ \left[0,\ |X|^n\right], \text{ se } 0 \in X \text{ e se n é par}. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Assim como no caso $n = 2$, o resultado de X^n não coincide necessariamente com o resultado de realizar n vezes a multiplicação intervalar de X . Além disso, é fácil observar que

$$X^n \subseteq \underbrace{X \cdot X \cdot \ldots \cdot X}_{n \text{ vezes}},$$

uma vez que para qualquer $y \in X^n$ existe $x \in X$ tal que $y = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$, donde segue que $y \in X \cdot X \cdot \ldots \cdot X$.

Exemplo 2.6. *Sejam $X = [1,2]$ e $Y = [-1,3]$. Usando (2.2.2) temos que*

$$X^4 = [1^4, 2^4] = [1,16] \ \ e \ \ Y^4 = [0, |Y|^4] = [0, 3^4] = [0, 81].$$

Por outro lado,

$$X \cdot X \cdot X \cdot X = [1,16] \ \ e \ \ Y \cdot Y \cdot Y \cdot Y = [-27, 81].$$

Ou seja, neste caso $X^4 = X \cdot X \cdot X \cdot X$, mas $Y^4 \subsetneq Y \cdot Y \cdot Y \cdot Y$.

Observe no Exemplo 2.6 que $X \subset Y$ e obtivemos que $X^4 \subset Y^4$. Este resultado será válido para quaisquer intervalos X e Y, bem como para qualquer valor de n. Mais do que isso, a proposição a seguir nos garante que será válida para qualquer função intervalar que seja extensão unida de alguma função real.

Proposição 2.1. *Seja* $\overline{f} : \widetilde{D} \longrightarrow \mathcal{I}$ *a extensão unida da função real contínua* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *com* $D \subseteq R^n$. *Então para quaisquer* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *e* $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \in \widetilde{D}$ *tais que* $X_i \subseteq Y_i$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$, *teremos que*

$$\overline{f}(\boldsymbol{X}) \subseteq \overline{f}(\boldsymbol{Y}).$$

Demonstração: Seja $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \widetilde{D}$. Como $X_i \subseteq Y_i$ então

$$\begin{aligned} \overline{f}(\mathbf{X}) &= \overline{f}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ &= \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i\} \\ &\subseteq \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in Y_i\} \\ &= \overline{f}(\mathbf{Y}). \end{aligned}$$

■

2.3 Extensão Intervalar de uma Função Real

Na seção anterior vimos como utilizar a imagem de uma função real f para definir uma função intervalar $\overline{f}$ chamada de extensão unida de f. Conforme salientado anteriormente, esta função intervalar $\overline{f}$ satisfaz

$$\overline{f}([x, x]) = [f(x), f(x)].$$

Isto é, a função intervalar aplicada no intervalo degenerado $[x, x]$ é igual ao intervalo degenerado dado pelo resultado da função real avaliada em x. Existem outras funções intervalares, diferentes da extensão unida, que também admitem esta propriedade. Tais funções são chamadas de Extensão Intervalar de uma função real f, conforme definição a seguir.

Definição 2.3. *Sejam* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *com* $D \subset \mathbb{R}^n$, *e* $F : \mathcal{I}^n \longrightarrow \mathcal{I}$. *A função intervalar* F *é dita uma* ***extensão intervalar de*** f *se para qualquer* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ *for válido que*

$$\begin{aligned} F([x_1,\ x_1], \ldots,\ [x_n,\ x_n]) &= [f(x_1, \ldots, x_n),\ f(x_1, \ldots, x_n)] \\ &= f(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Note que a última igualdade é um abuso de notação que refere-se a associação entre números reais e intervalos degenerados, dada pela Definição 1.1.

Com esta nomenclatura, temos que a extensão unida de uma função real f é também uma extensão intervalar de f.

Exemplo 2.7. *Considere a função real tal que*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1-x. \end{aligned}$$

Vamos definir F com regra análoga a de f, apenas adequando as operações de números reais para intervalos. Isto é:

$$\begin{aligned} F(X) &= 1 - X \\ &= [1,\ 1] - [\underline{X},\ \overline{X}] \\ &= [1,\ 1] + [-\overline{X},\ -\underline{X}] \\ &= [1-\overline{X},\ 1-\underline{X}]. \end{aligned}$$

Note que $F([x,x]) = f(x)$, logo F é uma extensão intervalar de f. Por outro lado, como f é contínua, teremos ainda que

$$\begin{aligned} f(X) &= Im(f)\,|_{x\,\in X} \\ &= [\min\{f(x) \mid x \in X\},\ \max\{f(x) \mid x \in X\}] \\ &= [1-\overline{X},\ 1-\underline{X}]. \end{aligned}$$

Portanto $F(X) = f(X)$, $\forall X \in \mathcal{I}$. Ou seja, neste caso a extensão intervalar F de f coincide com a extensão unida de f.

Vejamos no exemplo a seguir que a extensão intervalar não é necessariamente única e, consequentemente, nem sempre irá coincidir com a extensão unida. Ou seja, a extensão unida é um caso particular de extensão intervalar.

Exemplo 2.8. *Considere f e g funções reais dadas por*

$$\begin{aligned} f:\ [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(1-x) \end{aligned} \qquad e \qquad \begin{aligned} g:\ [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - x^2. \end{aligned}$$

Note que $f = g$. Vamos considerar agora as seguintes extensões intervalares de f e g, respectivamente, com $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \subseteq [0,\ 1]$:

$$F(X) = X \cdot (1-X) \qquad e \qquad G(X) = X - X^2.$$

Lembremos que $X^2 \neq X \cdot X$. Dessa forma, iremos trabalhar com F e G separadamente. Assim,

$$\begin{aligned} F(X) &= [\underline{X},\ \overline{X}] \cdot ([1,\ 1] - [\underline{X},\ \overline{X}]) \\ &= [\underline{X},\ \overline{X}] \cdot ([1,\ 1] + [-\overline{X},\ -\underline{X}]) \\ &= [\underline{X},\ \overline{X}] \cdot [1-\overline{X},\ 1-\underline{X}] \\ &= [\min S,\ \max S], \end{aligned}$$

em que $S = \{\underline{X}(1-\overline{X}),\ \underline{X}(1-\underline{X}),\ \overline{X}(1-\overline{X}),\ \overline{X}(1-\underline{X})\}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} G(X) &= [\underline{X},\ \overline{X}] - ([\underline{X},\ \overline{X}])^2 \\ &= [\underline{X},\ \overline{X}] - [\underline{X}^2,\ \overline{X}^2],\ \textit{pois } X \subseteq [0,\ 1] \\ &= [\underline{X},\ \overline{X}] + [-\overline{X}^2,\ \underline{X}^2] \\ &= [\underline{X} - \overline{X}^2,\ \overline{X} - \underline{X}^2]. \end{aligned}$$

Logo, se fizermos $X = [0,\ 1]$, *então* $F([0,\ 1]) = [0,\ 1]$ *e* $G([0,\ 1]) = [-1,\ 1]$, *donde* $F(X) \neq G(X)$. *Dessa forma, mesmo com* $f = g$, *estas deram origem a duas extensões intervalares distintas. Note que esta diferença ocorre pois não temos a propriedade de distributividade para as operações aritméticas intervalares.*

Além disso, note que

$$f([0,\ 1]) = g([0,\ 1]) = \left[0,\ \frac{1}{4}\right].$$

Logo, $F([0,\ 1]) \neq f([0,\ 1])$ *e* $G([0,\ 1]) \neq g([0,\ 1])$. *Isto é, nem* F *e nem* G *são extensões unidas da função real* $f = g$.

Contudo, há como definir uma função real equivalente às funções f *e* g *mas tal que sua respectiva generalização para função intervalar avaliada no intervalo* $[0,\ 1]$ *resulte no intervalo* $\left[0,\ \frac{1}{4}\right]$. *Ou seja, tal função intervalar será a extensão unida das funções reais* f *e* g. *Para tal, considere* $h(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ *e sua respectiva generalização*

$$\begin{aligned} H(X) &= \frac{1}{4} - \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right] - \left([\underline{X},\ \overline{X}] - \left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]\right)^2 \\ &= \left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right] - \left[\underline{X} - \frac{1}{2},\ \overline{X} - \frac{1}{2}\right]^2. \end{aligned}$$

Aplicando a definição de potência de intervalos, segue que

$$H(X) = \begin{cases} \left[\frac{1}{4} - \left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^2,\ \frac{1}{4} - \left(\underline{X} - \frac{1}{2}\right)^2\right],\ \textit{se } \underline{X} \geq \frac{1}{2}, \\ \left[\frac{1}{4} - \left(\underline{X} - \frac{1}{2}\right)^2,\ \frac{1}{4} - \left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^2\right],\ \textit{se } \overline{X} \leq \frac{1}{2}, \\ \left[\frac{1}{4} - \max\left\{\left(\underline{X} - \frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^2\right\},\ \frac{1}{4}\right],\ \textit{se } \underline{X} < \frac{1}{2} < \overline{X}. \end{cases}$$

Portanto, $H([0,\ 1]) = \left[0,\ \frac{1}{4}\right]$.

No exemplo anterior vimos um caso em que foi possível definir mais de uma extensão intervalar para uma mesma função real. O próximo resultado nos assegura que isto é possível de ser feito para qualquer função real.

Proposição 2.2. *A extensão intervalar de uma função real nunca é única.*

Demonstração: Seja F uma extensão intervalar de f tal que $F([x,\ x]) = [f(x),\ f(x)] = f(x)$, com x real. Como para intervalos não degenerados temos que $X - X \neq [0,\ 0]$, segue que $F_1(X) = F(X) + X - X$ é diferente de F e também define uma extensão intervalar de f. ■

Vejamos agora um exemplo considerando uma função real de duas variáveis.

Exemplo 2.9. *Seja* $f(x_1,\ x_2) = x_1 + x_2$*, com* $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$*. Então, uma extensão de* f *é dada por* $F(X_1,\ X_2) = X_1 + X_2$ *com* $X_1,\ X_2 \in \mathcal{I}$*, uma vez que*

$$\begin{aligned} F([x_1,\ x_1],\ [x_2,\ x_2]) &= [x_1,\ x_1] + [x_2,\ x_2] \\ &= [x_1 + x_2,\ x_1 + x_2] \\ &= [f(x_1,\ x_2),\ f(x_1,\ x_2)] \\ &= f(x_1,\ x_2), \end{aligned}$$

com $x_1 \in X_1$ *e* $x_2 \in X_2$*. Por outro lado,*

$$f(X_1,\ X_2) = X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in X_1 \text{ e } x_2 \in X_2\}.$$

Então F *é uma extensão de* f *e, necessariamente, será a extensão unida de* f*.*

No Exemplo 2.9 vimos que a função intervalar definida pela adição intervalar é a extensão unida da função real definida pela adição real. O mesmo ocorrerá para as demais operações aritméticas intervalares. Isto é, a função intervalar $F(X, Y) = X \odot Y$ é a extensão unida da função real $f(x, y) = x \odot y$, onde $\odot$ denota uma das operações aritméticas intervalares básicas. Note que isto não contraria o que expomos anteriormente sobre multiplicação intervalar não coincidir com a imagem intervalar da função real pois, naquele caso, estávamos nos referindo a multiplicação de um elemento por ele mesmo. Ou seja, estávamos lidando com a função real $f(x) = x^2$ e com a extensão intervalar $F(X) = X \cdot X$. Mas no caso de $F(x, y) = x \cdot y$ e $F(X, Y) = X \cdot Y$ não teremos a dependência de intervalo uma vez que a operação é realizada com elementos distintos.

Na Proposição 1.18 vimos uma que a extensão intervalar de uma função real f dada por sua extensão unida possui a propriedade de que se um intervalo está contido em outro, suas imagens pela extensão unida obedecerão a mesma inclusão. Esta propriedade recebe o nome de Inclusão Monotônica, como veremos a seguir, e será importante analisar sua validade para outras extensões intervalares.

Definição 2.4. *Seja $F : \mathcal{I}^n \longrightarrow \mathcal{I}$ uma função intervalar. Dizemos que F é **monotônica em relação à inclusão** (ou monotonicamente inclusiva) se a condição*

$$Y_i \subseteq X_i, \ \textit{para}\, i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

implica que

$$F(Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n) \subseteq F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n).$$

Com esta nomenclatura, note que a Proposição 2.1 garante que a extensão unida sempre é uma inclusão monotônica.

2.4 Funções Intervalares Racionais

Várias das funções intervalares apresentadas até aqui foram definidas utilizando-se apenas as operações aritméticas intervalares. No caso de variáveis reais, funções desta forma são chamadas de funções racionais. Mais precisamente, uma função real é dita racional se pode ser expressa por uma razão de polinômios. Note que, no contexto de números reais, polinômios podem ser vistos como a aplicação de uma sequência finita das operações adição, subtração e multiplicação. Isto pois x^n é o mesmo do que a multiplicação de x por x n vezes. No contexto de variáveis intervalares temos que tomar um pouco de cuidado, uma vez que $X^n \neq X \cdot X \cdots X$, como já discutido anteriormente. Por isso a definição de função racional no caso intervalar não poderá utilizar a ideia de polinômios (nem de potências), mas sim diretamente via operações aritméticas.

Definição 2.5. *Uma função intervalar $F : \mathcal{I}^n \longrightarrow \mathcal{I}$ é chamada de **função intervalar racional** se pode ser escrita utilizando-se uma sequência finita de operações aritméticas intervalares, a saber, adição, subtração, multiplicação e divisão.*

Exemplo 2.10. *Considere as funções intervalares $F : \mathcal{I}^2 \longrightarrow \mathcal{I}$ e $G : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$ dadas por*

$$F(X_1,\ X_2) = ([1,\ 2]X_1 + [0,\ 1])X_2 \ \ e \ \ G(X) = m(X) + \frac{1}{2}(X - m(X)).$$

O cálculo de $F(X_1,\ X_2)$ pode ser realizado pela seguinte sequência finita de operações aritméticas intervalares:

$$\begin{aligned} P_1 &= [1,\ 2] \cdot X_1 && \textit{(multiplicação intervalar)}, \\ P_2 &= P_1 + [0,\ 1] && \textit{(adição intervalar)}, \\ F(X_1,\ X_2) &= P_2 \cdot X_2 && \textit{(multiplicação intervalar)}. \end{aligned}$$

Portanto, F é uma função intervalar racional. Por outro lado, G não é racional pois $\dfrac{\underline{X} + \overline{X}}{2}$ não pode ser escrita via operações aritméticas intervalares.

Nas seções anteriores lidamos com algumas exemplos de extensões intervalares. Note, por exemplo, que as extensões intervalares $G(X) = X - X^2$ e $H(X) = \dfrac{1}{4} - \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2$, ambas do Exemplo 2.8, não são funções intervalares racionais, uma vez que $Y^n \neq Y \cdot Y \ldots \cdot Y$. Isto é, Y^n não pode ser escrito utilizando-se sequência finita de operações aritméticas intervalares. Por outro lado, as extensões intervalares

- $F(X) = 1 - X$ (Exemplo 2.7),
- $F(X) = X \cdot (1 - X)$ (Exemplo 2.8), e
- $F(X_1,\ X_2) = X_1 + X_2$ (Exemplo 2.9),

são funções intervalares racionais. Observe que estas três últimas funções intervalares foram obtidas a partir da expressão da respectiva função real: $f(x) = 1 - x$, $f(x) = x(1 - x)$, e $f(x_1,\ x_2) = x_1 + x_2$, respectivamente. Isto é, a regra de cada uma destas extensões intervalares foi construída substituindo-se as operações aritméticas reais da regra de f pelas respectivas operações aritméticas intervalares, além de trocar a variável real por variável intervalar. Esse tipo de extensão intervalar é chamada de **extensão intervalar natural** de f. Desta forma, toda função real racional admitirá uma extensão natural, desde que x^n seja escrito como $x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (com n termos). Além disso, tal extensão intervalar natural será uma função intervalar racional.

Como as extensões naturais são definidas a partir da expressão que define a função real, expressões equivalentes de uma mesma função real pode resultar em diferentes extensões intervalares naturais, conforme podemos observar no exemplo a seguir.

Exemplo 2.11. *Considere a função real racional dada por $f(x) = x^4 - x^3$. Com esta expressão para f, obtemos a extensão intervalar natural*

$$F_1(X) = X \cdot X \cdot X \cdot X - X \cdot X \cdot X.$$

Mas $f(x)$ *pode ser reescrita de maneira equivalente como*

$$f(x) = ((x - 0.5)^2 - 0.25)x^2.$$

A partir desta expressão obtemos a extensão intervalar natural

$$F_2(X) = ((X - 0.5) \cdot (X - 0.5) - 0.25) \cdot X \cdot X.$$

Apesar de F_1 *e* F_2 *serem extensões intervalares naturais obtidas de expressões reais equivalentes, tais funções intervalares racionais não coincidem:*

$$F_1([1, 2]) = [1, 16] - [1, 8] = [-7, 15],$$

enquanto

$$F_2([1, 2]) = [0, 2] \cdot [1, 2] \cdot [1, 2] = [0, 8].$$

Da definição de função intervalar racional e da Proposição 1.18, temos o seguinte lema.

Lema 2.1. *Toda função intervalar racional é uma inclusão monotônica.*

Demonstração: Sejam $F : \mathcal{I}^n \longrightarrow \mathcal{I}$ uma função intervalar racional e $X_i, Y_i \in \mathcal{I}$ para $i = 1 \ldots, n$. Vamos provar este lema por Indução Matemática no número de operações aritméticas usadas para definir a função intervalar racional.

Primeiramente, vamos considerar o caso em que

$$F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) = X_i \odot X_j,$$

para algum $i,\ j = 1,\ \ldots,\ n$ (podendo, inclusive, ocorrer $i = j$) e $\odot$ um operador intervalar. Então, se $Y_i \subseteq X_i$, para $i = 1,\ \ldots,\ n$, temos que

$$F(Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n) = Y_i \odot Y_j \subseteq X_i \odot X_j = F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n),$$

para $i,\ j = 1,\ \ldots,\ n$, conforme a Proposição 1.18, na qual provamos a monotonicidade das operações aritméticas intervalares. Logo, pela Definição 2.4, F é uma inclusão monotônica.

Agora, vamos considerar

$$F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) = X_i \odot G(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n),$$

para algum $i = 1,\ \ldots,\ n$, com G uma função intervalar racional com k operações intervalares $\odot$ e monotônica em relação à inclusão. Então, se $Y_i \subseteq X_i$ para $i = 1,\ \ldots,\ n$, segue que

$$\begin{aligned} F(Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n) &= Y_i \odot G(Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n) \\ &\subseteq X_i \odot G(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n), \text{ por hipótese indutiva} \\ &= F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n). \end{aligned}$$

Dessa forma, $F(Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n) \subseteq F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$. Por Indução Matemática e pela Definição 2.4, F é uma inclusão monotônica. Portanto, toda função intervalar racional é uma inclusão monotônica. ∎

2.5 Teorema Fundamental da Análise Intervalar

Vimos anteriormente que qualquer extensão intervalar F de uma função real f deve ter a propriedade de que $f(\mathbf{x})$ irá coincidir com o resultado de F quando aplicada a n-upla de intervalos degenerados determinado por $\mathbf{x}$. Por exemplo, para funções de uma variável, teremos:

$$F([x, x]) = [f(x), f(x)] = f(x),$$

em que a última igualdade ocorre no sentido apresentado na definição de intervalo degenerado (Definição 1.1). No caso da extensão unida temos uma conexão ainda mais forte entre estas duas funções: a imagem de f restrita a um certo intervalo X será igual a sua extensão intervalar unida aplicada em X, isto é,

$$f(X) = F(X),$$

em que $f(X) = Im(f)|_X$. Claro que esta propriedade é imediata para a extensão unida visto que tal função intervalar é definida justamente via a restrição da imagem da função real f. Mas de forma geral não teremos tal propriedade para qualquer extensão intervalar de f. Considerando que, de certa maneira, esta propriedade indica que a extensão intervalar está representando de forma mais fidedigna a função real f, a extensão unida apresenta um grande vantagem em relação as demais extensões intervalares. Todavia, a extensão unida pode não ser adequada devido a dificuldade de manipulá-la algebricamente, uma vez que sua regra não é definida em termos das operações aritméticas intervalares. Diferente das extensões racionais com as quais podemos realizar manipulações de maneira similar a que fazemos para funções reais. Note que isto é de extrema importância pois queremos adequar muitos dos estudos que já são bem estabelecidos para funções reais para as funções intervalares, como por exemplo encontrar os zeros de uma dada função. Neste sentido, é bastante relevante estudar esta conexão para extensões intervalares racionais. Como veremos nesta seção, não conseguiremos garantir a igualdade, mas veremos que se a extensão intervalar é monotônica em relação à inclusão, então a imagem de f restrita a qualquer intervalo X estará contida no resultado da extensão intervalar aplicado em X. Este resultado é muito importante e é conhecido como Teorema Fundamental da Análise Intervalar.

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental da Análise Intervalar). *Seja $F : \mathcal{I}^n \longrightarrow \mathcal{I}$ uma extensão intervalar da função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Se F é monotônica em relação à inclusão, então*

$$f(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) \subseteq F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n).$$

Demonstração: Sejam $X_i \in \mathcal{I}$ com $X_i \subseteq D$, e $x_i \in \mathbb{R}$ com $x_i \in X_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Como F é uma extensão intervalar de f, por definição temos que

$$\begin{aligned} f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) &= [f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)] \\ &= F([x_1,\ x_1],\ [x_2,\ x_2], \ldots,\ [x_n,\ x_n]). \end{aligned}$$

Além disso, da hipótese de que F é monotônica em relação à inclusão e de $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in (X_1, X_2,\ \ldots, X_n)$, temos

$$F([x_1,\ x_1],\ [x_2,\ x_2], \ldots,\ [x_n,\ x_n]) \subseteq F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n).$$

Ou seja,

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n).$$

Como isso vale para qualquer $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in (X_1, X_2,\ \ldots, X_n)$, segue que

$$f(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) \subseteq F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n).$$

■

Uma vez que funções intervalares racionais são inclusões monotônicas, segue de forma imediata do Lema 2.1 e do Teorema 2.1 o seguinte corolário.

Corolário 2.1. *Se $F : \mathcal{I}^n \longrightarrow \mathcal{I}$ é uma função intervalar racional e extensão intervalar de $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Então*

$$f(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) \subseteq F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n).$$

Observe que o Teorema Fundamental da Análise Intervalar nos permite usar extensões intervalares para obter valores limitantes (superior e inferior) para uma dada função real. Além disso, diferentes extensões intervalares de uma mesma função poderão fornecer intervalos limitantes distintos, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 2.12. *Considere a seguinte função polinomial*

$$p(x) = 1 - 5x + \frac{1}{3}x^3.$$

Usando extensões intervalares, vamos analisar valores limitantes para a imagem desta função considerando $x \in [2, 3]$. Uma possível extensão intervalar para p é dada pela extensão intervalar natural:

$$P(X) = 1 - 5X + \frac{1}{3}X \cdot X \cdot X.$$

Neste caso teremos

$$\begin{aligned}
P([2,\ 3]) &= 1 - 5[2,\ 3] + \frac{1}{3}[2,\ 3]\cdot[2,\ 3]\cdot[2,\ 3]\\
&= [1,\ 1] - [10,\ 15] + \frac{1}{3}[8,\ 27]\\
&= [1,\ 1] + [-15,\ -10] + \left[\frac{8}{3},\ 9\right]\\
&= \left[1 - 15 + \frac{8}{3},\ 1 - 10 + 9\right]\\
&= \left[-\frac{34}{3},\ 0\right].
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que podemos reescrever o polinômio p *na forma*

$$q(x) = 1 - x\left(5 - \frac{x^2}{3}\right),$$

cuja extensão intervalar natural é dada por

$$Q(X) = 1 - X\left(5 - \frac{X\cdot X}{3}\right).$$

Como vimos anteriormente, nem todas as propriedades algébricas das operaç oes aritméticas básicas dos números reais são válidas para as operações aritméticas intervalares. Logo P *e* Q *não serão necessariamente as mesmas funções intervalares. De fato,*

$$\begin{aligned}
Q([2,\ 3]) &= 1 - [2,\ 3]\left(5 - \frac{[2,\ 3]\cdot[2,\ 3]}{3}\right)\\
&= 1 - [2,\ 3]\left(5 - \frac{[4,\ 9]}{3}\right)\\
&= [1,\ 1] - [2,\ 3]\left([5,\ 5] - \left[\frac{4}{3},\ 3\right]\right)\\
&= [1,\ 1] - [2,\ 3]\left([5,\ 5] + \left[-3,\ -\frac{4}{3}\right]\right)\\
&= [1,\ 1] - [2,\ 3]\left(\left[5 - 3,\ 5 - \frac{4}{3}\right]\right)\\
&= [1,\ 1] - [2,\ 3]\left[2,\ \frac{11}{3}\right]\\
&= [1,\ 1] - [4,\ 11]\\
&= [1,\ 1] + [-11,\ -4]\\
&= [1 - 11,\ 1 - 4]\\
&= [-10,\ -3].
\end{aligned}$$

Observe que

$$Q([2,\ 3]) = [-10,\ -3] \subseteq \left[-\frac{34}{3},\ 0\right] = P([2,\ 3]).$$

Vamos comparar os valores limitantes providos pelas extensões intervalares P e Q com a imagem intervalar de p restrita ao intervalo $[2,3]$. Como a função p é um polinômio, não será difícil obter sua imagem intervalar para o intervalo em questão. De fato, como p é contínua admitirá máximo e mínimo em qualquer intervalo fechado. Em particular, no intervalo $[2,3]$. Derivando $p(x)$ e igualando a zero, obtemos

$$-5 + x^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{5}.$$

Destes dois valores, apenas $x = +\sqrt{5}$ pertence ao intervalo $[2,3]$. Logo p admite um único ponto crítico em $[2,3]$. Calculando a segunda derivada de p e avaliando em $x = \sqrt{5}$ obtemos

$$p''(\sqrt{5}) = 2 \cdot \sqrt{5} > 0.$$

Isto é, p terá um ponto de mínimo em $x = \sqrt{5}$. Disto obtemos o valor mínimo do intervalo $p([2,3])$:

$$p(\sqrt{5}) = 1 - 5\sqrt{5} + \frac{1}{3}\sqrt{5}^3 = 1 - 5\sqrt{5} + \frac{5}{3}\sqrt{5} = 1 - \frac{10}{3}\sqrt{5}.$$

Por outro lado, como sabemos que p não tem outro ponto crítico neste intervalo, segue que máximo será atingido em um dos dois extremos. Como

$$p(2) = \frac{8}{3} - 9 < -5 = p(3),$$

segue que o valor máximo de $p([2,3])$ será -5. Isto é

$$p([2,3]) = [1 - \frac{10}{3}\sqrt{5}, -5].$$

Vamos utilizar o software Geogebra para ilustrar esta imagem intervalar, bem como o resultado das extensões intervalares P e Q avaliadas no intervalo $[2,3]$ (Figura 2.2).

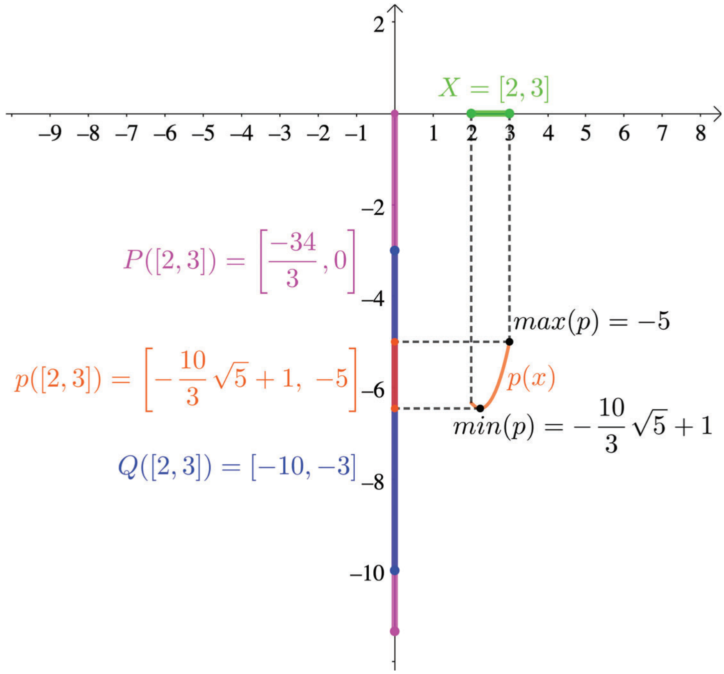

Figura 2.2: Imagem Intervalar de p em relação ao intervalo $X = [2,\ 3]$.

No exemplo que acabamos de abordar, pudemos comparar os valores limitantes providos pelas extensões intervalares com a própria imagem intervalar pois esta não era complicada de se obter. Mas isto nem sempre é tão fácil. Além disso, as estimativas de intervalo limitante feitas através das extensões intervalares podem ser facilmente implementadas uma vez que os cálculos são efetuados via operações aritméticas (intervalares), enquanto a obtenção da imagem intervalar não.

A pergunta que segue naturalmente deste exemplo é se seria possível, via alguma extensão intervalar racional, obter um intervalo limitante igual a imagem intervalar de f. Ou se não, usar extensão intervalar racional para, de alguma forma, obter uma sequência de intervalos limitantes que convirjam para o intervalo dado pela imagem intervalar.

Além disso, cabe ressaltar aqui que não poderíamos ter encontrado de maneira exata a imagem intervalar $\left[-\frac{10}{3}\sqrt{5}+1,\ -5\right]$ através do uso de operações elementares, visto que partimos de um intervalo inicial com extremos naturais. Faz-se então algo interessante a elaboraração de estratégias para obtenção de sequências intervalares que utilizam somente operações elementares e convirjam para a imagem intervalar exata.

Para responder tais questões, precisamos primeiramente estabelecer o conceito de sequências intervalares bem como de convergência das mesmas, o que será feito no Capítulo 3. Mas antes disso, é conveniente estudar como a continuidade de funções ficará definida no contexto de funções intervalares.

2.6 Funções Intervalares Contínuas

Nesta seção vamos abordar continuidade de funções intervalares de uma variável. Estes conceitos serão importantes para podermos explorar convergência de sequências intervalares, que abordaremos no próximo capítulo.

Informalmente, uma função real f é dita contínua em um ponto se pequenas variações em torno deste ponto geram pequenas variações nas imagens correspondentes. De maneira mais formal, dizemos que uma função real f é contínua no ponto $\overline{x}$ de seu domínio se para todo número positivo ϵ existe um número δ tal que se a distância entre x e $\overline{x}$ é menor do que δ, então a distância entre $f(x)$ e $f(\overline{x})$ deve ser menor do que ϵ. Isto é,

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, \delta \text{ tal que } d(x, \overline{x}) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(\overline{x})) < \epsilon,$$

em que d é uma função que fornece a distância entre dois números reais. Desta forma, a fim de estender o conceito de continuidade para funções intervalares, precisaremos entender primeiro como medir distâncias entre intervalos. Para tal, não será necessária nenhuma nova definição específica para o conjunto de intervalos. Isto pois a definição de métrica pode ser utilizada neste contexto, fornecendo assim uma forma de calcularmos distâncias entre elementos de $\mathcal{I}$. Para melhor compreensão, vejamos brevemente o que é uma métrica[2] e, em seguida, uma possível métrica para o conjunto dos intervalos fechados $\mathcal{I}$.

Definição 2.6. *Dado um conjunto não-vazio $\mathbb{A}$, uma função $d : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita uma **métrica em** $\mathbb{A}$ se, para quaisquer X, Y e Z pertencentes ao conjunto $\mathbb{A}$, as seguintes propriedades forem válidas*

1. $d(X, Y) \geq 0$ *e* $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$,

2. $d(X, Y) = d(Y, X)$,

3. $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$.

[2] O leitor que tiver interesse poderá encontrar uma abordagem mais geral e detalhada sobre Espaços Métricos no livro Espaços Métricos [16].

Neste caso, o par $(\mathbb{A}, d)$ *é chamado de* ***Espaço Métrico*** *e o número real* $d(X, Y)$ *de distância entre* X *e* Y*.*

É fácil verificar que a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = |x - y|$ define uma métrica em $\mathbb{R}$. Isto é, a ideia usual de distância entre números reais é, de fato, uma métrica. Vale mencionar que podemos atribuir diferentes métricas para um mesmo conjunto.

Visando definir uma distância entre dois intervalos não vazios X e Y de $\mathcal{I}$, uma possibilidade seria tentar aproveitar o conceito de distância em $\mathbb{R}$ e atribuir a distância dos intervalos como a menor distância entre dois números reais sendo cada um destes números pertencentes a um dos intervalos em questão. Isto é, considerar a função

$$\tilde{d}(X, Y) = \min\{|x - y|; x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

No entanto, essa função não define uma métrica em $\mathcal{I}$. De fato, se considerarmos dois intervalos X e Y distintos e não disjuntos, teremos que $\tilde{d}(X, Y) = 0$ com $X \neq Y$. Ou seja, o primeiro critério da Definição 2.6 não é satisfeito.

Mas é sim possível definir uma métrica em $\mathcal{I}$. Como veremos na Proposição 2.3, a função

$$d(X, Y) = \max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\},$$

irá satisfazer as condições da Definição 2.6. É interessante observar ainda que no caso de intervalos degenerados $X = [x, x]$ e $Y = [y, y]$, esta função recairá na distância entre números reais dada pelo módulo (denotada aqui por $d_{\mathbb{R}}$), como a seguir

$$d(X, Y) = \max\{|x - y|, |x - y|\} = |x - y| = d_{\mathbb{R}}(X, Y).$$

Proposição 2.3. *A função* $d : \mathcal{I}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$d(X, Y) = \max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\}$$

define uma métrica em $\mathcal{I}$*.*

Demonstração: Sejam $X = [\underline{X}, \ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y}, \ \overline{Y}]$ e $Z = [\underline{Z}, \ \overline{Z}]$ intervalos quaisquer de $\mathcal{I}$. Analisemos cada um dos itens exigidos pela Definição 2.6.

1. Devido ao módulo, temos que $|\underline{X} - \underline{Y}|$ e $|\overline{X} - \overline{Y}|$, bem como o máximo entre eles, são números não negativos. Logo,

$$d(X, Y) = \max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\} \geq |\underline{X} - \underline{Y}| \geq 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} d(X,Y) = 0 &\Leftrightarrow \max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\} = 0 \\ &\Leftrightarrow |\underline{X} - \underline{Y}| = 0 \text{ e } |\overline{X} - \overline{Y}| = 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{X} = \underline{Y} \text{ e } \overline{X} = \overline{Y} \\ &\Leftrightarrow X = Y. \end{aligned}$$

2. Temos que

$$\begin{aligned} d(X,Y) &= \max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\} \\ &= \max\{|\underline{Y} - \underline{X}|, |\overline{Y} - \overline{X}|\} \\ &= d(Y,\ X). \end{aligned}$$

Isto é, $d(X,Y) = d(Y,\ X)$.

3. Usando a desigualdade triangular com respeito ao módulo de números reais, segue que

$$\begin{aligned} d(X,Y) &= \max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\} \\ &= \max\{|\underline{X} - \underline{Z} + \underline{Z} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Z} + \overline{Z} - \overline{Y}|\} \\ &\leq \max\{|\underline{X} - \underline{Z}| + |\underline{Z} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Z}| + |\overline{Z} - \overline{Y}|\} \\ &\leq \max\{|\underline{X} - \underline{Z}|, |\overline{X} - \overline{Z}|\} + \max\{|\underline{Z} - \underline{Y}|, |\overline{Z} - \overline{Y}|\} \\ &\leq d(X,\ Z) + d(Z,\ Y), \forall Z \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Isto é, $d(X,Y) \leq d(X,\ Z) + d(Z,\ Y)$.

Portanto, a função d define uma métrica sobre $\mathcal{I}$. ■

Exemplo 2.13. *Sejam* $X = [2,\ 5]$, $Y = [-2,\ -1]$, $Z = [-3,\ 2] \in \mathcal{I}$ *e* d *a métrica definida na Proposição 2.3. Temos que*

$$\begin{aligned} &d(X,\ X) = \max\{|2-2|, |5-5|\} = 0, \\ &d(X,Y) = \max\{|2-(-2)|, |5-(-1)|\} = 6, \\ &d(Y,\ Z) = \max\{|(-2)-(-3)|, |(-1)-2|\} = 3, \\ &d(X,\ Z) = \max\{|2-(-3)|, |5-2|\} = 5, \\ &d(X,Y) + d(Y,\ Z) = 6+3 = 9. \end{aligned}$$

Ao longo deste texto, não abordaremos outra métrica em $\mathcal{I}$. Logo, daqui em diante sempre que mencionarmos métrica ou distância em $\mathcal{I}$ estamos nos referindo a função d fornecida pela Proposição 2.3.

A Figura 2.3 fornece uma interpretação geométrica para a distância entre dois intervalos dada por essa métrica.

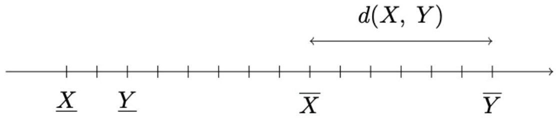

Figura 2.3: Representação Geométrica de uma Distância em $\mathcal{I}$.

Geometricamente, essa distância entre dois intervalos é o maior comprimento que separa os respectivos extremos dos intervalos, ou seja, a distância será sempre dada pelo maior subconjunto da união intervalar que não contém elementos dos dois conjuntos envolvidos.

Outras propriedades adicionais dessa métrica d em $\mathcal{I}$ podem ser vistas na Proposição 2.4 a seguir.

Proposição 2.4. *Seja d a métrica*

$$d(X,Y) = \max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\}.$$

Então, para quaisquer $X,\ Y,\ Z \in \mathcal{I}$, é válido que

1. $d(X+Z,\ Y+Z) = d(X,Y)$*;*
2. $d(X,Y) \leq w(Y)$*, quando* $X \subseteq Y$*;*
3. $d(X,\ 0) = |X|$*.*

Demonstração:

1. Usando a definição da métrica d e as propriedades de adição intervalar (Proposição 1.7), segue que

$$\begin{aligned} d(X+Z, Y+Z) &= \max\{|\underline{X+Y} - \underline{Y+Z}|, |\overline{X+Z} - \overline{Y+Z})|\} \\ &= \max\{|\underline{X} + \underline{Z} - (\underline{Y} + \underline{Z})|, |\overline{X} + \overline{Z} - (\overline{Y} + \overline{Z})|\} \\ &= \max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\} \\ &= d(X,Y). \end{aligned}$$

2. Usando a definição da métrica d, a definição do comprimento de um intervalo (Definição 1.2) e que $X \subseteq Y$, temos que

$$\begin{aligned} d(X,Y) &= \max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\} \\ &\leq \max\{|\overline{Y} - \underline{Y}|, |\overline{Y} - \overline{Y}|\} \\ &= \max\{|\overline{Y} - \underline{Y}|,\ 0\} \\ &= |\overline{Y} - \underline{Y}| \\ &= \overline{Y} - \underline{Y} \\ &= w(Y). \end{aligned}$$

3. Usando a definição da métrica d e a definição de valor absoluto de um intervalo (Definição 1.2), obtemos que

$$d(X,\ 0) = \max\{|\underline{X} - 0|, |\overline{X} - 0|\} = \max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\} = |X|.$$

■

Exemplo 2.14. *Sejam* $X = [1,\ 4],\ Y = [-2,\ 5],\ Z = [-3,\ 2] \in \mathcal{I}$. *Então, temos que*

$$\begin{aligned} d(X+Z, Y+Z) &= d(X,Y) \\ &= \max\{|1-(-2)|, |4-5|\} \\ &= \max\{3, 1\} = 3 \\ &\leq w(Y) = 5-(-2) = 7, \end{aligned}$$

Além disso,

$$d(X,\ 0) = |X| = \max\{|2|, |5|\} = 5.$$

Dentre as funções (reais) contínuas, parte delas destacam-se por possuírem taxa de variação limitada em cada intervalo do seu domínio, o que as tornam mais bem comportadas. São as chamadas funções Lipschitz contínuas. Formalmente, uma função real $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita Lipschitziana (ou Lipschitz contínua) em $[a,\ b]$ se existe uma constante L tal que para todos x e y em $[a,\ b]$ tivermos que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

O leitor interessado poderá encontrar em mais detalhes sobre funções reais Lipschitz contínuas em Lima [16, p. 190].

Podemos estender este conceito para funções intervalares, o que será interessante para a compreensão da subdivisão uniforme de intervalos e o refinamento da imagem da extensão intervalar, que serão abordados no próximo capítulo.

Definição 2.7. *Uma função intervalar F é dita **Lipschitziana** em $X_0 \in \mathcal{I}$ se existe uma constante L tal que*

$$w(F(X)) \leq L\, w(X), \quad \forall X \subseteq X_0.$$

A definição apresentada aqui pode ser estendida para funções intervalares de várias variáveis. Isto é, considerar $X = (X_1, \ldots,\ X_n)$ como um vetor intervalar. O mesmo é válido para os resultados apresentados no restante deste capítulo. Todavia, a fim de facilitar a compreensão, iremos apresentá-los considerando apenas uma variável intervalar.

A primeira propriedade interessante é que no caso de extensões intervalares, teremos que toda extensão intervalar de uma função racional é Lipschitziana, como apresenta a proposição a seguir.

Proposição 2.5. *Sejam f uma função real racional e X_0 um intervalo de $\mathcal{I}$. Se F é extensão intervalar natural de f e está definida para todo intervalo fechado $X \subseteq X_0$, então F é Lipschitziana em X_0.*

Demonstração: Seja F uma extensão intervalar natural de uma função racional f. Então $F(X)$ pode ser expressa por uma sequência finita de operações aritméticas intervalares. Sendo assim, para calcular $w(F(X))$ basta determinar o comprimento desta sequência finita de operações aritméticas intervalares aplicadas em X. Utilizando as Propriedades 1.12, 1.13 e 1.15, bem como o fato dos intervalos em questão serem limitados, teremos que o comprimento de cada uma das operações aritméticas intervalares da sequência será menor que ou igual a uma contante multiplicada por $w(X)$. Logo, é possível obter uma constante L (tomando o máximo entre as finitas constantes envolvida, se for o caso) tal que $w(F(X)) \leq Lw(X)$. ■

A fim de esclarecer como encontrar a constante L mencionada na demonstração da Proposição 2.5, apresentamos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.15. *Considere a função real racional*

$$f(x) = (-4 + 3x) \cdot x^{-1}$$

e X_0 um intervalo de $\mathcal{I}$ que não contenha o nulo. Neste caso, a extensão intervalar natural F de f está definida para todo $X \subseteq X_0$ e será dada por

$$F(X) = (-4 + 3X) \cdot X^{-1}.$$

Vejamos que esta função intervalar é Lipschitziana em X_0, seguindo a ideia apresentada na demonstração da Proposição 2.5. Para tal, calculemos o comprimento de $F(X)$. Utilizando a Proposição 1.13, segue que

$$\begin{aligned} w(F(X)) &= w\left((-4 + 3X) \cdot X^{-1}\right) \\ &\leq |-4 + 3X| \cdot w\left(X^{-1}\right) + \left|X^{-1}\right| \cdot w(-4 + 3X). \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Usando as Proposições 1.15 e 1.12, respectivamente, temos que

$$w\left(X^{-1}\right) \leq \left|X^{-1}\right|^2 \cdot w(X).$$

e

$$w(-4 + 3X) = |-4|w([1, 1]) + |3|w(X) = 3w(X).$$

Retornando na Equação 2.6.3, obtemos

$$\begin{aligned} w(F(X)) &\leq |-4 + 3X| \cdot \left|X^{-1}\right|^2 \cdot w(X) + \left|X^{-1}\right| \cdot 3w(X). \\ &= \left(|-4 + 3X| \cdot \left|X^{-1}\right|^2 + 3\left|X^{-1}\right|\right) \cdot w(X). \end{aligned}$$

Como $X \subseteq X_0$, temos ainda que $|X^{-1}| \leq \left|X_0^{-1}\right|$, $|X^{-1}|^2 \leq \left|X_0^{-1}\right|^2$ e $|-4+3X| \leq |-4+3X_0|$, donde segue

$$w(F(X)) \leq \left(|-4+3X_0| \cdot \left|X_0^{-1}\right|^2 + 3\left|X_0^{-1}\right|\right) \cdot w(X).$$

Definindo $L = |-4+3X_0| \cdot \left|X_0^{-1}\right|^2 + 3\left|X_0^{-1}\right|$, obtemos

$$w(F(X)) \leq Lw(X)$$

para qualquer $X \subseteq X_0$. Portanto, F é Lipschitziana em X_0.

Além da funções intervalares provenientes de extensões naturais, a extensão unida de uma função real Lipschitziana também será uma função intervalar Lipschitziana, conforme será provado na proposição a seguir.

Proposição 2.6. *Seja f uma função real Lipschitziana em $X_0 \in \mathcal{I}$. Então a extensão unida de f é uma função intervalar Lipschitziana em X_0.*

Demonstração: Consideremos F uma extensão unida de f, então temos que $F(X) = f(X)$, em que $f(X)$ denota a imagem de f restrita ao conjunto X. Disto segue que $w(F(X)) = w(f(X))$. Além disso, como a função real f é contínua (pois é Lipschitziana) no intervalo compacto X_0, temos que

$$w(f(X)) = |f(x_1) - f(x_2)|, \text{ para algum } x_1,\, x_2 \in X \subseteq X_0.$$

Desta forma, segue que

$$w(F(X)) = w(f(X)) = |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

em que a última passagem deve-se ao fato de f ser Lipschitziana. Por fim, $|x_1 - x_2| \leq w(X)$, donde

$$w(f(X)) \leq Lw(X), \text{ para } X \subseteq X_0.$$

Portanto, a extensão unida de f é uma função Lipschitziana em X_0. ■

Por fim, vejamos que a composição de funções Lipschitzianas que são monotônicas em relação à inclusão também é uma inclusão monotônica Lipschitziana.

Proposição 2.7. *Sejam X_0, Y_0 elementos de $\mathcal{I}$, F e G extensões intervalares monotônicas em relação à inclusão, F Lipschitziana em Y_0, G Lipschitziana em X_0 e $G(X_0) \subseteq Y_0$. Então a composição $H(X) = F(G(X))$ é Lipschitziana em X_0 e também é uma inclusão monotônica.*

Demonstração: Sejam F Lipschitziana em Y_0 e G Lipschitziana em X_0, então temos que existem constantes L_1 e L_2 tais que

$$w(F(Y)) \leq L_1 w(Y) \text{ e } w(G(X)) \leq L_2 w(X),$$

para quaisquer $Y \subseteq Y_0$ e $X \subseteq X_0$. Além disso, o fato de G ser uma inclusão monotônica garante que

$$X \subseteq X_0 \Rightarrow G(X) \subseteq G(X_0) \subseteq Y_0, \tag{2.6.4}$$

em que a última inclusão segue por hipótese. Logo,

$$w(H(X)) = w(F(G(X))) \leq L_1 w(G(X)) \leq L_1 L_2 w(X) = Lw(X),$$

para $L = L_1 L_2$. Portanto, H é Lipschitziana em X_0. Por fim, da Equação (2.6.4) e do fato de F ser uma inclusão monotônica, segue que

$$H(X) = F(G(X)) \subseteq F(G(X_0)) = H(X_0)$$

sempre que $X \subseteq X_0$. Portanto, H é uma inclusão monotônica. ■

2.7 Subdivisões e Refinamento

Conforme mencionado anteriormente, a análise intervalar é uma ferramenta poderosa para lidar com problemas envolvendo valores incertos ou com variações pois é possível considerar tais valores como variáveis intervalares. Em virtude disso, em muitos casos são utilizados extensões intervalares no processo de resolução desses problemas. No entanto, devido ao fenômeno dependência de intervalo, a extensão intervalar F de uma função real f pode fornecer uma sobrestimativa para a imagem intervalar desta função. Isto é, o intervalo $F(X)$ poderá ser muito maior do que a imagem da função real f restrita a este intervalo $(f(X))$, como ocorreu no Exemplo 2.5. A fim de melhorarmos esta estimativa podemos realizar um refinamento sobre a extensão intervalar. Para tal, precisaremos primeiramente do conceito de subdivisão uniforme de um intervalo.

Definição 2.8. *Dados um intervalo $X \in \mathcal{I}$ e $N \in \mathbb{N}$, a* ***subdivisão uniforme*** *de X em N partes é dada por*

$$X_j = \left[\underline{X} + (j-1)\frac{w(X)}{N},\ \underline{X} + j\frac{w(X)}{N}\right], \tag{2.7.5}$$

onde $j = 1, \ldots, N$.

Note que, se $X_1, X_2, \ldots, X_N$ é a subdivisão uniforme de X em N partes, então

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} X_j \text{ e } w(X) = w(X_j) \cdot N. \qquad (2.7.6)$$

Exemplo 2.16. *Calculemos a subdivisão uniforme de $X = [-2,\ 6]$, considerando $N = 4$:*

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left[-2 + (1-1)\frac{8}{4},\ -2 + 1\frac{8}{4}\right] = [-2+0,\ -2+2] = [-2,\ 0],\\
X_2 &= \left[-2 + (2-1)\frac{8}{4},\ -2 + 2\frac{8}{4}\right] = [-2+2,\ -2+4] = [0,\ 2],\\
X_3 &= \left[-2 + (3-1)\frac{8}{4},\ -2 + 3\frac{8}{4}\right] = [-2+4,\ -2+6] = [2,\ 4],\\
X_4 &= \left[-2 + (4-1)\frac{8}{4},\ -2 + 4\frac{8}{4}\right] = [-2+6,\ -2+8] = [4,\ 6].
\end{aligned}$$

A Figura 2.4 ilustra os elementos desta subdivisão de X.

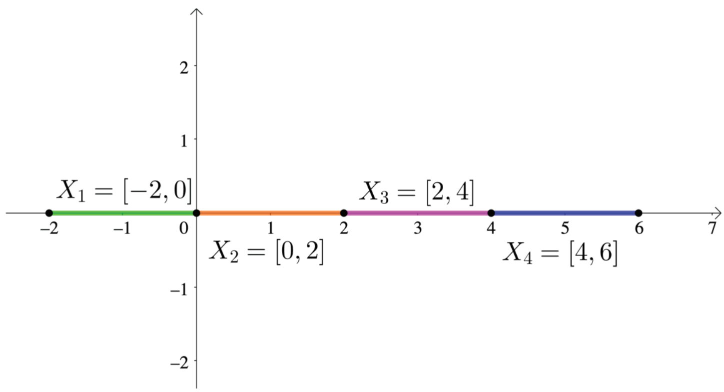

Figura 2.4: Representação Geométrica da Subdivisão Uniforme de $X = [-2, 6]$ para $N = 4$.

Note que, de fato, a união dos intervalos que formam a subdivisão uniforme será igual ao intervalo original $X = [-2, 6]$:

$$X = \bigcup_{j=1}^{4} X_j = [-2,\ 0] \cup [0,\ 2] \cup [2,\ 4] \cup [4,\ 6] = [-2,\ 6].$$

No que concerne este trabalho, será suficiente trabalhar com subdivisões de elementos de $\mathcal{I}$. Mas este conceito pode ser generalizado para elementos de $\mathcal{I}^n$. O leitor que tiver interesse poderá encontrar mais detalhes no trabalho de Cassimiro [4].

Uma vez estabelecido o conceito de subdivisão uniforme, podemos definir o refinamento de uma função intervalar sobre um intervalo X.

Definição 2.9. *Seja F uma função intervalar e seja N um número natural. O* ***refinamento de*** F ***sobre*** X *de ordem N, denotado por $F_{(N)}(X)$, é a função intervalar dada por*

$$F_{(N)}(X) = \underline{\bigcup_{j=1}^{N}} F(X_j),$$

em que $X_1, X_2, \cdots, X_N$ é a subdivisão uniforme de X em N partes.

Em outras palavras, o refinamento de F sobre X é a união convexa (Definição 1.3) dos intervalos resultantes da aplicação da função intervalar F sobre os elementos da subdivisão uniforme de X em N partes. Note que a união convexa presente na definição do refinamento é essencial para garantir que o resultado de $F_{(N)}(X)$ seja de fato um elemento de $\mathcal{I}$ e, consequentemente, $F_{(N)}$ seja uma função intervalar. Todavia, caso F seja uma extensão intervalar de uma função real f poderemos trocar a união convexa pela união de conjuntos, conforme proposição a seguir.

Proposição 2.8. *Sejam f uma função real com domínio contendo o intervalo X, F uma extensão intervalar de f e N um número natural fixo. Então o refinamento de F sobre X de ordem N satisfaz*

$$F_{(N)}(X) = \bigcup_{j=1}^{N} F(X_j),$$

onde $X_1, X_2, \cdots, X_N$ é a subdivisão uniforme de X em N partes. Além disso, $F_{(N)}$ será também uma extensão intervalar de f.

Demonstração: Pela Proposição 1.6, temos que a união convexa entre dois intervalos irá coincidir com a união de conjuntos destes caso os intervalos em questão não sejam disjuntos. Logo, basta provar que $F(X_j) \cap F(X_{j+1}) \neq \emptyset$ para $j = 1, \ldots, n-1$. Como F é uma extensão intervalar de f, temos que

$$f(\overline{X_j}) \subseteq F(X_j) \text{ e } f(\underline{X_{j+1}}) \subseteq F(X_{j+1}).$$

Mas $X_1 \cdots X_N$ é a subdivisão uniforme de X em N partes, logo $\overline{X_j} = \underline{X_{j+1}}$. Donde segue que

$$f(\overline{X_j}) = f(\underline{X_{j+1}}) \in F(X_j) \cap F(X_{j+1}).$$

Portanto,

$$F_{(N)}(X) = \bigcup_{j=1}^{N} F(X_j) = \bigcup_{j=1}^{N} F(X_j).$$

Provemos agora que $F_{(N)}$ é uma extensão intervalar de f. Note que a subdivisão uniforme em N partes de um intervalo degenerado $X = [x, x]$ será $X_j = [x, x]$, para $j = 1, \cdots, N$, pois $w(X) = 0$. Logo

$$F_{(N)}([x,x]) = \bigcup_{j=1}^{N} F(X_j) = \bigcup_{j=1}^{N} F([x,x]) = \bigcup_{j=1}^{N} f(x) = f(x),$$

em que a penúltima igualdade segue de F ser uma extensão intervalar de f. ■

Exemplo 2.17. *Considere $f(x) = x^2$ com $x \in [0,\ 1]$. Se considerarmos a extensão intervalar $F(X) = X^2$, temos que $F([0,\ 1]) = [0,\ 1]$. A subdivisão uniforme de $X = [0,\ 1]$ em 2 partes será*

$$X_1 = \left[0,\ \frac{1}{2}\right] \text{ e } X_2 = \left[\frac{1}{2},\ 1\right].$$

Desta forma, o refinamento de F sobre X de ordem 2 é dado por

$$\begin{aligned} F_{(2)}([0,1]) &= \bigcup_{i=1}^{2} F(X_i) \\ &= F(X_1) \cup F(X_2) \\ &= F\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \cup F\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \\ &= \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4},\ 1\right] \\ &= [0,1] \\ &= F([0,1]). \end{aligned}$$

Note que, neste caso, o refinamento de ordem 2 coincide com a imagem da extensão intervalar. Ademais, também coincide com a imagem de f restrita ao intervalo $[0,1]$.

Apesar de que no exemplo anterior o refinamento tenha coincidido com a imagem da extensão intervalar, isto nem sempre ocorre, como mostra o Exemplo 2.18.

Exemplo 2.18. *Consideremos a função real* $f(x) = x - x^2$ *com* $x \in [0,\ 1]$ *e a extensão intervalar* $F(X) = X - X.X$*. A subdivisão uniforme do intervalo* $X = [0,\ 1]$ *em* N *partes será*

$$X_i = \left[\frac{(i-1)}{N},\ \frac{i}{N}\right],\ para\ 1 \leq i \leq N.$$

O resultado do refinamento de F *sobre* X *de ordem* N*, para alguns valores de* N*, é apresentado na Tabela 2.1.*

N	$\mathbf{F_{(N)}(X) = \bigcup_{i=1}^{N} F(X_i)}$
1	$[-1,\ 1] = F([0,\ 1])$
2	$[-0.5,\ 0.75] = F([0,\ 0.5]) \bigcup F([0.5,\ 1]) \subseteq F([0,\ 1])$
10	$[-0.1,\ 0.35] = F([0,\ 0.1]) \bigcup \ldots \bigcup F([0.9,\ 1]) \subseteq F([0,\ 1])$
100	$[-0.01,\ 0.26] = F([0,\ 0.01]) \bigcup \ldots \bigcup F([0.99,\ 1]) \subseteq F([0,\ 1])$
1000	$[-0.001,\ 0.251] = F([0,\ 0.001]) \bigcup \ldots \bigcup F([0.999,\ 1]) \subseteq F([0,\ 1])$
10000	$[-0.0001,\ 0.2501] = F([0,\ 0.0001]) \bigcup \ldots \bigcup F([0.9999,\ 1]) \subseteq F([0,\ 1])$

Tabela 2.1: Refinamento $F_{(N)}(X)$ para alguns valores de N.

Note que $f([0,1]) = \left[0, \frac{1}{4}\right] \neq [-1,1] = F([0,1])$*. Caso* $N \neq 1$*, o refinamento* $F_{(N)}(X)$ *também será diferente destes dois intervalos. Entretanto, para qualquer* $N \in \mathbb{N}$*, tem-se que*

$$f([0,1]) \subseteq F_{(N)}([0,1]) \subseteq F([0,1]).$$

Além disso, observe que $F_{(1)} = F(X)$ *e que* $F_{(N)}(X)$ *parece convergir para* $f(X)$ *quando* N *tende ao infinito.*

A Proposição 2.8 nos garante que, de F é extensão intervalar de f, então o refinamento $F_{(N)}$ também será. Apesar de ambas as funções intervalares serem extensões intervalares de f, pelos exemplos que acabamos de explorar o refinamento $F_{(N)}$ parece estar mais próximo de f do que F, isto é, $f(X) \subseteq F_{(N)}(X) \subseteq F(X)$. A proposição a seguir garante que isto de fato ocorrerá sempre que F for monotônica em relação à inclusão.

Proposição 2.9. *Sejam* f *uma função real com somínio contendo o intervalo* X *e* F *uma extensão intervalar de* f *monotônica em relação à inclusão. Então para qualquer número natural* N *fixo tem-se*

$$f(X) \subseteq F_{(N)}(X) \subseteq F(X)$$

onde $F_{(N)}$ *é o refinamento de* F *de ordem* N*.*

Demonstração: Seja $X_1, \ldots, X_N$ a subdivisão uniforme de X em N partes. Como F é monotônica em relação à inclusão e $X_j \subseteq X$ para qualquer índice j, então $F(X_j) \subseteq F(X)$ para $j = 1, \ldots, N$. Logo

$$F_N(X) = \bigcup_{j=1}^{N} F(X_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} F(X) = F(X). \tag{2.7.7}$$

Além disso, como F é uma extensão intervalar de f monotônica em relação à inclusão, segue do Teorema Fundamental da Análise Intervalar 2.1 que $f(X_j) \subseteq F(X_j)$ para $j = 1, \ldots, N$. Logo

$$f(X) = \bigcup_{j=1}^{N} f(X_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} F(X_j) = F_{(N)}(X). \tag{2.7.8}$$

Das Equações (2.7.7) e (2.7.8) segue o resultado. ∎

Apesar deste último resultado nos garantir condições nas quais o refinamento de F de ordem N irá aproximar melhor a imagem da função real f do que a função intervalar F, ainda não temos garantia de que $F_{(N)}(X)$ irá convergir para $f(X)$, como parece ocorrer no Exemplo 2.18. Para analisar melhor o quão próximo o refinamento está da imagem de f, precisaremos de uma forma de quantificar o excedente, isto é, o quanto $F_{(N)}(X)$ está "sobrando" em relação à $f(X)$. Para tal, podemos usar uma outra função intervalar chamada de Excedente Intervalar de F. Todavia, antes de apresentar a definição formal desta função intervalar, apresentaremos um resultado simples mas que auxilia a compreender a construção de tal função intervalar.

Proposição 2.10. *Sejam Y e $Z \in \mathcal{I}$ com $Z \subseteq Y$. Então existe um único $E \in \mathcal{I}$, tal que $Y = Z + E$. Além disso, tal intervalo E satisfaz $\underline{E} \leq 0 \leq \overline{E}$.*

Demonstração: Como $Z \subseteq Y$, segue que $\overline{Z} \leq \overline{Y}$ e $\underline{Y} \leq \underline{Z}$. Logo

$$\underline{Y} - \underline{Z} \leq 0 \leq \overline{Y} - \overline{Z}.$$

Desta forma, o intervalo $E = [\underline{Y} - \underline{Z}, \overline{Y} - \overline{Z}]$ está bem definido, isto é, é um elemento de $\mathcal{I}$.

A unicidade segue da Lei do cancelamento da adição intervalar (Proposição 1.19). De fato, se existissem E_1 e E_2 tais que $Y = Z + E_1$ e $Y = Z + E_2$, então

$$Z + E_1 = Y = Z + E_2 \Rightarrow E_1 = E_2.$$

Além disso, $0 \in E$ e

$$Z + E = [\underline{Z}, \overline{Z}] + [\underline{Y} - \underline{Z}, \overline{Y} - \overline{Z}] = [\underline{Z} + \underline{Y} - \underline{Z}, \overline{Z} + \overline{Y} - \overline{Z}] = [\underline{Y}, \overline{Y}] = Y.$$

■

Dada uma função F extensão intervalar de uma função real contínua f tal que $f(X) \subseteq F(X)$ para qualquer X, podemos usar a Proposição 2.10 para definir uma função intervalar E tal que $F(X) = f(X)+E(X)$. Esta função será chamada de excedente de F, conforme apresenta a definição a seguir.

Definição 2.10. *Seja f uma função real contínua e seja F uma extensão intervalar de f tal que $f(X) \subseteq F(X)$ para qualquer $X \in \mathcal{I}$ que seja um subconjunto do domínio de f. Chamaremos de **Excedente Intervalar** de F a função intervalar E tal que*

$$F(X) = f(X) + E(X).$$

*Além disso, $w(E(X))$ será chamado de **Peso Excedente** de F.*

A Proposição 2.10 além de garantir que a função excedente de F está bem definida, garante também que $0 \in E(X)$ para qualquer intervalo X. Além disso, note que a exigência $f(X) \subseteq F(X)$ sempre é satisfeita para extensões intervalares monotonicamente inclusivas (Teorema Fundamental da Análise Intervalar 2.1). Note ainda que, como o peso da soma de dois intervalos coincide com a soma dos pesos destes intervalos, o Peso Excedente de F poderá ser obtido pela expressão:

$$w(E(X)) = w(F(X)) - w(f(X)). \tag{2.7.9}$$

Em particular, a extensão unida terá peso excedente igual a zero (Exercício 15).

O teorema a seguir nos fornece que o peso excedente do refinamento de F de ordem N é de ordem $1/N$. Com isto temos a garantia que, conforme N tende para o infinito, o peso excedente tenderá a zero. Ou seja, que conforme aumentamos a ordem do refinamento de F, teremos que $F_{(N)}(X)$ estará de fato se aproximando de $f(X)$.

Teorema 2.2. *Sejam N um número natural, f uma função real contínua com domínio contendo o intervalo X e F uma extensão intervalar de f com F Lipschitziana e monotônica em relação à inclusão. Então*

$$w(E_{(N)}(X)) \leq K\frac{w(X)}{N},$$

onde K é uma constante e $E_{(N)}$ é a função excedente intervalar do refinamento de F sobre X de ordem N.

<u>Demonstração</u>: Como F é monotônica em relação à inclusão e é uma extensão intervalar de f, a função excedente intervalar de F, denotado

aqui por E, está bem definida (vide Definição 2.10 e comentário que segue). Neste caso tem-se

$$F(X) = f(X) + E(X).$$

Em particular esta igualdade será válida para cada um dos intervalos X_j da subdivisão uniforme de X em N partes. Disto e da definição de refinamento de F (Definição 2.9) temos que

$$\begin{aligned} F_{(N)}(X) &= \underline{\bigcup_{j=1}^{N}} F(X_j) = \underline{\bigcup_{j=1}^{N}} (f(X_j) + E(X_j)) \\ &\subseteq \underline{\bigcup_{j=1}^{N}} f(X_j) + \underline{\bigcup_{j=1}^{N}} E(X_j), \end{aligned} \tag{2.7.10}$$

onde a última passagem segue da Proposição 1.8. Como X_j são elementos da subdivisão uniforme de X, segue que $\overline{X_j} = \underline{X_{j+1}}$, ou ainda, $f(\overline{X_j}) = f(\underline{X_{j+1}})$. Isto garante que os intervalos $f(X_j)$ e $f(X_{j+1})$ são sempre não disjuntos. Disso e da Proposição 1.6 segue

$$\underline{\bigcup_{j=1}^{N}} f(X_j) = \bigcup_{j=1}^{N} f(X_j) = f(X). \tag{2.7.11}$$

Os conjuntos $E(X_j)$ também não são disjuntos visto que todos contém elemento zero (vide comentário após Definição 2.10). Logo, novamente pela Proposição 1.6, tem-se

$$\underline{\bigcup_{j=1}^{N}} E(X_j) = \bigcup_{j=1}^{N} E(X_j). \tag{2.7.12}$$

Usando as igualdades (2.7.11) e (2.7.11) em conjunto com a Equação (2.7.10) obtemos

$$F_{(N)}(X) \subseteq f(X) + \bigcup_{j=1}^{N} E(X_j),$$

donde segue

$$\begin{aligned} w(F_{(N)}(X)) &\leq w\left(f(X) + \bigcup_{j=1}^{N} E(X_j)\right) \\ &= w(f(X)) + w\left(\bigcup_{j=1}^{N} E(X_j)\right). \end{aligned} \tag{2.7.13}$$

Consideremos agora a função excedente intervalar de $F_{(N)}$, denotada por $E_{(N)}$. Para que tal função esteja bem definida, é necessário que $F_{(N)}$ atenda as condições da Definição 2.10. Como F é uma extensão intervalar de f, a Proposição 2.8 nos garante que o refinamento $F_{(N)}$ também será. Além disso, como F é monotônica em relação à inclusão, a Proposição 2.9 nos garante que $f(X) \subseteq F_{(N)}(X)$. Desta forma, a função excedente intervalar do refinamento de F sobre X de ordem N está bem definida e, da Equação (2.7.9), temos que

$$w(E_N(X)) = w(F_{(N)}(X)) - w(f(X)).$$

Usando a Equação (2.7.13) nesta última expressão, segue

$$\begin{aligned} w(E_N(X)) &\leq w(f(X)) + w\left(\bigcup_{j=1}^{N} E(X_j)\right) - w(f(X)) \\ &= w\left(\bigcup_{j=1}^{N} E(X_j)\right). \end{aligned} \tag{2.7.14}$$

Mas, note que

$$\bigcup_{j=1}^{N} E(X_j) = \left[\min_{j=1,\dots,N}\{\underline{E(X_j)}\}, \max_{j=1,\dots,N}\{\overline{E(X_j)}\}\right] = \left[\underline{E(X_i)}, \overline{E(X_f)}\right],$$

para determinados índices i e f entre $1, \dots, N$. Logo,

$$w\left(\bigcup_{j=1}^{N} E(X_j)\right) = \overline{E(X_f)} - \underline{E(X_i)}.$$

Usando isto na Equação 2.7.14, segue

$$\begin{aligned} w(E_N(X)) &\leq \overline{E(X_f)} - \underline{E(X_i)} \\ &= \overline{E(X_f)} - \underline{E(X_f)} + \underline{E(X_f)} - \underline{E(X_i)} + \overline{E(X_i)} - \overline{E(X_i)} \\ &= w(E(X_f)) + \underline{E(X_f)} + w(E(X_i)) - \overline{E(X_i)} \\ &= w(E(X_f)) + w(E(X_i)) + \underline{E(X_f)} - \overline{E(X_i)} \\ &\leq w(E(X_f)) + w(E(X_i)), \end{aligned} \tag{2.7.15}$$

onde a última passagem ocorre devido a $\underline{E(X_f)} \leq 0$ e $\overline{E(X_i)} \geq 0$, uma vez que $0 \in E(X_j)$ para qualquer índice j, em particular para $j = i$ e $j = f$. Mas como F é Lipschitziana, existe constante L tal que para qualquer $j = 1, \dots, N$, temos $w(F(X_j)) \leq Lw(X_j)$. Logo

$$w(E(X_j)) = w(F(X_j)) - w(f(X_j)) \leq w(F(X_j)) \leq Lw(X_j) = L\frac{w(X)}{N},$$

onde a última igualdade segue de $w(X_j) \cdot N = w(X)$, uma vez que $X_1, \cdots, X_N$ é subdivisã uniforme de X (Equação (2.7.6)). Substituindo esta desiguladade na Equação (2.7.15) segue

$$\begin{aligned} w(E_N(X)) &\leq w(E(X_f)) + w(E(X_i)) \\ &\leq L\frac{w(X)}{N} + L\frac{w(X)}{N} = 2L\frac{w(X)}{N}. \end{aligned}$$

Tomando $K = 2L$, segue a desigualdade do enunciado. ■

2.8 Exercícios

1. Se $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$, pode-se afirmar que $X^3 = X \cdot X \cdot X$? Prove ou dê um contra-exemplo.

2. Em cada item, defina uma função intervalar F que seja extensão intervalar da função real f dada. Em seguida, avalie F no intervalo X fornecido.

   a. (Função Exponencial) $f(x) = \exp(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ e $X = [0,\ 1]$.
   b. (Função Logaritmo) $f(x) = \ln(x)$, $x > 0$ e $X = [1,\ e]$.
   c. (Função Seno) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e $X = [0,\ 1]$.
   d. (Função Cosseno) $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e $X = \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.
   e. (Função Raiz Quadrada) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ e $X = [9,\ 25]$.

3. Considere as seguintes extensões intervalares para as funções exponencial e logarítmica:

$$\operatorname{Exp}([\underline{X}, \overline{X}]) = [\exp(\underline{X}), \exp(\overline{X})] \ \text{ e } \ \operatorname{Ln}([\underline{X}, \overline{X}]) = [\ln(\underline{X}), \ln(\overline{X})],$$

   em que o domínio da função Exp é todo o $\mathcal{I}$, enquanto o domínio da função Ln é $D_{ln} = \{X \in \mathcal{I} \mid X > 0\}$. Verifique que $\operatorname{Exp}(\operatorname{Ln}(X)) = X$ e $\operatorname{Ln}(\operatorname{Exp}((X)) = X$, para todo $X \in D_{ln}$.

4. Em cada item, obtenha uma extensão intervalar F para a função real f dada. Em seguida, compare $F(X)$ com o resultado da extensão unida aplicada no intervalo X fornecido.

   a. $f(x) = x^3$ e $X = [-2,\ 3]$.
   b. $f(x) = x^2 - 4x$ e $X = [0,\ 7]$.
   c. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ e $X = [2,\ 6]$.

d. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + 2x - 2$ e $X = [-1,\ 2]$.

5. Em cada item, calcule a expressão dada considerando o intervalo X fornecido. Utilize a Equação (2.2.2) para o cálculo da potência intervalar.

   a. $X^3 - 2X^2 + X - 5$ para $X = [-1,\ 3]$.

   b. $X^6 - 3X^2 - 5$ para $X = [0,\ 7]$.

   c. $X^4 + 4X - 1$ para $X = [-2,\ 2]$.

   d. $X^2 - \dfrac{1}{X} + 3$ para $X = [2,\ 6]$.

   e. $\dfrac{X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 1}{X}$ para $X = [1,\ 4]$.

6. Obtenha duas extensões intervalares para as funções polinomiais a seguir, sendo que uma extensão deverá utilizar a Equação (2.2.2) para o cálculo de potências e a outra deverá usar a multiplicação intervalar. Em seguida, avalie cada uma das extensões intervalares no intervalo fornecido.

   a. $f(x) = x^2 - 3x + 10$ e $X = [1,\ 3]$.

   b. $g(x) = \dfrac{x^4 - 3x + 8}{x}$ e $X = [2,\ 5]$.

7. Sejam $A = [0,\ 2]$, $B = [1,\ 3]$ e $C = [-3,\ 1] \in \mathcal{I}$. Calcule as expressões a seguir

$$(A - B)\frac{C}{B} \quad \text{e} \quad \left(\frac{A}{B} - 1\right)C$$

   e compare os resultados.

8. Prove que a função intervalar dada a seguir

$$F(X) = m(X) + \frac{1}{2}(X - m(X))$$

   não é uma inclusão monotônica.

9. Mostre que cada uma das operações aritméticas intervalares é contínua em um intervalo X de $\mathcal{I}$ para o qual a operação em questão está bem definida (isto é, no caso da divisão considere X um intervalo que não contém o zero).

10. Considere d a métrica definida na Proposição 2.3. Dados $A = [-1,\ 2]$, $B = [3,\ 5]$ e $C = [-4,\ -1]$, calcule o que se pede nos itens abaixo.

a. $d(A, B)$.
b. $d(A, C)$.
c. $d(B, C)$.
d. $d(A + C, B + C)$.
e. $d(A \cdot C, B \cdot C)$.
f. $d\left(\frac{1}{B}, \frac{1}{C}\right)$.

11. Considere d a métrica definida na Proposição 2.3. Dados A, B, C, D elementos de $\mathcal{I}$, mostre que as seguintes propriedades são válidas.

a. $d(A + B, A + C) = d(B, C)$.
b. $d(A \cdot B, A \cdot C) \leq |A| \cdot d(B, C)$.
c. $d(A + B, C + D) \leq d(A, C) + d(B, D)$.
d. $d(A \cdot B, C \cdot D) \leq |B| \cdot d(A, C) + |C| \cdot d(B, D)$.
e. $d(A, B) \leq |A| \cdot |B| \cdot d\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right)$, se $0 \notin A$ e $0 \notin B$.

12. Realize a subdivisão uniforme de $X = [1,\ 7]$ em 4 partes.

13. Considere a função real $f(x) = x^2 - 2$ com domínio em $\mathbb{R}$ e sua extensão intervalar $F = X.X - [2,\ 2]$. Calcule a subdivisão uniforme de $X = [1,\ 2]$ em 5 partes e calcule o refinamento de F de ordem 5.

14. Considere a função intervalar $F(X) = X(1-X)$ e seus respectivos refinamentos $F_{(N)}(X)$. Calcule $\lim_{k\to\infty} Y_k$ onde a sequência Y_k é dada por

$$Y_1 = F_{(1)}([0,\ 1]) = F([0,\ 1]) \text{ e}$$
$$Y_{k+1} = F_{(k+1)}([0,\ 1]) \cap Y_k \text{ para } k = 1, 2, \ldots.$$

15. Seja F a extensão intervalar unida da função real contínua f e seja E o excedente intervalar de F. Prove que

$$w(E(X)) = 0$$

para qualquer intervalo X contido no domínio de f.

Capítulo 3

Sequências Intervalares

O estudo de sequências de números reais é uma parte fundamental da matemática. O conceito de convergência de uma sequência, por exemplo, é essencial na análise matemática e é usado para definir muitos outros conceitos importantes, como limites, derivadas e integrais. O ferramental propiciado pelas sequências numéricas é tão relevante que sua aplicação se estende além da matemática, alcançando importantes áreas do conhecimento, como física, engenharias e ciência da computação.

Neste capítulo, estudaremos a generalização de alguns conceitos e resultados de sequências reais para sequências intervalares. Como o nome sugere, as sequências intervalares são aquelas em que os termos são dados por intervalos (veremos de forma mais precisa ao longo deste capítulo). Elas são muito úteis na modelagem de incertezas e em situações em que os valores exatos de uma sequência não são conhecidos. Uma exemplo de aplicação das sequências intervalares é em métodos intervalares iterativos para o cálculo de zeros de funções, como os que serão abordados no próximo capítulo.

Iniciaremos este capítulo abordando conceitos e resultados introdutórios sobre sequências intervalares. Em seguida, lidaremos com um caso específico de sequências intervalares: as sequências encaixadas. Assim como as sequências reais encaixadas, as sequências intervalares encaixadas possuem uma particular importância no que diz respeito a convergência das mesmas. Por fim, apresentaremos uma aplicação das sequências intervalares encaixadas no contexto do critério de parada natural para métodos iterativos. Um critério de parada se refere a um conjunto de regras ou condições que determinam quando um algoritmo deve parar de executar e fornecer um resultado final. Esses critérios são usados para garantir que o algoritmo tenha encontrado uma solução satisfatória dentro de um determinado limite de tempo ou recursos disponíveis.

3.1 Introdução às Sequências Intervalares

De maneira geral, uma sequência em um conjunto $\mathbb{A}$, com $\mathbb{A}$ não vazio, pode ser vista como uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{A}$ que associa a cada número natural[1] n um elemento x_n pertencente ao conjunto $\mathbb{A}$. Este elemento x_n é chamado de n-ésimo termo da sequência. Usualmente, sequências são denotadas por $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, ou por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou ainda, quando não houver riscos de confusão, simplesmente por (x_n).

Este conceito de sequências pode ser aplicado para o caso de sequências cujos elementos são intervalos. Para tal, basta considerar o contradomínio (conjunto $\mathbb{A}$) como sendo o conjunto $\mathcal{I}$. Note que o domínio também pode ser visto como um subconjunto de $\mathcal{I}$, formado pelos intervalos degenerados com extremos naturais. Desta forma, a função que caracteriza a sequência pode ser vista como uma função intervalar. Estas sequências serão chamadas de sequências intervalares, conforme apresenta a Definição 3.1.

Definição 3.1. *Uma **sequência intervalar** é uma função*

$$X : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{I},$$

que associa a cada número natural n um intervalo X_n em $\mathcal{I}$. A sequência intervalar é denotada por $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\{X_n\}$, e seus termos por $X(n)$, ou simplesmente X_n.

Vale mencionar que, em algumas circunstâncias, pode ser conveniente utilizar subíndices começando em $n = 0$ em vez de $n = 1$. Essa mudança não causa nenhuma perda de generalidade, uma vez que existe uma bijeção entre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ (que não contém o zero) e o conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Esta notação é frequente em sequências definidas por recorrência[2], onde o primeiro termo (X_0) representa um ponto inicial.

Exemplo 3.1. *A função $X : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{I}$ dada por $X_n = \left[0,\ \dfrac{1}{n}\right]$ é uma sequência intervalar. Neste caso, os três primeiros termos desta sequência serão, respectivamente, os intervalos*

$$X_1 = [0, 1],\ X_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \ \text{ e } \ X_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

Exemplo 3.2. *As funções Y, K e W, de $\mathbb{N}$ em $\mathcal{I}$, dadas por*

$$Y_n = \left[-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right], K_n = \left[\frac{1}{n},\ \frac{1}{n} + 1\right] \ \text{ e } \ W_n = \left[\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n}\right],$$

[1] Neste trabalho consideramos que o zero não pertencente ao conjunto dos números naturais ($0 \notin \mathbb{N}$).

[2] Uma sequência definida por recorrência é uma sequência onde cada termo é obtido a partir do(s) termo(s) anterior(es), seguindo uma relação de recorrência

definem sequências intervalares.

Assim como para sequência de números reais, no estudo da sequências intervalares também é muito importante a análise da convergência destas sequências. Para tal, é essencial ter bem estabelecido alguns conceitos relacionados tais como sequências limitadas, limites de sequências e o próprio conceito de sequências convergentes. Todavia, não há necessidade de trazer novas definições específicas para o caso de sequências intervalares visto que estes conceitos já estão bem estabelecidos para qualquer sequência em um espaço métrico[3] e, como vimos no capítulo anterior, $\mathcal{I}$ munido de uma certa função forma um espaço métrico (Proposição 2.3).

Vejamos a definição de uma sequência limitada em um espaço métrico.

Definição 3.2. *Sejam* $(\mathbb{A}, d)$ *um espaço métrico e* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $\mathbb{A}$. *A sequência* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é dita* ***limitada*** *se existe* $r > 0$ *tal que*

$$d(X_{m_1}, X_{m_2}) \leq r, \ \forall\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}.$$

Caso contrário, a sequência é dita ***ilimitada****.*

A condição de uma sequência ser limitada ou ilimitada pode ser analisada para qualquer sequência em um espaço métrico, em particular, para sequências reais ou para sequências intervalares, como apresentam os exemplos a seguir.

Exemplo 3.3. *Considere as sequências reais dadas por* $X_n = \frac{1}{n}$ *e* $Y_n = n$. *Vejamos se estas sequências são limitadas, considerando a métrica usual dos números reais*[4] *Note que, para quaisquer números naturais* m_1 *e* m_2*, temos*

$$d(X_{m_1}, X_{m_2}) = \left|\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right| \leq \left|\frac{1}{m_1}\right| + \left|\frac{1}{m_2}\right| \leq 1 + 1 = 2.$$

Portanto, a sequência real $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada. Por outro lado, a sequência real* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é ilimitada. De fato, para qualquer* $r \in \mathbb{R}$, *é possível escolher* $m_2 = 1$ *e* m_1 *um número natural estritamente maior que* $max\{1, r+1\}$, *de modo que*

$$d(Y_{m_1}, Y_{m_2}) = |m_1 - m_2| = m_1 - 1 > (r+1) - 1 = r.$$

[3]Tais conceitos são apresentadas brevemente neste texto (Definições 3.2, 3.3 e 3.4). O leitor que tiver interesse poderá encontrar mais informações sobre espaços métricos em Lima [15, p. 119].

[4]No capítulo anterior, tal métrica foi denotada por $d_{\mathbb{R}}$ para evitar confusão com a métrica estabelecida para o conjunto $\mathcal{I}$, uma vez que ambas apareciam em uma mesma expressão. Como este não é o caso aqui, denotaremos a métrica usual em $\mathbb{R}$, assim como a métrica em $\mathcal{I}$, simplesmente por d.

Exemplo 3.4. *Considere as sequências intervalares cujos termos são dados por* $X_n = [-2, (-1)^n]$ *e* $Y_n = [0, n]$*. Vejamos se estas sequências são limitadas, considerando a métrica definida em* $\mathcal{I}$*. Note que, para quaisquer números naturais* m_1 *e* m_2*, temos*

$$\begin{aligned} d(X_{m_1}, X_{m_2}) &= \max\{|-2-(-2)|, |(-1)^{m_1} - (-1)^{m_2}|\} \\ &= \max\{0, |(-1)^{m_1} - (-1)^{m_2}|\} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência intervalar $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada. Por outro lado,*

$$d(Y_{m_1}, Y_{m_2}) = \max\{|0-0|, |m_1 - m_2|\} = |m_1 - m_2|.$$

Com a mesma ideia do exemplo anterior, segue que a sequência intervalar $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é ilimitada.*

Para sequências $\{X_n\}$ em $\mathbb{R}$, é comum encontrar a seguinte condição para garantir a limitação da sequência

$$\exists\, \tilde{r} \in \mathbb{R} \text{ tal que } |X_n| \leq \tilde{r},\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.1.1}$$

Note que, em virtude da desigualdade triangular (item 3 da definição de métrica 2.6), tomando $r = 2\tilde{r}$, a condição (3.1.1) garante que a sequência será limitada seguindo a Definição 3.2, pois

$$d(X_n, Y_n) \leq d(X_n, 0) + d(0, Y_n) = |X_n| + |Y_n| \leq 2\tilde{r} = r.$$

O mesmo pode ser realizado para sequências intervalares considerando o zero como o intervalo degenerado $[0, 0]$. Isto é, a condição (3.1.1) aplicada a uma sequência $\{X_n\}$ intervalar garante sua limitação.

Assim como a definição de sequências limitadas em um espaço métrico pode ser usada no contexto de sequências intervalares, o mesmo ocorrerá para a definição de limite de sequências e de sequências convergentes.

Definição 3.3. *Seja* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência definida em um espaço métrico* $(\mathbb{A}, d)$*. Dizemos que* $X^* \in \mathbb{A}$ *é o* ***limite*** *da sequência* $\{X_n\}$ *quando*

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N(\epsilon) \text{ tal que se } n \geq N(\epsilon) \text{ então } d(X_n,\ X^*) < \epsilon.$$

Neste caso, denota-se $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X^*$*,* $\lim X_n = X^*$ *ou ainda* $X_n \longrightarrow X^*$*.*

Vale salientar que nem toda sequência admite um limite, como pode ser visto no Exemplo 3.7 adiante.

Definição 3.4. *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência definida em um espaço métrico $(\mathbb{A}, d)$. Dizemos que a sequência $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é* ***convergente*** *se admite um limite $X^* \in \mathbb{A}$. Neste caso, dizemos que X_n converge para X^*. Se a sequência não admite limite, diremos que ela é* ***divergente.***

Exemplo 3.5. *Considere a sequência intervalar com termos $X_n = \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$. Vejamos que esta sequência é convergente e que seu limite é o intervalo degenerado $X^* = [0, 0]$. De fato, dado $\epsilon > 0$ qualquer, tomemos o número natural $N(\epsilon)$ tal que seja um natural maior que $\frac{1}{N(\epsilon)}$. Desta forma,*

$$d(X_n, X^*) = \max\left\{|0-0|, \left|\frac{1}{n} - 0\right|\right\} = \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\epsilon)} < \epsilon.$$

Portanto, $X_n \longrightarrow X^* = [0, 0]$.

O processo de averiguar se uma sequência intervalar é convergente e, em caso positivo, qual o seu limite, pode ser simplificado através das duas sequências reais determinadas pelos extremos dos termos da sequência intervalar, conforme enuncia a proposição a seguir.

Proposição 3.1. *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência intervalar. Então*

$$X_n \longrightarrow X^*$$

se, e somente se, $\underline{X_n} \longrightarrow \underline{X^*}$ e $\overline{X_n} \longrightarrow \overline{X^*}$.

<u>Demonstração</u>:

($\Rightarrow$) Como $X_n \longrightarrow X^*$, temos que para qualquer $\epsilon > 0$ dado existe $N(\epsilon)$ tal que $n \geq N(\epsilon)$ implica que

$$d(X_n,\ X^*) = \max\{|\underline{X_n} - \underline{X^*}|,\ |\overline{X_n} - \overline{X^*}|\} < \epsilon.$$

Disto segue que $|\underline{X_n} - \underline{X^*}| < \epsilon$ e $|\overline{X_n} - \overline{X^*}| < \epsilon$. Pela definição de convergência de sequência de números reais, temos que $\underline{X_n} \longrightarrow \underline{X^*}$ e $\overline{X_n} \longrightarrow \overline{X^*}$.

($\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$, como $\underline{X_n} \longrightarrow \underline{X^*}$ e $\overline{X_n} \longrightarrow \overline{X^*}$, existem $N_1(\epsilon)$ e $N_2(\epsilon)$ tais que para $n > N_1(\epsilon)$ tem-se $d(\underline{X_n}, \underline{X^*}) < \epsilon$ e para $n > N_2(\epsilon)$, tem-se $d(\overline{X_n}, \overline{X^*}) < \epsilon$. Tomemos $N(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon),\ N_2(\epsilon)\}$. Então, para todo $n > N(\epsilon)$ segue que

$$d(X_n,\ X^*) = \max\{|\underline{X_n} - \underline{X^*}|,\ |\overline{X_n} - \overline{X^*}|\} < \epsilon.$$

Portanto, $X_n \longrightarrow X^*$.

■

Vejamos alguns exemplos de sequências intervalares convergentes e divergentes em que utilizaremos o resultado da Proposição 3.1 para comprovar estes fatos.

Exemplo 3.6. *A sequência intervalar dada por* $X_n = \left[\frac{1-n}{n},\ \frac{n+1}{n}\right]$ *é convergente. De fato, note que a sequência real* $\left\{\frac{1-n}{n}\right\}$ *converge para* -1*, pois seus termos se aproximam deste valor quando* $n \longrightarrow \infty$*. Além disso,* $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ *tem limite* 1*. Dessa forma, a Proposição 3.1 garante que* $X_n \longrightarrow [-1,\ 1]$*.*

Exemplo 3.7. *A sequência intervalar definida por* $Y_n = [0,\ n]$ *é divergente. De fato, apesar da sequência real* $\{0\}$*, definida pelos extremos inferiores de* $\{Y_n\}$ *convergir para* 0*, a sequência real* $\{n\}$*, definida pelos extremos superiores de* $\{Y_n\}$*, será divergente. Então, de acordo com a Proposição 3.1, a sequência intervalar* $\{Y_n\}$ *será divergente.*

A Proposição 3.1 nos dá um resultado importante para a AI com respeito à unicidade do limite. Isto é, como os limites de sequências reais convergentes são únicos, então o limite de uma sequência intervalar convergente também será.

Em alguns casos de sequências intervalares convergentes, o limite é um termo da sequência. Isto implica que, a partir de um certo índice, os termos da sequência começam a se repetir. Neste caso, dizemos que a sequência converge finitamente, conforme apresentado formalmente na definição a seguir. Este caso é particularmente interessante no contexto de sequências intervalares utilizadas em métodos iterativos.

Definição 3.5. *Dizemos que a sequência intervalar* $\{X_n\}$ ***converge finitamente*** *se existe um número natural* k *tal que* $X_n = X_k$*, para todo* $n \geq k$*. Neste caso, dizemos que a sequência* $\{X_n\}$ *converge em* k *passos.*

Exemplo 3.8. *Considere a sequência intervalar de termos* $X_n = [-n, n]$ *se* $n \leq 8$ *e* $X_n = [0, \sqrt{2}]$*, caso contrário. É fácil ver que esta sequência converge para* $X^* = [0, \sqrt{2}]$*. Além disso,* $X_n = X_9 = X^*$ *para todo* $n \geq 9$*. Logo, esta sequência converge finitamente em* 9 *passos.*

3.2 Sequências Encaixadas

As sequências intervalares encaixadas são construídas de tal forma que cada intervalo da sequência é um subconjunto do intervalo anterior, por isso o termo "encaixadas".

Definição 3.6. *Uma sequência intervalar* $\{X_n\}$ *é dita* ***encaixada*** *se, para qualquer* $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} \subseteq X_n.$$

Exemplo 3.9. *Considere a sequência intervalar de termos* $X_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. *Como*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} = \overline{X_{n+1}} \quad e \quad \underline{X_n} = -\frac{1}{n} \leq -\frac{1}{n+1} = \underline{X_{n+1}},$$

é imediato que

$$X_{n+1} \subseteq X_n,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. *Portanto,* $\{X_n\}$ *é uma sequência intervalar encaixada.*

Proposição 3.2. *Seja* $\{X_n\}$ *é uma sequência intervalar encaixada. Então esta sequência é convergente e*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Demonstração: Como $\{X_n\}$ é uma sequência intervalar encaixada, temos que a sequência de números reais $\{\underline{X_n}\}$, definida pelos extremos inferiores dos intervalos da sequência intervalar, é uma sequência monótona não decrescente limitada superiormente por $\overline{X_1}$. Portanto, converge para algum número real que chamaremos de $\underline{X}$. Analogamente, $\{\overline{X_n}\}$ é uma sequência de números reais monótona não crescente e limitada inferiormente por $\underline{X_1}$, logo converge para algum número real que chamaremos de $\overline{X}$.

Como $\underline{X_n} \leq \overline{X_n}$ para todo n, então $\underline{X} \leq \overline{X}$. Logo, podemos definir o intervalo (eventualmente degenerado) $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ e, pela Proposição 3.1, teremos que

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

Agora provemos que $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Se $x \in X$, então $\underline{X} \leq x \leq \overline{X}$. Devido a monotonicidade das sequências $\{\underline{X_n}\}$ e $\{\overline{X_n}\}$, temos ainda que, para qualquer n, será válido

$$\underline{X_n} \leq \underline{X} \leq x \leq \overline{X} \leq \overline{X_n}.$$

Logo $x \in X_n$ para qualquer n, donde segue que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Ou seja,

$$X \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n. \tag{3.2.2}$$

Por outro lado, se $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, então $x \in X_n$ para qualquer índice n. Logo

$$\underline{X_n} \leq x \leq \overline{X_n}.$$

Segue desta expressão que, quando n tende para o infinito,

$$\underline{X} = \lim_{n\to\infty} \underline{X_n} \leq x \leq \lim_{n\to\infty} \overline{X_n} = \overline{X}.$$

Ou seja, $x \in X$, donde segue

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq X. \tag{3.2.3}$$

Portanto, das Equações (3.2.2) e (3.2.3) segue que

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

∎

Exemplo 3.10. *Considere a mesma sequência intervalar do Exemplo 3.9, cujos termos são dados por $X_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. É fácil observar que*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = [0, 0].$$

Logo, pela Proposição 3.2, temos que a sequência $\{X_n\}$ é convergente e que

$$\lim_{n\to\infty} X_n = [0, 0].$$

A partir de uma sequência intervalar em que todos os intervalos tenham ao menos um ponto em comum, a Proposição 3.3 a seguir nos fornece uma maneira de construir uma nova sequência intervalar que será encaixada. Esta forma de construir uma sequência intervalar encaixada será relevante, por exemplo, para o Algoritmo de Critério de Parada Natural, que veremos adiante.

Proposição 3.3. *Seja $x \in \mathbb{R}$ e $\{X_n\}$ uma sequência intervalar tal que $x \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja ainda $\{Y_n\}$ a sequência intervalar definida por $Y_1 = X_1$ e $Y_{n+1} = X_{n+1} \cap Y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nestas condições são válidas as seguintes afirmações:*

1. $Y_n = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$;

2. *$x \in Y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*

3. *$\{Y_n\}$ é uma sequência intervalar encaixada;*

4. *$\lim_{n\to\infty} Y_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ e*

5. *$x \in \lim_{n\to\infty} Y_n$.*

Demonstração: Note que a sequência intervalar $\{Y_n\}$ está bem definida, uma vez que X_1 é um intervalo e que interseção de intervalos também será um intervalo (Proposição 1.4). Além disso, observe que

$$Y_{n+1} = X_{n+1} \cap Y_n = X_{n+1} \cap (X_n \cap Y_{n-1}) = ... = \bigcap_{i=1}^{n} X_i. \qquad (3.2.4)$$

Disto e da hipótese de que $x \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n-1} X_i = Y_n.$$

Ademais, é imediato da Equação (3.2.4) que $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\{Y_n\}$ é uma sequência encaixada. Logo a Proposição 3.2 garante que $\{Y_n\}$ é convergente e que

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{n-1} X_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Por fim, como $x \in X_n$ para todo n, segue que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} Y_n.$$

■

Exemplo 3.11. *Considere a sequência intervalar cujos termos são dados por $X_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + n\right]$. É fácil observar que $1 \in X_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Vejamos alguns termos desta sequência:*

$$X_1 = [0, 2],\ X_2 = \left[\frac{1}{2}, 3\right],\ X_3 = \left[\frac{2}{3}, 4\right],\ X_4 = \left[\frac{3}{4}, 5\right], \ldots$$

Note que esta não é uma sequência encaixada. Vamos agora construir uma sequência intervalar encaixada Y_n conforme Proposição 3.3, isto *é,* $Y_1 = X_1$ *e* $Y_{n+1} = X_{n+1} \cap Y_n$. *Vejamos alguns termos desta nova sequência intervalar:*

$$\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 = [0,2],\\
Y_2 &= X_2 \cap Y_1 = \left[\frac{1}{2}, 3\right] \cap [0,2] = \left[\frac{1}{2}, 2\right],\\
Y_3 &= X_3 \cap Y_2 = \left[\frac{2}{3}, 4\right] \cap \left[\frac{1}{2}, 2\right] = \left[\frac{2}{3}, 2\right],\\
Y_4 &= X_4 \cap Y_3 = \left[\frac{3}{4}, 5\right] \cap \left[\frac{2}{3}, 2\right] = \left[\frac{3}{4}, 2\right].
\end{aligned}$$

Usando o item 1 da Proposição 3.3 temos que

$$Y_n = \bigcap_{i=1}^{n} X_i = \bigcap_{i=1}^{n} \left[1 - \frac{1}{i}, 1 + i\right] = \left[1 - \frac{1}{n}, 2\right].$$

Como está é uma sequência encaixada, pela Proposição 3.2 (ou pela Proposição 3.3) temos que será convergente. Além disso, a Proposição 3.3 ainda garante que

$$1 \in \lim_{n\to\infty} Y_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = [1,2]\,.$$

Note que o intervalo limite poderia também ser obtido facilmente pela Proposição 3.1.

Como vimos anteriormente, todas as sequências intervalares encaixadas serão convergentes. Mas nem sempre é fácil verificar que uma dada sequência intervalare é encaixada. Em alguns casos, a proposição a seguir pode auxiliar neste processo.

Proposição 3.4. *Sejam* F *uma função intervalar monotonicamente inclusiva e* $X_1 \in \mathcal{I}$ *um intervalo pertencente ao domínio de* F *tal que* $F(X_1) \subseteq X_1$. *Então a sequência intervalar com termos definidos por* $X_{n+1} = F(X_n)$, *para* $n \in \mathbb{N}$, *é uma sequência intervalar encaixada.*

A demonstração deste resultado segue facilmente utilizando indução matemática, e ficará a cargo do leitor (Exercício 3).

Exemplo 3.12. *Considere a sequência intervalar com termos dados por*

$$X_1 = [1,\ 2] \quad e \quad X_{n+1} = 1 + \frac{X_n}{3}.$$

Vamos analisar se esta sequência intervalar é encaixada. Para tal, usaremos a função intervalar $F(X) = 1 + \dfrac{X}{3}$ *com domínio em* $\mathcal{I}$. *Note* *que esta função intervalar é racional, logo, monotonicamente inclusiva. Além disso*

$$X_{n+1} = 1 + \frac{X_n}{3} = F(X_n)$$

e

$$F(X_1) = 1 + \frac{X_1}{3} = 1 + \frac{[1,\ 2]}{3} = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right] \subset [1,2] = X_1.$$

Logo, pela Proposição 3.4 temos que $\{X_n\}$ *é uma sequência intervalar encaixada. Segue então da Proposição 3.2 que esta sequência será convergente e que*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right],$$

em que a demonstração da última igualdade fica a cargo do leitor.

3.3 Aplicação: Métodos Iterativos e Critério de Parada

Através de métodos iterativos, a Análise Numérica consegue resolver muitos problemas encontrados em diversas áreas de conhecimento. No próximo capítulo teremos uma amostra deste fato, quando iremos apresentar alguns métodos iterativos para obtenção de zeros reais de funções reais.

Em linhas gerais, os métodos iterativos consistem em obter uma solução aproximada para um problema por meio de uma sequência de soluções aproximadas que devem estar cada vez mais próximas da solução exata do problema. Isto é, utilizam uma sequência, via de regra infinita, que deve convergir para a solução exata. Dessa maneira, é evidente a importância das sequências intervalares e do estudo da sua convergência para a aplicação no contexto de métodos iterativos intervalares.

Todavia, um método iterativo não gera os termos da sequência de uma única vez e nem mesmo objetiva calcular o limite desta sequência (que correponde a solução exata do problema inicial). A cada etapa (chamada iteração), o método gera um novo termo da sequência com base nos termos anteriores usando sempre os mesmos procedimentos (de onde segue a nomenclatura “iterativo”). Como não é possível continuar gerando termos da sequência indefinidamente, os métodos iterativos precisam ser definidos com uma condição, chamada **critério de parada**, que estabelece quando o algoritmo deve parar. Os critérios de parada podem variar dependendo do tipo de algoritmo e do problema em questão, mas geralmente envolvem algum tipo de medida de precisão ou erro entre a solução atual e a solução ótima (ou estimada). Quando o critério de parada é baseado nas propriedades intrínsecas do problema em questão, ele é chamado de critério de parada natural. Isso significa que esse critério é definido a partir da natureza do problema e das características da solução, em vez de ser uma regra geral que pode ser aplicada a qualquer problema.

Abordaremos aqui uma possibilidade de critério de parada natural para métodos iterativos que utilizam sequências intervalares encaixadas, apresentando um algoritmo para a implemetação deste. A ideia central deste critério de parada consiste em interromper o processo iterativo quando o algoritmo obtiver um intervalo do tamanho correspondente ao da precisão da máquina. Para melhor compreensão sobre esta questão de precisão da máquina, bem como da relevância do uso de variáveis intervalares em implementações de métodos numéricos, iniciaremos com uma breve contextualização sobre representação numérica em computadores.

3.3.1 Representação Numérica em Computadores

Computadores são dispositivos eletrônicos digitais que operam com base em cálculos binários, o que significa que todos os dados, incluindo números, são representados usando combinações de 0s e 1s. Existem diferentes formas de representar números computacionalmente, dependendo das necessidades e limitações do sistema. Devido á quantidade limitada de memória disponível, haverá uma restrição na capacidade de armazenamento de números que um sistema computacional pode suportar. Para compreender um pouco melhor este problema, vamos explorar a representação de um número.

A representação usual dos números é feita utilizando um sistema de posicionamento na base 10, isto quer dizer que um número real d pode ser representado na forma

$$d_0.d_1d_2\ldots,$$

em que $d_0 \in \mathbb{Z}$ e $d_1, d_2 \ldots$ são dígitos entre 0 e 9. Ou seja,

$$d = d_0 + d_1 10^{-1} + d_2 10^{-2} \ldots.$$

Alternativamente, e considerando que d pode ser representado com dízima finita, temos

$$d = \pm 0.d_1d_2\ldots d_t \times B^e,$$

em que $B = 10$, $d_1, d_2 \ldots d_t$ são dígitos entre 0 e 9 e o expoente e é um número inteiro.

No entanto, qualquer número natural $B \geq 2$ pode ser utilizado como base. Os computadores operam na base 2, também chamada de base binária. Além disso, utilizam a seguinte normalização para a representação de números

$$d = \pm 0.d_1 d_2 \ldots d_t \times B^e,$$

em que $d_1 \neq 0$, $0 \leq d_i < B$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ t$ e $m \leq e \leq M$. O número $d_1 d_2\ \ldots d_t$ é chamado de mantissa, B é a base, e é o expoente, m o menor valor inteiro para o expoente, M o maior valor inteiro para o expoente e t é um número natural que indica o chamado número de algarismos significativos da máquina. Esta representação é chamada de representação em ponto flutuante na base B com t algarismos significativos.

Como o número de elementos na mantissa é finito e também são finitos os valores máximos e mínimos para o expoente, será finito o número de elementos de $\mathbb{R}$ que podem ser representados de maneira exata pela máquina. Todos os demais números serão aproximados (por trucamento ou arredondamento) para um desses números que podem ser representados de maneira exata. Uma consequências óbvia disto é que existirão vários números (todo um intervalo) que serão representados pelo mesmo número. Além disso, existe apenas um conjunto finito de intervalos cujos extremos são descritos por números que podem ser representados de maneira exata pela máquina.

Neste contexto, o uso de variáveis intervalares é notável para contornar as limitações numéricas impostas pela precisão finita da máquina, oferecendo uma representação mais precisa das variáveis ao considerar intervalos em vez de valores pontuais.

3.3.2 Um critério de parada natural

Conforme mencionado anteriormente, os métodos iterativos (sejam eles com variáveis reais ou intervalares) consistem em obter uma solução aproximada para um problema por meio de uma sequência de soluções aproximadas. No caso de métodos iterativos com variáveis reais, a sequência gerada será uma sequência de números reais, enquanto no caso de métodos iterativos intervalares a sequência gerada será uma sequência intervalar.

Assim como no caso de métodos iterativos com sequências reais, no caso de métodos iterativos intervalares é essencial que a sequência que define o método seja convergente. Conforme visto na Proposição 3.2, isto sempre ocorrerá se a sequência intervalar for encaixada. Consideremos então o caso de métodos iterativos que geram sequência intervalar encaixada. Como a sequência será convergente, a princípio, a cada nova iteração estaremos mais próximos do limite da sequência, isto é, da solução do problema. Todavia, devido as limitações numéricas de representação da máquina, sabemos que, ao implementar este método, a convergência deverá ocorrer em finitos passos. Isto é, a partir de certo momento, os termos da sequência gerada pela implementação deste método serão iguais pois a máquina não será mais capaz de distinguir entre dois intervalos com extremos muito próximos (mais próximos que o valor de precisão da máquina). Desta forma podemos usar, a priori, a condição

$$X_{k+1} = X_k \tag{3.3.5}$$

como critério de parada, pois sabemos que não há como a implementação do método fornecer uma aproximação melhor do que esta. Note que este critério de parada depende fortemente de propriedades intrínsecas do problema, por isso é considerado um critério de parada natural.

Em muitos métodos iterativos intervalares, a sequência gerada pelo método é definida via função intervalar racional. Isto é, dada uma condição inicial intervalar X_0, os demais termos são calculados pela fórmula de recorrência

$$X_{k+1} = F(X_k). \tag{3.3.6}$$

Sabemos que toda função intervalar racional é monotonicamente inclusiva (Lema 2.1). Desta forma, se $F(X_1) \subset X_1$, pela Proposição 3.4, então a sequência gerada pelo método interativo será encaixada. Neste caso, o critério apresentado na Equação (3.3.5) pode ser reescrito na forma

$$X_k = F(X_k). \tag{3.3.7}$$

No entanto, apesar de $\{X_k\}$ ser uma sequência encaixada, devido às limitações de representação inerente à máquina, pode acontecer que a sequência gerada computacionalmente não seja. Isto é, ao efetuar as operações intervalares que definem os extremos de um certo intervalo X_k, pode ocorrer da máquina não conseguir representar o valor exato dos extremos do intervalo. Neste caso, a implementação computacional deverá retornar o intervalo Y_k com extremos representável pela máquina que contenha o intervalo X_k e seja o mais próximo possível deste intervalo. A inclusão $X_k \subseteq Y_k$ é essencial para que nenhum elemento do intervalo X_k seja descartado. No entanto, esse procedimento pode prejudicar a propriedade de encaixamento da sequência. Isto é, pode ocorrer $Y_{k+1} = F(Y_k) \nsubseteq Y_k$, apesar de $X_{k+1} = F(X_k) \subseteq X_k$. Para contornar este problema computacional, podemos usar a ideia apresentada na Proposição 3.3. Isto é, em vez de implementar computacionalmente os termos da sequência usando a Equação (3.3.6), podemos usar

$$X_{k+1} = F(X_k) \cap X_k, \tag{3.3.8}$$

a fim de garantir que a implementação computacional desta sequência seja também encaixada. Note que nos casos em que o resultado computacional de $F(X_k)$ for exato, então $F(X_k) \subseteq X_k$ e, assim, $F(X_k) \cap X_k$ coincidirá com $F(X_k)$.

Com esta adequação, podemos utilizar o critério de parada natural apresentado pela Equação (3.3.7). Neste caso iremos obter o intervalo de menor comprimento que é representável pela máquina e que contém o intervalo limite $X^* = \lim_{k\to\infty} X_k$. Isto é, obteremos a melhor aproximação possível para o intervalo $X^* = F(X^*)$, considerando as limitações da máquina [19, p. 60].

Apesar da argumentação acima ter sido realizada considerando-se uma função intervalar racional, poderíamos ser mais abrangentes e ter considerando apenas uma função intervalar monotonicamente inclusiva. Todavia, devido a facilidade de implementação via operações aritméticas intervalares, as funções racionais são bem mais usadas nos métodos iterativos intervalares. Além disso, note ainda que procedimento análogo pode ser realizado para sequências encaixadas intervalares de forma geral. Isto é, a fim de garantir que a sequência intervalar gerada computacionalmente continue sendo encaixada, em cada etapa, calcula-se o termo X_{k+1} pela regra da sequência e realiza-se a interseção deste intervalo com o intervalo X_k. O resultado desta interseção é que será considerado o termo X_{k+1} da sequência computacional.

Uma forma de implementar este critério de parada, para o caso de sequências intervalares definidas via uma função racional é apresentado pelo Algoritmo 1. O leitor que tiver interesse poderá também consultar uma implementação deste algoritmo em linguagem *GNU Octave* para um exemplo específico no *GitHub*[5].

Algoritmo 1: Critério de parada natural (F racional)

Dados: X_1, F
início
  Atribua: $i = 1$;
  Atribua: $X_{atual} = X_1$;
  Calcule: $X_{prox} = F(X_{atual}) \cap X_{atual}$;
  enquanto $X_{atual} \neq X_{prox}$ **faça**
    Mostre: i, X_{atual};
    Atualize: $i = i + 1$;
    Atualize: $X_{atual} = X_{prox}$;
    Atualize: $X_{prox} = F(X_{atual}) \cap X_{atual}$;
  fim
fim

[5]Link de acesso ao *GitHub*: https://github.com/nicolecassimiro/intervalanalysis.

Exemplo 3.13. *Considere a sequência intervalar definida recursivamente pela função racional* $F(X) = 1 + \dfrac{X}{3}$, *com* $X_1 = [1, 2]$ *(mesma sequência abordada no Exemplo 3.12). Considerando a implementação do Algoritmo 1 para este problema em uma máquina com precisão de 15 casas decimais, os resultados exibidos na tela seriam os seguintes:*

```
Iteracao i = 1. Intervalo [1, 2]
Iteracao i = 2. Intervalo [1.333333333333333, 1.666666666666667]
Iteracao i = 3. Intervalo [1.444444444444444, 1.555555555555556]
Iteracao i = 4. Intervalo [1.481481481481481, 1.518518518518519]
Iteracao i = 5. Intervalo [1.493827160493827, 1.506172839506173]
Iteracao i = 6. Intervalo [1.497942386831275, 1.502057613168725]
Iteracao i = 7. Intervalo [1.499314128943758, 1.500685871056242]
Iteracao i = 8. Intervalo [1.499771376314586, 1.500228623685414]
Iteracao i = 9. Intervalo [1.499923792104862, 1.500076207895138]
Iteracao i = 10. Intervalo [1.499974597368287, 1.500025402631713]
Iteracao i = 11. Intervalo [1.499991532456095, 1.500008467543905]
Iteracao i = 12. Intervalo [1.499997177485365, 1.500002822514635]
Iteracao i = 13. Intervalo [1.499999059161788, 1.500000940838212]
Iteracao i = 14. Intervalo [1.499999686387262, 1.500000313612738]
Iteracao i = 15. Intervalo [1.49999989546242, 1.50000010453758]
Iteracao i = 16. Intervalo [1.49999996515414, 1.50000003484586]
Iteracao i = 17. Intervalo [1.499999988384713, 1.500000011615287]
Iteracao i = 18. Intervalo [1.499999996128237, 1.500000003871763]
Iteracao i = 19. Intervalo [1.499999998709412, 1.500000001290588]
Iteracao i = 20. Intervalo [1.499999999569804, 1.500000000430196]
Iteracao i = 21. Intervalo [1.499999999856601, 1.500000000143399]
Iteracao i = 22. Intervalo [1.4999999999522, 1.5000000000478]
Iteracao i = 23. Intervalo [1.499999999984066, 1.500000000015934]
Iteracao i = 24. Intervalo [1.499999999994688, 1.500000000005312]
Iteracao i = 25. Intervalo [1.499999999998229, 1.500000000001771]
Iteracao i = 26. Intervalo [1.499999999999409, 1.500000000000591]
Iteracao i = 27. Intervalo [1.499999999999803, 1.500000000000197]
Iteracao i = 28. Intervalo [1.499999999999934, 1.500000000000066]
Iteracao i = 29. Intervalo [1.499999999999978, 1.500000000000022]
Iteracao i = 30. Intervalo [1.499999999999992, 1.500000000000008]
Iteracao i = 31. Intervalo [1.499999999999997, 1.500000000000003]
Iteracao i = 32. Intervalo [1.499999999999999, 1.500000000000001]
```

Desta forma, a aproximação obtida para o limite da sequência intervalar dada por F, *nesta máquina, foi o intervalo*

$$\tilde{X}^* = [1.499999999999999, 1.500000000000001]$$

obtido na iteração $i = 32$. Note que este não é o intervalo limite desta sequência intervalar. De fato, no Exemplo 3.12 vimos que o limite será o intervalo degenerado $X^* = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Mas devido a limitação da máquina, sabemos que não conseguiremos uma aproximação melhor do que $\tilde{X}^*$. De fato, caso não tivéssemos estabelecido o critério de parada, as próximas iterações iriam sempre exibir o mesmo intervalo $\tilde{X}^*$ repetidamente.

Antes de terminar a seção, é importante ressaltar caso o processo de geração da sequência encaixada depender explicitamente de k e X_k, isto é

$$X_{k+1} = F(k,\ X_k),$$

então poderíamos ter $X_{k+1} = X_k$ para algum k e ainda $X_{k+2} \neq X_k$ apesar de $\{X_k\}$ ser encaixada, de maneira que o critério de parada dado pela Equação (3.3.5) não seria válido neste caso. Vejamos a seguir um exemplo onde isto ocorre.

Exemplo 3.14. *Considere a sequência intervalar dada por*

$$X_{k+1} = \left(\frac{[0,2]}{k}\right) \cap X_k,$$

com $X_1 = [0,1]$. É fácil observar que esta é uma sequência intervalar encaixada. Observemos alguns termos desta sequência:

$$\begin{aligned}
X_1 &= [0,1] \\
X_2 &= \left(\frac{[0,2]}{1}\right) \cap [0,1] = [0,1] \\
X_3 &= \left(\frac{[0,2]}{2}\right) \cap [0,1] = [0,1] \\
X_4 &= \left(\frac{[0,2]}{3}\right) \cap [0,1] = [0,1] = \left[0, \frac{2}{3}\right] \\
X_5 &= \left(\frac{[0,2]}{4}\right) \cap \left[0, \frac{2}{3}\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right] \\
&\ \vdots \\
X_{k+1} &= \left[0, \frac{2}{k}\right], \quad k \geq 1.
\end{aligned}$$

Apesar dos três primeiros termos da sequência coincidirem, esta sequência não é constante para os demais termos.

3.4 Exercícios

1. Considere as sequências intervalares cujos termos são dados abaixo. Prove que são limitadas e calcule o intervalo limite.

   a. $X_n = \left[\dfrac{n+1}{n+4}, \dfrac{n+3}{n+4}\right]$.

   b. $X_n = \left[\dfrac{2n+3}{n}, \dfrac{3n+5}{n+7}\right]$.

   c. $X_n = \left[\dfrac{1-n}{n}, \dfrac{n+3}{n}\right]$.

   d. $X_n = \dfrac{1}{[2,\ 5]^n}$.

   e. $X_n = \dfrac{\left[1+\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right),\ 3+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]}{[2,\ 5]^n}$.

2. Considere as sequências reais dadas por $a_n = -n$ e $b_n = n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, e considere a sequência intervalar com termos dados por $X_n = [a_n, b_n]$

   a. Verifique se $\{X_n\}$ é uma sequência intervalar encaixada.

   b. Verifique se a sequência real $\{a_n\}$ é convergente e, se sim, calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   c. Verifique se a sequência real $\{b_n\}$ é convergente e, se sim, calcule $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

   d. Com base nos itens anteriores e na Proposição 3.1, a sequência intervalar $\{X_n\}$ é convergente?

   e. Calcule os 4 primeiros termos da sequência intervalar $\{Y_n\}$ com termos dados por $Y_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$.

   f. Verifique que a sequência intervalar $\{Y_n\}$ definida no item anterior é encaixada, convergente e calcule o intervalo limite.

3. (Demonstração da Proposição 3.4) Sejam F uma função intervalar monotonicamente inclusiva e $X_1 \in \mathcal{I}$ um intervalo pertencente ao domínio de F tal que $F(X_1) \subseteq X_1$. Então a sequência intervalar com termos definidos por $X_{n+1} = F(X_n)$, para $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência intervalar encaixada.

Capítulo 4

Zero de Funções

Existem diversos métodos numéricos clássicos, tais como o método da bissecção e o método de Newton, que são utilizados para encontrar zeros de funções. No entanto, esses métodos podem apresentar limitações ao lidar com incertezas e variações nos dados de entrada. Por outro lado, os métodos intervalares para encontrar zeros de funções, como os que serão apresentados neste capítulo, trabalham com intervalos que representam uma faixa de possíveis valores para as variáveis, possibilitando a determinação de intervalos que contenham as raízes reais da função. Isso é especialmente útil em situações onde variações nos dados de entrada ou limitações da máquina resultem em valores imprecisos. Ademais, os métodos intervalares oferecem garantias de que todas as raízes contidas em um determinado intervalo serão aproximadas. Essas vantagens tornam os métodos intervalares uma ferramenta útil e eficiente para lidar com incertezas e variações em diversos problemas que envolvem a busca por zeros de funções.

O objetivo do presente capítulo é apresentar o cálculo de zeros de funções no contexto da Análise Invervalar. Para tal, iniciaremos com uma breve revisão sobre o cálculo de zeros de funções reais, tanto na forma analítica quanto na forma numérica. Abordaremos brevemente alguns métodos clássicos (não intervalares), a fim de facilitar a compreensão dos métodos intervalares que serão explorados em seguida.

Apresentaremos a versão intervalar do Método da Bissecção, bem como uma implementação deste método. O Método da Bissecção é um método iterativo utilizado para encontrar zeros de funções reais, amplamente conhecido pela sua facilidade de implementação e, também, pela sua convergência lenta. Em muitas implementações, ele é utilizado para verificar a existência de raízes de funções reais em intervalos e isolá-las. Nesta perspectiva, mostraremos ainda uma variação da implementação do Método da Bissecção utilizada para refinar um dado intervalo que contenha uma raiz, de maneira que ele se torne tão pequeno quanto for necessário.

Por fim, veremos a versão intervalar do Método de Newton Clássico, conhecido também como Método de Newton-Raphson ou Método da Tangentes. O Método de Newton também é um método iterativo para encontrar zeros de funções reais, no entanto, é bem mais eficiente que o Método da Bissecção, no sentido que apresenta uma convergência mais rápida (requer menos iterações para encontrar uma solução para o problema). As contrapartidas, neste caso, são a existência de hipóteses mais fortes para garantir a convergência e a necessidade de trabalhar com a derivada da função.

As implementações dos algoritmos apresentados ao longo deste capítulo foram realizadas em *GNU Octave* e podem ser consultados no *GitHub*[1].

4.1 Cálculo de Zeros de Funções

Dada uma função real f, um zero (ou uma raíz) de f é um elemento x do domínio tal que $f(x) = 0$. O problema de encontrar os zeros de uma função aparece em diferentes contextos, tais como: estudar o comportamento de funções, encontrar as soluções de uma equação, encontrar raízes de polinômios, definir variedades em geometria diferencial, definir variedade algébrica em geometria algébrica, etc.

Dependendo da função, é possível encontrar seus zeros de maneira analítica, como no exemplo a seguir.

Exemplo 4.1. *Seja a função real* $f(x) = x^4 - 5x^2 - 36$. *Vamos encontrar os zeros de* f. *Note que*

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \tag{4.1.1}$$

é uma equação biquadrada. O primeiro passo para resolvermos é substituir a incógnita x^2 *por* y, *obtendo a seguinte equação*

$$y^2 - 5y - 36 = 0. \tag{4.1.2}$$

Assim, reduzimos a Equação (4.1.1) *à uma equação do segundo grau dada pela Equação* (4.1.2), *que admite duas soluções,* $y' = 9$ *e* $y'' = -4$. *Por fim, devemos relacionar as duas raízes da equação em* y *com a equação* $x^2 = y$. *Então,*

- $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$.
- $x^2 = -4$ *não ocorre em* $\mathbb{R}$. *Portanto, os zeros da função real* f *são dados por* $x = -3$ *e* $x = 3$.

No exemplo que acabamos de abordar a função em questão era um polinômio de grau 4 para o qual foi fácil obter os dois zeros reais de f

[1] Link de acesso ao *GitHub*: https://github.com/nicolecassimiro/intervalanalysis.

analiticamente. Conforme Humes [12, p. 8], para polinômios de grau menor ou igual a 4 é sempre possível calcular as raízes analiticamente. Porém, mesmo para funções relativamente simples como polinômios, se o grau for superior a 4, pode ocorrer de não ser possível encontrar as raízes de forma analítica. Nestes casos, poderá ser utilizado métodos numéricos que, sob certas hipóteses, permitirão encontrar aproximações das raízes da função.

Os métodos que abordaremos neste texto são métodos numéricos iterativos. Sumariamente, resolver um problema através de um método iterativo consiste em determinar, a partir de uma aproximação inicial x_0, uma sequência de soluções aproximadas $x_1, \ x_2, \ldots, \ x_k, \ldots$ que, sob determinadas condições, devem convergir para a solução exata do problema. O termo "iterativo" deve-se ao fato de que o cálculo de cada novo termo da sequência de soluções aproximadas é realizado utilizando os termos anteriores.

Via de regra, um processo iterativo não necessariamente irá fornecer a raiz exata para o zero de f, mas sim uma sucessão de valores aproximados para alguma das raízes. Desta forma, é importante mensurar quão boa é a aproximação obtida pelo método numérico, pois desta maneira, poderemos parar a execução do método quanto obtivermos uma aproximação satisfatória x^*.

Se x é o zero de f, buscaremos encontrar um ponto x^* que chamaremos de solução aproximada de f com precisão ϵ tal que

$$|x - x^*| \leq \epsilon. \tag{4.1.3}$$

Todavia, na maioria dos casos não sabemos qual é a raiz exata da função, o que tende a dificultar a análise do erro cometido. No entanto, através da análise do método e da função envolvidos é possível determinamos uma delimitação para o erro a fim de garantir que não seja maior que um valor $\epsilon > 0$ previamente escolhido.

Particularmente para o problema de encontrar zero de funções, dois critérios de parada são adotados de maneira mais usual. O primeiro deles consiste em parar a execução do método quando a distância entre o ponto atual e o ponto anterior for menor do que ou igual a ϵ, ou seja, se

$$|x - x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon.$$

Isto, no entanto, nem sempre garante que o valor da função esteja suficientemente próximo de zero. Por esse motivo, em algumas situações é preferível utilizar como critério de parada a condição

$$|f(x_k)| \leq \epsilon.$$

Entretanto, esta última condição não garante que x_k esteja suficientemente próximo da solução do problema e cumpra (4.1.3). Com base nisso, também são muito utilizados critérios de parada que combinam as duas estratégias.

Resumindo, a execução de um método iterativo se inicia a partir da escolha dos seguintes elementos: aproximação inicial, que consiste numa primeira aproximação para a solução do problema numérico, e o critério de parada, que é o instrumento por meio do qual o procedimento iterativo é finalizado, o qual garante que a aproximação calculada, numa certa iteração, seja de precisão ϵ.

O Teorema do Valor Intermediário[2] sugere um processo simples para encontrarmos uma aproximação para uma raiz de uma função. Em linhas gerais, a ideia é testar se num dado intervalo a função troca de sinal, o que caracterizará a existência de ao menos um zero. Então, supondo que uma raiz de f esteja contida em um dado intervalo $I = [a,\ b] \subseteq D_f$, construímos uma sucessão de intervalos, sendo cada um deles a metade do intervalo anterior, que sempre contém a raiz. Este processo é conhecido como Método da Bissecção. Para que possamos aplicá-lo e garantir convergência, é suficiente que f seja uma função contínua em um intervalo $[a,\ b]$, em que a e b são tais que $f(a)\cdot f(b) < 0$.

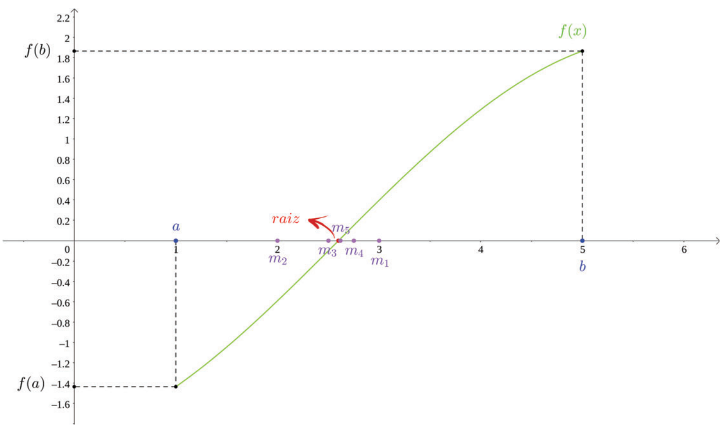

Figura 4.1: Representação Geométrica do Método da Bissecção.

Na Figura 4.1, ilustramos o funcionamento dos primeiros passos do Método da Bissecção, inicialmente dividimos o intervalo $[a,\ b]$ ao meio, obtendo $[a,\ m_1]$ e $[m_1,\ b]$, com $m_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Como $f(a)\cdot f(m_1) < 0$, então a raiz está em $(a,\ m_1)$ e descartamos o intervalo $[m_1,\ b]$. Depois, fazemos novamente a divisão, agora do intervalo $[a,\ m_1]$, resultando

[2]Teorema do Valor Intermediário: seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo $[a,\ b]$. Se $f(a)\cdot f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \delta$ entre a e b que é zero de $f(x)$, ou seja, $f(\delta) = 0$ [12, p. 12].

nos seguintes intervalos: $[a,\ m_2]$ e $[m_2,\ m_1]$, com $m_2 = \dfrac{m_1 + a}{2}$. De maneira análoga ao passo anterior, como $f(m_2) \cdot f(m_1) < 0$, concluímos que a raiz está em $(m_2,\ m_1)$ e podemos descartar o intervalo $[a,\ m_2]$.

Este processo é repetido para os novos subintervalos até que se obtenha uma precisão pré-fixada desejada. Para um dado erro absoluto ϵ, em cada iteração k, podemos, por exemplo, utilizar o teste

$$\left| \frac{b_k - a_k}{2} \right| \leq \epsilon_k$$

de modo que o erro cometido seja inferior a metade da amplitude do intervalo.

É possível estimar o número n de iterações necessárias para garantir uma aproximação da raiz com um erro absoluto máximo de ϵ. Considerando que queremos

$$\frac{b - a}{2^n} \leq \epsilon,$$

o número de iterações necessárias pode ser estimado através da fórmula

$$n \geq \frac{log(b - a) - log\epsilon}{log2}.$$

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 4.2. *Seja a função real $f(x) = x^4 - 5x^2 - 36$ apresentada no Exemplo 4.1. Sabemos que os zeros de f são dados por $x = -3$ e $x = 3$. Dessa forma, vamos aproximar a maior raiz de f usando o Método da Bissecção com precisão $\epsilon = 10^{-1}$.*

Considere o intervalo $I = [2,\ 5]$. Como f é contínua em I e

$$f(2)f(5) = (-40)(464) = -18560 < 0,$$

podemos aplicar o Método da Bissecção. O número de iterações é dado por

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{log(b - a) - log\epsilon}{log2} \\ &\geq \frac{log(5 - 2) - log10^{-1}}{log2} \\ &\geq \frac{log(3) - (-1)log10}{log2} \\ &\geq \frac{log3 + 1}{log2} \\ &\geq 4.906890595608519. \end{aligned}$$

Logo, na quinta iteração, isto é, no quinto ponto médio calculado, é esperado que o erro seja menor do que ou igual a ϵ, o que acabou se confirmando de acordo com os resultados apresentados na Tabela 4.1.

$\mathbf{n}$	$\mathbf{a_n}$	$\mathbf{b_n}$	$\mathbf{m_n = \frac{a_n + b_n}{2}}$	$\mathbf{f(a_n)}$	$\mathbf{f(b_n)}$	$\mathbf{f(m_n)}$	$\epsilon_\mathbf{n} = \left\lvert \mathbf{\frac{b_n - a_n}{2}} \right\rvert$
1	2	5	3.5	$-$	$+$	$+$	$1.5 > 10^{-1}$
2	2	3.5	2.75	$-$	$+$	$-$	$0.75 > 10^{-1}$
3	2.75	3.5	3.125	$-$	$+$	$+$	$0.375 > 10^{-1}$
4	2.75	3.125	2.9375	$-$	$+$	$-$	$0.1875 > 10^{-1}$
5	2.9375	3.125	**3.03125**	$-$	$+$	$+$	$0.09375 < 10^{-1}$

Tabela 4.1: Aproximação da maior raiz de f usando o Método da Bissecção.

Portanto, na quinta iteração obtemos a aproximação da maior raiz de f, dada por $m_5 = 3.03125$, sendo o erro inferior à precisão desejada de $\epsilon = 10^{-1}$.

Exemplo 4.3. *Considere a equação $5x = e^x$. Note que buscar uma solução desta equação é equivalente a procurar as raízes da função $f(x) = 5x - e^x$. Todavia, não é trivial obter uma solução analítica para este problema. Procuremos então uma solução aproximada x^*. Para observar o comportamento da função f no que diz respeito a mudança de sinais, podemos observar o sinal de f aplicada em alguns valores do domínio, como mostra a Tabela 4.2.*

$\mathbf{x}$	$\mathbf{f(x)}$
0	$-$
1	$+$
2	$+$
3	$-$
4	$-$

Tabela 4.2: Teste de Valores para x e $f(x)$.

Pelo Teorema do Valor Intermediário, há pelo menos uma raiz em $[0,\ 1]$ e pelo menos uma raiz em $[2,\ 3]$. Podemos esboçar os gráficos das funções e^x e $5x$ e analisar as intersecções, pois suas abscissas nos dão indicações a respeito dos zeros de f, uma vez que queremos encontrar aproximações para valores de x tais que $5x = e^x$.

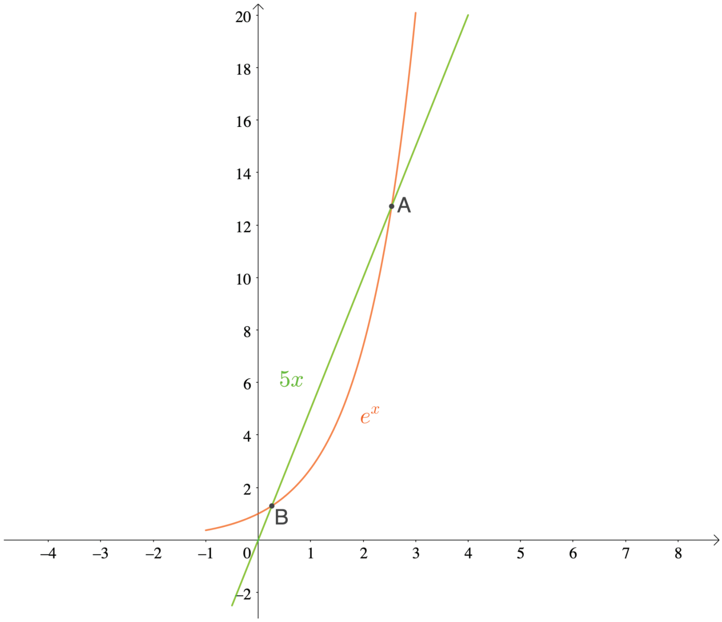

Figura 4.2: Representação Geométrica dos Zeros de f.

Antes de continuar, vale ressaltar que a Tabela 4.2 garante que há solução nos intervalos $[0,\ 1]$ *e* $[2,\ 3]$, *enquanto o gráfico apresentado na Figura 4.2 nos dá boas indicações, mas pode nos levar a imprecisões, devido às limitações dos recursos computacionais.*

Vamos agora buscar um valor aproximado para a raiz de $f(x) = 5x - e^x$ *que se encontra no intervalo* $[2,\ 3]$, *usando o Método da Bissecção com precisão* $\epsilon = 10^{-1}$. *Notemos que*

$$
\begin{aligned}
n &\geq \frac{log(b-a) - log\epsilon}{log2} \\
&\geq \frac{log(3-2) - log10^{-1}}{log2} \\
&\geq \frac{log(0) - (-1)log10}{log2} \\
&\geq \frac{1}{log2} \\
&\geq 3.321928094887362,
\end{aligned}
$$

assim, no quarto ponto médio calculado é esperado que o erro seja menor do que ou igual a ϵ, *o que pode ser visualizado na Tabela 4.3.*

$\mathbf{n}$	$\mathbf{a_n}$	$\mathbf{b_n}$	$\mathbf{m_n = \frac{a_n + b_n}{2}}$	$\mathbf{f(a_n)}$	$\mathbf{f(b_n)}$	$\mathbf{f(m_n)}$	$\epsilon_\mathbf{n} = \left\lvert \mathbf{\frac{b_n - a_n}{2}} \right\rvert$
1	2	3	2.5	$+$	$-$	$+$	$0.5 > 10^{-1}$
2	2.5	3	2.75	$+$	$-$	$-$	$0.25 > 10^{-1}$
3	2.5	2.75	2.625	$+$	$-$	$-$	$0.125 > 10^{-1}$
4	2.5	2.625	**2.5625**	$+$	$-$	$-$	$0.0625 < 10^{-1}$

Tabela 4.3: Aproximação da maior raiz de f usando o Método da Bissecção.

Portanto, a aproximação da maior raiz da função f é dada por $m_4 = 2.5625$.

A análise de gráficos e tabelas pode nos ajudar na detecção de intervalos que contenham uma ou mais raízes, mas nem sempre será possível obter tal intervalo, não sendo satisfeitas, portanto, as hipóteses de convergência do método. A busca por um intevalo $[a, b]$ que satisfaça as condições de convergência pode ser altamente custosa e até ineficiente, além de que não podemos deixar de lado que há problemas em que o Método da Bissecção não pode ser aplicado, como o caso das funções que tangenciam a abscissa, como, por exemplo a função $f(x) = (x-1)^2$ ou $f(x) = x^6 - 2\sqrt{3}x^5 + 3x^4 + \sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3}$.

Neste sentido, a Análise Intervalar pode ser uma grande aliada, uma vez que este ferramental nos fornece um método intervalar que descarta intervalos que não contém raiz, poupando vários passos do processo, auxiliando na velocidade de convergência e no custo computacional, conforme veremos a seguir.

4.2 Método da Bissecção Intervalar

Conforme mencionado previamente, o Método da Bissecção (usual) nos fornece um procedimento para encontrar raízes de uma função contínua f num intervalo $[a, b]$, desde que a função tenha sinais opostos nos extremos deste intervalo, isto é, $f(a) \cdot f(b) < 0$. A ideia geral do método é dividir este intervalo ao meio e manter o subintervalo que continua tento a propriedade de que a função tenha sinais opostos nos extremos. Então repetir o processo até que se esteja tão próximo da raiz quanto desejado. Esta condição com respeito ao sinal da função nos extremos é essencial para garantir a existência de ao menos uma raiz no intervalo que está sendo analisado. Mais precisamente, esta exigência garante a existência de um número ímpar de raízes.

Todavia, esta análise de sinais de f não permite diferenciar um intervalo com um número par de raízes de um intervalo sem raízes. Consequentemente, o Método da Bissecção (usual) poderá descartar diversos subintervalos de $[a, b]$ que contenham raízes. Uma alternativa seria não descartar estes intervalos. Isto seria equivalente a dividir o intervalo $[a, b]$ em tantos subintervalos quanto a precisão desejada e a analisar os sinais de f em todos os extremos destes intervalos. Mas note que, além disso ser bastante custoso, ainda permaneceríamos com o problema de não saber se nos subintervalos que não teve troca de sinal possuem raízes ou não. Neste contexto, conseguir identificar intervalos em que a função não possui raízes é bastante relevante. Uma maneira de obter este tipo de informação é através do Método da Bissecção Intervalar, que iremos abordar nesta seção. Vale salientar que o teste realizado pelo Método da Bissecção Intervalar não permitirá assegurar que o intervalo possui raiz, mas permitirá identificar muitos intervalos que não possuem raízes.

Para compreender o Método da Bissecção Intervalar é importante relembrar o Teorema Fundamental da Análise Intervalar 2.1. Este teorema garante que se uma extensão intervalar F de f é monotônica em relação à inclusão, então a imagem da função real restrita à um certo intervalo está contida na imagem da extensão intervalar. Isto é,

$$f([a, b]) \subseteq F([a, b]).$$

Note que se $0 \in F([a, b])$ não podemos garantir que $0 \in f([a, b])$. Isto é, o fato de $F([a, b])$ conter o zero não garante a existência de uma raíz de f neste intervalo. Todavia, se $0 \notin F([a, b])$, então com certeza não haverá solução de $f(x) = 0$ em $[a, b]$. Sendo assim as extensões intervalares podem ser usadas para descartar intervalos que não contém raízes de f [17].

Com base nisto, podemos adaptar o Método da Bissecção usual utilizando esta forma de verificar intervalos sem raízes. Isto é: em cada etapa dividimos o intervalo em questão ao meio, mas substituímos a análise de sinais de f nos extremos destes subintervalos por verificar se 0 pertence à F aplicada no subintervalo. Caso isto não ocorra, o subintervalo é descartado. Assim como no Método da Bissecção usual, poderemos repetir este processo até que os subintervalos tenham um tamanho pré estabelecido. Desta forma, os subintervalos restante possivelmente conterão raízes de f, enquanto todos os intervalos descartados com certeza não terão.

Uma possível implementação deste método é apresentada no Algoritmo 2. Alé deste método excluir apenas intervalo sem raízes, ele irá indicar o primeiro intervalo (mais à esquerda) que possivelmente possui uma raíz de f, dentro de uma tolerância pré estabelecida [6]. Vale mencionar que existem diferentes algoritmos para o Método da Bissecção Intervalar. Optamos por apresentar o Algoritmo 2 devido a sua simplicidade, facilitando a compreensão da ideia geral do método. Todavia ele possui algumas limitações e nuances a serem consideradas que serão discutidas ao longo desta seção.

Algoritmo 2: Método da Bissecção Intervalar

BissecçãoIntervalar$(F,\ [a,b],\ \epsilon)$ **início**
  se $0 \notin F([a,b])$ **então**
    salve: $ConjuntoSemRaiz = ConjuntoSemRaiz \bigcup [a,b]$;
  senão
    se $b - a < \epsilon$ **então**
      retorne: $I_c = [a,b]$; % Intervalo candidato à conter raiz
    senão
      calcule: $BissecçãoIntervalar\left(F, \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right], \epsilon\right)$;
      calcule: $BissecçãoIntervalar\left(F, \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right], \epsilon\right)$;
    fim
  fim
fim

Observe que os dados de entrada do algoritmo são: a função intervalar F, o intervalo $[a,b]$ e a precisão ϵ. Uma das saídas do algoritmo será a variável "*ConjuntoSemRaiz*", que será a união de todos os subconjuntos de $[a,b]$ que o algoritmo testou e que não possuem raízes de f. Diante disto, as raízes de f só poderão estar no complementar deste conjunto interseção com $[a,b]$. O algoritmo também poderá retornar um intervalo I_c, de tamanho menor que ϵ, que é candidato a conter ao menos uma raiz de f. Os casos em que este intervalo I_c é retornado, bem como porque I_c é apenas candidato a conter zero de f ficarão mais claros mais adiante.

Em cada etapa, o algoritmo iniciará verificando se 0 está no intervalo resultante de F aplicada em $[a,b]$. Se $0 \notin F([a,b])$, então o algoritmo irá armazenar este intervalo na variável *ConjuntoSemRaiz*. Caso $0 \in F([a,b])$, então o algoritmo realizará o refinamento sobre $[a,b]$ e repetirá a análise para estes novos intervalos (da esquerda para a direita). Este processo repete-se até que se obtenha um intervalo com largura menor do que ϵ. Note que, se no primeiro teste (com o intervalo $[a,b]$ inicial) tivermos que $0 \notin F([a,b])$, então nenhum refinamento irá ocorrer e a variável *ConjuntoSemRaiz* conterá todo o intervalo $[a,b]$. Neste caso, o intervalo I_c não será retornado.

Por fim, vale reforçar que este algoritmo não irá descartar nenhum intervalo contendo zero de f. Isto é, os intervalos desconsiderados (que serão todos armazenados na conjunto dado pela variável *ConjuntoSemRaiz*) com certeza não possuem raízes de f.

A seguir, vamos analisar algumas questões particulares a fim de compreender melhor certos detalhes do algoritmo.

Observação 4.1. *Vamos verificar a quantidade de intervalos que serão considerados ao longo da execução do algoritmo. Na i-ésima iteração temos no máximo* 2^i *intervalos para serem testados. A priori, este possível crescimento exponencial de intervalos poderia ser preocupante. Entretanto, a cada iteração a quantidade de intervalos não descartados será no máximo duas vezes a quantidade de raízes de* f *em todo intervalo inicial. De fato, se durante a execução do algoritmo as raízes sempre estiverem no interior dos subintervalos, a quantidade de intervalos não descartados será no máximo a quantidade de raízes de* f *(poderia ser menor pois um subintervalo poderia conter mais de uma raiz). Mas caso todas as raízes de* f *acabem coincidindo com extremos de subintervalos, então o algoritmo continuaria a considerar tanto o intervalo à esquerda quanto à direita da raiz, podendo acarretar em uma quantidade de subintervalos até duas vezes a quantidade de raízes de* f*. O Exemplo 4.6 ilustra este caso. Uma alternativa para melhorar o algoritmo neste sentido é acrescentar um teste que verifique se os extremos dos subintervalos são zeros de* f*.*

Observação 4.2. *Vamos analisar o caso em que* $[a, b]$ *tem ao menos uma raiz de* f*. Vale salientar que a primeira metade do intervalo* $[a, b]$*, isto é, a metade esquerda* $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$*, é sempre testada antes da metade da direita* $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$*. Assim, o algoritmo retorna o intervalo mais à esquerda candidato à conter raiz, além do ConjuntoSemRaiz, finalizando o método. Se quiséssemos isolar todos os zeros de* f *que estão em* $[a, b]$*, bastaria retornar* $[a, b] \cap \mathit{ConjuntoSemRaiz}^C$*. Entretanto, este conjunto não é um intervalo, podendo não ser proveitoso se o conjunto de interesse for* $\mathcal{I}$*. Assim, outra possível solução seria colocar uma condição dentro da verificação* $b - a < \epsilon$ *para que só saia do algoritmo apenas quando o subintervalo de saída seja o intervalo mais à direita que ainda não foi descartado. Desta maneira, o algoritmo encontrará todos os intervalos de tamanho menor que* ϵ *candidatos a conterem raízes de* f*, na ordem que ocorrem da esquerda para a direita.*

Observação 4.3. *Caso* $[a, b]$ *não tenha zero de* f*, teremos duas possibilidades. Se* $0 \notin F([a, b])$*,* $\forall\ [a, b]$ *analisado de tamanho menor que* ϵ*, então todo o intervalo* $[a, b]$ *será descartado, pois, com certeza, não possui raízes de* f*. Agora, se* $0 \in F([a, b])$*, para algum* $[a, b]$ *de tamanho menor que* ϵ*, então este* $[a, b]$ *será indicado pelo algoritmo como um intervalo que contém possíveis zeros de* f*. Além disso, é possível que o algoritmo tenha descartado vários outros intervalos que, com* *certeza, não tem soluções. Lembre que esta verificação é válida devido à dependência de intervalo e ao Teorema Fundamental da Análise Intervalar 2.1, os quais afirmam que as estimativas de intervalos não precisam ser apertadas, isto é,* $F([a,b])$ *pode ser estritamente maior que* $f([a,b])$. *Portanto,* $F([a,b])$ *pode conter* 0 *mesmo que* $f([a,b])$ *não. O Exemplo 4.4 ilustra esta ideia.*

Vejamos a seguir alguns exemplos numéricos de como o algoritmo funciona. Para isso, consideramos funções em que os zeros são conhecidos.

Exemplo 4.4. *Considere a função real* $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. *Uma possível extensão intervalar* F *de* f *é dada como se segue*

$$F(X) = X \cdot X - [3,\ 3] \cdot X + [2,\ 2].$$

Se considerarmos o intervalo $I = [3,\ 4]$ *como o intervalo inicial a ser analisado, sabemos que as raízes* 1 *e* 2 *não pertencem à* I. *Vamos analisar como o algoritmo funciona para este caso, sendo a precisão* $\epsilon = 0.25$.

Inicialmente, calcula-se a imagem de F *em relação à* I, *obtendo que*

$$F([3,\ 4]) = [-1,\ 9] \ni 0.$$

Isto é, o algoritmo não desconsidera inicialmente o intervalo $I = [3,\ 4]$, *apesar de não conter raízes de* f. *Lembre que isto ocorre porque o Método da Bissecção Intervalar só garante a não existência de raízes quando o zero não está na imagem da extensão avaliada no intervalo, o que não ocorre para este teste.*

Dessa forma, o algoritmo verifica se o intervalo satisfaz $b - a < \epsilon$. *Como não obtemos a precisão desejada, determina-se o refinamento de* I, *resultando em* $I_1 = [3,\ 3.5]$ *e* $I_2 = [3.5,\ 4]$. *Verificando o mesmo teste da imagem para cada um dos refinamentos, obtemos que*

$$F([3,\ 3.5]) = [0.5,\ 5.25] \not\ni 0 \;\; e \;\; F([3.5,\ 4]) = [2.25,\ 7.5] \not\ni 0.$$

Dessa forma, como $0 \notin F([3,\ 3.5])$ *e* $0 \notin F([3.5,\ 4])$, *então concluímos que, de fato, não há raízes de* f *nos intervalos* $[3,\ 3.5]$ *e* $[3.5,\ 4]$, *ou ainda, no intervalo inicial dado* $I = [3,\ 4] = [3,\ 3.5] \cup [3.5,\ 4]$ *e podemos descartá-lo.*

Exemplo 4.5. *Seja* f *a função real dada por* $f(x) = (x-0.6)(x-1.4)$. *Uma possível extensão intervalar seria*

$$F(X) = (X - [0.6, 0.6])(X - [1.4, 1.4]).$$

Considerando a precisão $\epsilon = 0.25$ *e o intervalo inicial* $I = [0,4]$, *o procedimento do algoritmo pode ser visualizado através da Figura 4.3, em* *que a região em cor alaranjada representa o intervalo que o algoritmo ainda está analisando (isto é, não alocou na variável ConjuntoSem-Raiz).*

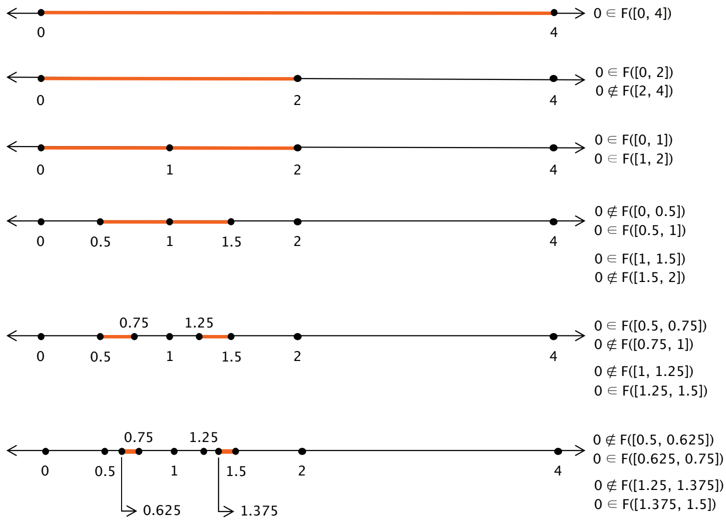

Figura 4.3: Ilustração do Algoritmo do Método da Bisseção Intervalar para $f(x) = (x - 0.6)(x - 1.4)$.

Note que, na primeira iteração, o algoritmo verifica que $F([0,4]) = [-4.75, 8.84] \ni 0$. *Isto é, considera que* $[0,4]$ *pode conter algum zero de* f. *Prosseguindo a verificação, analisa se o intervalo tem precisão* ϵ. *Como não tem, realiza o refinamento de* $[0,4]$, *obtendo os intervalos* $[0,2]$ *e* $[2,4]$.

A segunda iteração consiste em verificar se a imagem de F *para estes novos subintervalos ainda contém o* 0. *Neste caso,* $F([0,2]) = [-1.96, 0.84] \ni 0$ *e* $F([2,4]) = [0.84, 8.84] \not\ni 0$. *Diante disto, o intervalo* $[2,4]$ *é descartado e guardado no conjunto ConjuntoSemraiz. Já o intervalo* $[0,2]$, *como ainda não chegou na precisão* ϵ, *é refinado novamente. Os novos subintervalos são dados por* $[0,1]$ *e* $[1,2]$.

Este procedimento é realizado até que se obtenha um intervalo com precisão ϵ *que possa conter ao menos uma raiz de* f. *Para este exemplo, o algoritmo termina na sexta iteração. Observe que, conforme a Figura 4.3, temos dois subintervalos de precisão* ϵ. *O primeiro (mais à esquerda) será o intervalo que o algoritmo retorna. Este intervalo é dado por* $[0.625, 0.75]$ *e, de fato, contém a primeira (mais à esquerda) raiz* $x = 0.6$ *de* f.

O segundo intervalo de precisão ϵ *obtido é dado por* $[1.375, 1.5]$. *Note que este intervalo contém a segunda raiz* $x = 1.4$ *da função* f. *Con-*

forme mencionado na Observação 4.2, podemos incrementar ao Algoritmo 2 uma condição para que este intervalo também seja uma saída do algoritmo. Dessa forma, teríamos como retorno todos os intervalos de tamanho menos que ϵ que possuem raízes de f (no intervalo em questão $[0, 4]$).

Exemplo 4.6. *Considere a função $f(x) = x^2 + 0.8x - 8.25$, em que seus zeros são dados por $x = -3.3$ e $x = 2.5$. Uma extensão intervalar de f é*

$$F(X) = X \cdot X + [0.8, 0.8]X - [8.25, 8.25].$$

Tome o intervalo inicial como $I = [0, 5]$ e a precisão $\epsilon = 10^{-2}$. O procedimento do algoritmo é ilustrado na Figura 4.4, onde a região em cor azul representa o intervalo que o algoritmo ainda está analisando (não alocou na variável ConjuntoSemRaiz).

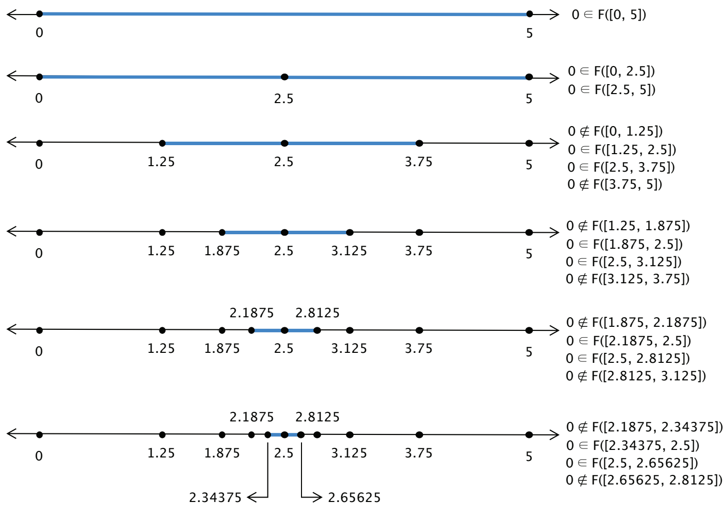

Figura 4.4: Iterações do Método da Bissecção Intervalar para $f(x) = x^2 + 0.8x - 8.25$ e $I = [0, 5]$.

Note que já no primeiro refinamento a raiz coincidiu com um dos extremos dos subintervalos que serão analisados nas próximas iterações. Desta forma, precisamos carregar os intervalos adjacentes com extremo coincidente 2.5.

Observe ainda que, como mencionado anteriormente, o intervalo inicial só possui uma raiz da função f, logo temos que lidar com dois intervalos a cada iteração, o que de fato é ilustrado na Figura 4.4.

A Figura 4.5 ilustra os próximos passos do proceso iterativo, ampliando a visualização do útimo intervalo obtido: $[2.34375, 2.65625]$.

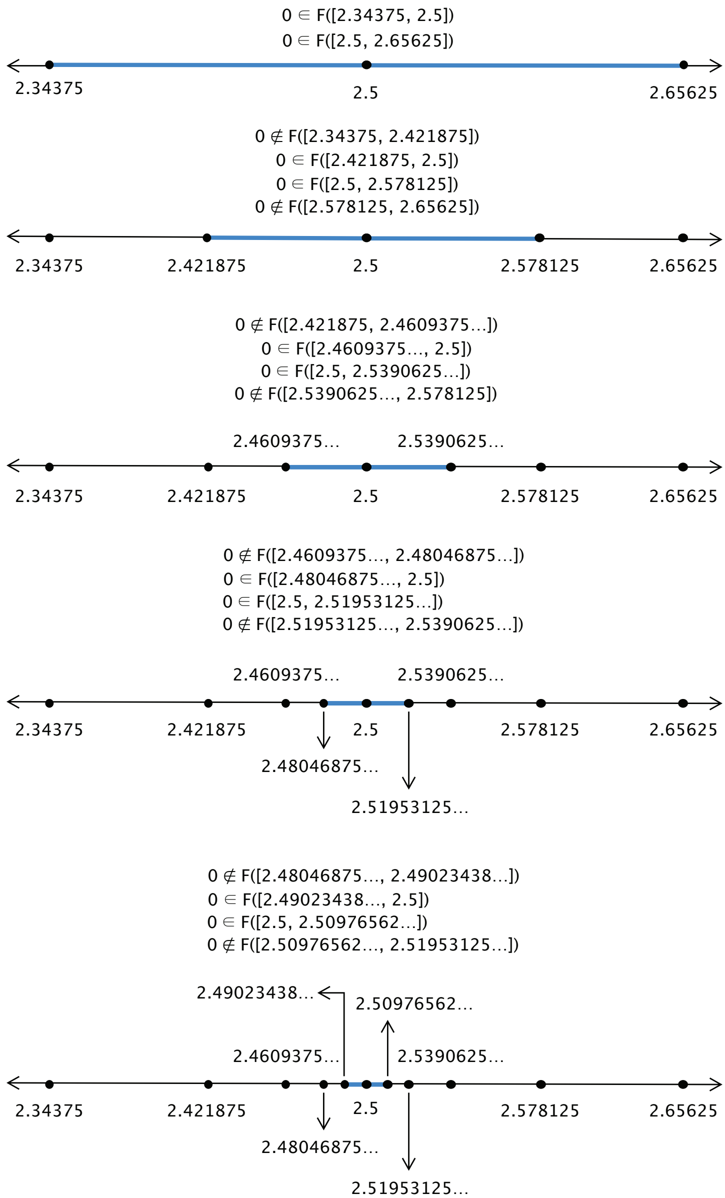

Figura 4.5: Próximos passos do Processo Iterativo para $f(x) = x^2 + 0.8x - 8.25$ partindo do intervalo $[2.34375, 2.65625]$.

O intervalo obtido pelo algoritmo será

$$[2.49023438..., 2.50976562],$$

que contém a única raiz de f no intervalo $[0, 5]$.

Exemplo 4.7. *Considere a função real $f(x) = (x - 1.001)(x - 1.002)$, em que suas raízes são próximas. Uma possível extensão intervalar é dada por*

$$F(X) = (X - [1.001, 1.001])(X - [1.002, 1.002]).$$

Tomando a precisão $\epsilon = 10^{-3}$ e o intervalo inicial $I = [0, 10]$, o Método da Bisseção Intervalar converge para um intervalo que contém os zeros de f.

A Figura 4.6 ilustra as iterações do método, em que a região em cor verde representa o intervalo que o algoritmo ainda está analisando (não alocou na variável ConjuntoSemRaiz).

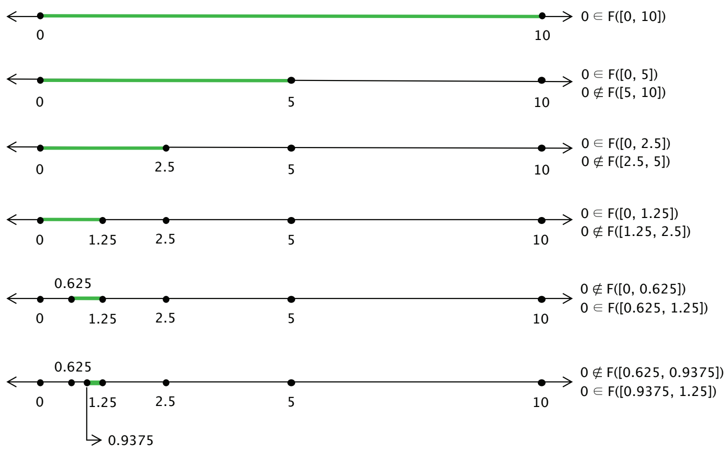

Figura 4.6: Iterações do Método da Bisseção Intervalar para $f(x) = (x-1.001)(x-1.002)$ e $I = [0, 10]$.

Note que já na segunda iteração podemos descartar metade do intervalo inicial I. Ou seja, com certeza não temos zeros de f em $[5, 10]$. Prosseguindo o método, a fim de melhor visualizar as próximas iterações, a Figura 4.7 ilustra o processo ampliando o útimo intervalo obtido: $[0.9375, 1.25]$.

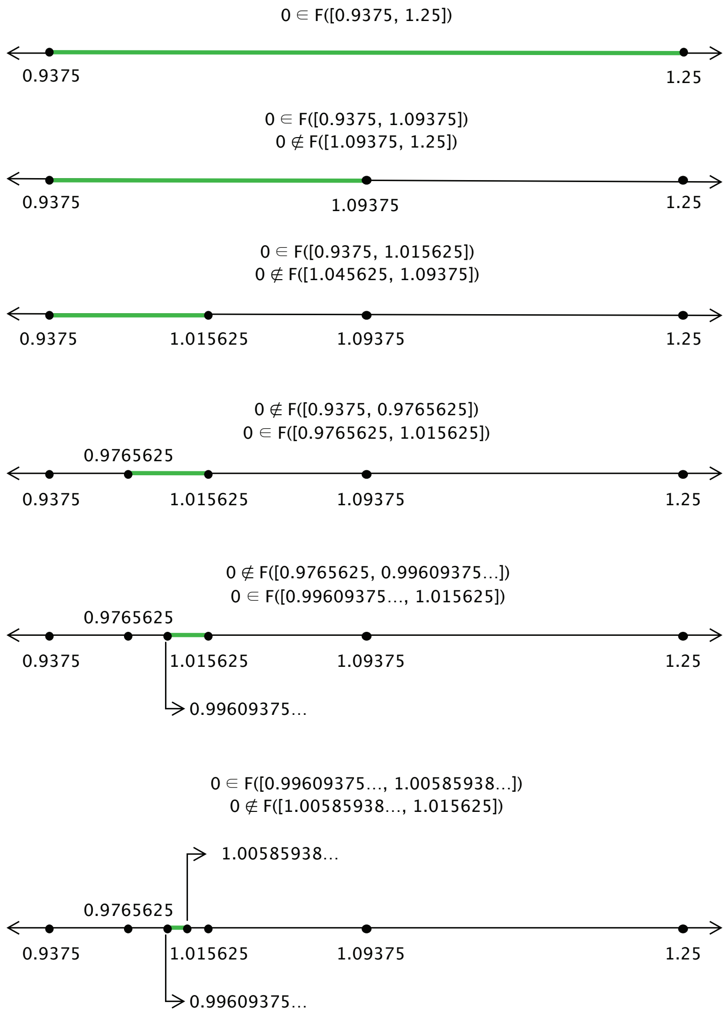

Figura 4.7: Continuação do Processo Iterativo para $f(x) = (x - 1.001)(x - 1.002)$ partindo do intervalo $[0.9375, 1.25]$.

Novamente, a cada iteração, o método intervalar vai descartando intervalos que não contém zeros da função real, diminuindo o custo computacional. Por fim, ampliamos novamente a escala para finalizar o método, tendo como último intervalo obtido o intervalo $[0.99609375..., 1.00585938...]$, *conforme ilustra a Figura 4.8.*

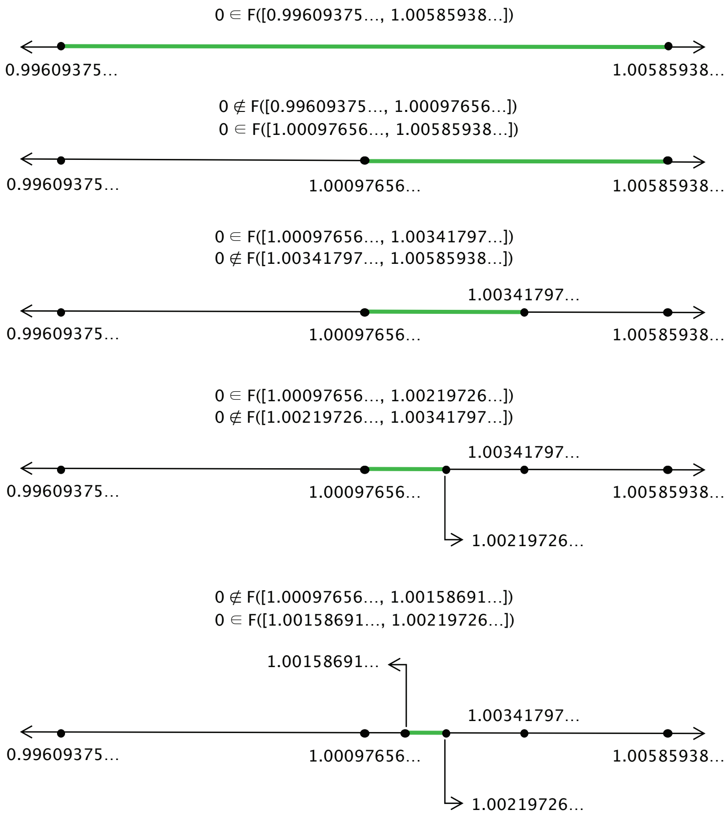

Figura 4.8: Últimas Iterações do Método da Bisseção Intervalar para $f(x) = (x - 1.001)(x - 1.002)$ partindo do intervalo $[0.99609375..., 1.00585938...]$.

Diante disto, o algoritmo tem como saída o intervalo

$$[1.00158691..., 1.00219726...]$$

que contém os zeros de f. Note que podemos ainda fazer mais uma iteração do método para obter dois intervalos que contém as raízes de forma isolada, resultando em

$$[1.00158691..., 1.00189208...] \;\; e \;\; [1.00189208..., 1.00219726...].$$

Observe ainda que, se quissésemos aplicar o Método da Bisseção usual para o intervalo inicial I, não poderíamos. Isto se deve ao fato de que a função para estes extremos não troca de sinal. Dessa maneira, a hipótese do método não seria satisfeita.

Esta seria uma vantagem do método intervalar em comparação ao método clássico, uma vez que mesmo que as raízes da função estejam *tão próximas quanto a precisão desejada, o algoritmo intervalar converge para um intervalo que contém o zero mais à esquerda de f.*

De fato, o algoritmo de bissecção intervalar pode ser considerado a versão intervalar do algoritmo da bisseção clássico, uma vez que também consiste em dividir intervalos, de forma interativa, ao meio. No entanto, o Método da Bissecção Clássico só converge para um zero de f quando iniciado com um intervalo $[a, b]$ que satisfaz $f(a) \cdot f(b) < 0$ e, mesmo assim, não há garantia de que convirgirá para a primeira raiz nem que encontre todos os zeros de f no intervalo $[a, b]$ [5]. À vista disso, este é um aspecto relevante da vantagem do uso da Aritmética Intervalar.

Exemplo 4.8. *Considere a função $f(x) = (x - 1)^2$, em que a raiz é dada por $x = 1$ de multiplicidade 2. Uma possível extensão intervalar seria $F(X) = (X - [1,\ 1]) \cdot (X - [1,\ 1])$. Se considerarmos o intervalo $I = [0.1,\ 2]$ para verificar a existência de raiz (a qual já sabemos que pertence a este intervalo) utilizando o algoritmo do Método da Bissecção Intervalar, segue que*

```
 Existe ao menos uma raiz no intervalo:
[0.9999999999999996, 1]
```

Note que o intervalo de saída $[0.9999999999999996,\ 1]$ é um intervalo que convergiu para a raiz de f com uma precisão de 10^{-15}.

Observe que o Método da Bissecção (usual) não pode ser aplicado para a função $f(x) = (x - 1)^2$ apresentada no Exemplo 4.8, uma vez que $f(x) \geq 0$ para todo x real, logo $f(a) \cdot f(b) \geq 0$ qualquer que seja o intervalo inicial $I = [a, b]$ escolhido, mesmo f sendo contínua em $\mathbb{R}$. Este é mais um caso de função que tangencia a abscissa que relatamos no fim da secção anterior. Portanto, o método intervalar, ao contrário do método clássico, pode ser utilizado para funções que não satisfazem o Teorema do Valor Intermediário. Outro ponto importante que podemos concluir dos exemplos apresentados é o fato de que a subdivisão recursiva nos leva a testar intervalos cuja largura converge a zero, o que garante também que o algoritmo isola a raiz em um intervalo.

4.3 Método de Newton Clássico

Neste trabalho chamaremos o Método de Newton utilizado para obtenção de zeros reais de funções reais, usualmente estudado na disciplina de Cálculo Numérico de Método de Newton Clássico. O Método de

Newton Clássico consiste em um método iterativo que visa, a partir de um ponto inicial dado, gerar uma sequência de pontos que irá convergir para um ponto que seja a solução do problema. Consideremos uma função $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que possui derivada contínua e não-nula em todo ponto de $[a,\ b]$. Convém destacar que o fato de a derivada de f não se anular em $[a,\ b]$ implica que existe no máximo uma raiz em $[a,\ b]$ para a função.

Tomemos $x_0 \in [a,\ b]$, definimos então $x_1 = N(x_0) = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Se $x_1 \in [a,\ b]$ então $x_2 = N(x_1) = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ fica bem definido. Assim, prosseguindo a iteração, obtém-se uma sequência de valores em $[a,\ b]$ sucessivamente mais próximos da raiz. Além disso, se esta sequência for convergente, então o limite desta será uma raiz de f. A fórmula de recorrência é dada por

$$x_{n+1} = N(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{4.3.4}$$

O aprofundamento teórico deste método foge ao objetivo deste livro. Diante disso, o leitor interessado em um estudo mais completo sobre o Método de Newton pode consultar, por exemplo, Humes [12, p. 22]. Neste sentido, vamos limitar a apresentar uma interpretação geométrica de seu funcionamento. Dado um valor inicial x_0, tomamos a reta tangente ao gráfico de f em x_0, e definimos o número x_1 como sendo o ponto de intersecção desta reta com o eixo das abscissas, conforme a Figura 4.9 ilustra.

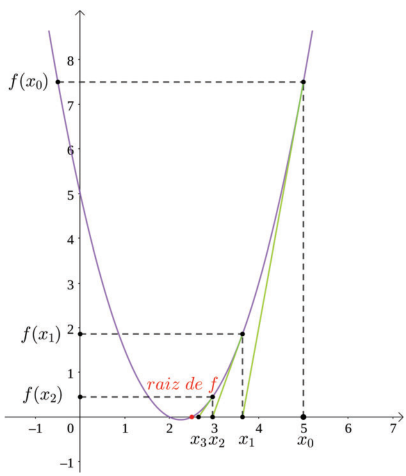

Figura 4.9: Representação Geométrica do Método de Newton.

Observe que conforme vamos gerando a sequência de pontos, os valores de x_n se aproximam do valor da raiz da função f, a qual está destacada na Figura 4.9 em vermelho. Devido a esta característica geométrica, o Método de Newton Clássico é também conhecido como Método das Tangentes. A convergência do método é garantida conforme o Teorema 4.1 a seguir.

Teorema 4.1 (Convergência do Método de Newton-Raphson). *Seja x_0 um elemento do intervalo $[a, b]$ e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável com $f''(x)$ contínua tal que*

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,\ b]$;
3. $f''(x)$ *não troca de sinal em* $[a,\ b]$ *e*
4. $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Nestas condições f possui uma única raiz $x^* \in [a, b]$, o ***Operador Newtoniano*** *dado por*

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

está bem definido, e a sequência com termos

$$x_{k+1} = N(x_k)$$

converge para a x^*. Este método é chamado de Método de Newton-Raphson.

A demonstração da convergência do método pode ser encontrada em Burden [1, p. 76].

Note que o item 1 do Teorema 4.1 garante a existência de um número ímpar de raízes e o item 2 assegura que f não tenha pontos críticos em $[a,\ b]$. Se houvessem pontos críticos, teríamos a possibilidade de que, em alguma iteração do método, a operação $\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ não possa ser efetuada se para algum x_n da sequência gerada pelo método tivermos $f'(x_n) = 0$. Dessa forma, os itens 1 e 2 asseguram que o zero de f esteja contido em $[a, b]$ e seja único neste intervalo. Já o item 4 garante que os termos da sequência x_k permaneçam no intervalo $[a,\ b]$ e convirjam para o zero de f.

Vejamos um exemplo de aplicação do Método de Newton Clássico para compreender o processo.

Exemplo 4.9. *Vamos aproximar a maior raiz de $f(x) = 5x - e^x$ usando o Método de Newton Clássico, com uma precisão $\epsilon = 10^{-6}$ e $x_0 = 3$. Pelo Exemplo 4.3, sabemos que a maior raiz de f está isolada no intervalo $[2,\ 3]$. Note que as condições do Teorema 4.1 são satisfeitas, uma vez que*

1. $f(a) \cdot f(b) = f(2)f(3) = (10 - e^2)(15 - e^3) < 0$;
2. $f'(x) = 5 - e^x \neq 0,\ \forall x \in [2,\ 3]$;
3. $f''(x) = -e^x$ *não troca de sinal em* $[2,\ 3]$ *e*
4. *para* $x_0 = 3 \in [2,\ 3]$ *tem-se* $N(3) = 3 - \dfrac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \dfrac{15 - e^3}{5 - e^3} \approx 2.6628 \in [2,\ 3]$.

A sequência gerada pelo método é apresentada na Tabela 4.4.

$\mathbf{n}$	$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{N(x_n) = x_{n+1}}$	$\mathbf{\lvert x_{n+1} - x_n \leq 10^{-6} \rvert}$
0	3	2.6628866	$-0.3371134 > 10^{-6}$
1	2.6628866	2.5533101	$-0.1095765 > 10^{-6}$
2	2.5533101	2.5427342	$0.0105759 > 10^{-6}$
3	2.5427342	2.5426414	$0.0000928 > 10^{-6}$
4	2.5426414	**2.5426414**	$0 < 10^{-6}$

Tabela 4.4: Aproximação da maior raiz de f usando o Método de Newton Clássico, com 8 algarismos significativos.

Desta forma, o Método de Newton Clássico obteve uma aproximação para a raiz $x = \sqrt{2}$ da função f como sendo $x^* = 2.5426414$. Note que, neste caso, $f(x^*) = f(2.5426414) = -0.000000326$.

No Exemplo 4.10 consideraremos uma função em que as raízes são conhecidas.

Exemplo 4.10. *Considere a função real $f(x) = x^2 - 2$ em que os zeros são dados por $x = \pm\sqrt{2}$. A derivada de f é $f'(x) = 2x$ e, ademais, $f''(x) = 2$, logo f é contínua e possui derivadas contínuas até segunda ordem. Se adotarmos o intervalo $I = [1, 2]$, as demais hipóteses do Teorema 4.1 são cumpridas e temos garantida a convergência teórica se aplicarmos o Método de Newton.*

Note que, neste caso, vamos procurar aproximar somente a maior raiz de f, ou seja, $\sqrt{2}$,, usando o Método de Newton. O leitor interessado poderá buscar uma aproximação para $-\sqrt{2}$.

Considerando a precisão $\epsilon = 10^{-4}$ *e a aproximação inicial para o zero dado por* $x_0 = \dfrac{3}{2}$*, os pontos obtidos são aqueles que se encontram na Tabela 4.5.*

$\mathbf{n}$	$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{x_{n+1}}$	$\mathbf{\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \leq 10^{-4}}$
0	1.5	8.5	7.0
1	8.5	4.36764706	4.13235294
2	4.36764706	2.41277976	1, 95486730
3	2.41277976	1.62084959	0.791930169
4	1.62084959	1.4273852	0.193464402
5	1.4273852	1.41427434	0.013110853
6	1.41427434	**1.41421356**	0.0000607713

Tabela 4.5: Aproximação da maior raiz de f usando o Método de Newton, com 9 algarismos significativos.

Notemos que, após 7 iterações, o Método de Newton encontra a aproximação $x^* = 1.41421356$ *para* $\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots$ *com a precisão requerida.*

De forma análoga ao Método de Newton Clássico, o Método de Newton Intervalar permite construir uma sequência convergente de intervalos, cujo limite será um intervalo que contém a raiz da função dada. Veremos, na próxima seção a versão do Método de Newton para AI.

4.4 Método de Newton Intervalar

A ideia central dos métodos que apresentaremos a seguir é obter um intervalo que contém uma raiz de uma dada função real f, aplicando relações recursivas, inspiradas no método de Newton Clássico, a um intervalo inicial fornecido, gerando uma sequência intervalar convergente para um intervalo desejado. Note que se o intervalo for suficiente pequeno, teremos uma boa aproximação para a solução do problema.

A primeira ideia intuitiva que se tem para determinar o Método de Newton Intervalar é tomar uma extensão intervalar para o operador Newtoniano real. Isto é, definir $N(X) = X - \dfrac{F(X)}{F'(X)}$, em que F e F' são extensões intervalares paras as funções f e f', respectivamente. Vejamos um exemplo numérico.

Exemplo 4.11. *Se considerarmos a seguinte função real* $f(x) = x^2 - 2$ *e quisermos calcular sua raiz* $x = \sqrt{2}$ *no intervalo* $X_0 = [1,\ 2]$, *teríamos que* $F(X) = X * X - [2,\ 2]$ *e* $F'(X) = [2,\ 2]X$. *Assim*

$$\begin{aligned}
X_1 &= X_0 - \frac{F(X_0)}{F'(X_0)} \\
&= [1,\ 2] - \frac{[1,\ 2][1,\ 2] - [2,\ 2]}{[2,\ 2][1,\ 2]} \\
&= [1,\ 2] - \frac{[1,\ 4] - [2,\ 2]}{[2,\ 4]} \\
&= [1,\ 2] - \frac{[1,\ 4] + [-2,\ -2]}{[2,\ 4]} \\
&= [1,\ 2] - \frac{[1-2,\ 4-2]}{[2,\ 4]} \\
&= [1,\ 2] - \frac{[-1,\ 2]}{[2,\ 4]} \\
&= [1,\ 2] - [-1,\ 2]\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right] \\
&= [1,\ 2] - \left[-\frac{1}{2},\ 1\right] \\
&= [1,\ 2] + \left[-1,\ \frac{1}{2}\right] \\
&= \left[1 - 1,\ 2 - \frac{1}{2}\right] \\
&= \left[0,\ \frac{5}{2}\right].
\end{aligned}$$

Note que $w(X_1) = w\left(\left[0,\ \frac{5}{2}\right]\right) = \frac{5}{2} > 1 = w(X_0)$ *e que* $X_0 \subseteq X_1$. *Observe também que* $F'(X_1) = [2,\ 2]X_1 = [2,\ 2]\left[0,\ \frac{5}{2}\right] = [0,\ 5]$ *contém o zero, logo, na próxima iteração, não poderemos efetuar a operação de divisão. Dessa forma, o Método de Newton Intervalar não poderá prosseguir.*

O exemplo anterior, mostra que,procedendo desta maneira intuitiva não obteremos um método efetivo para o que procuramos, uma vez que poderá resultar em uma sequência intervalar que não converge. De fato, da Definição 1.2 e Proposição 1.9, com $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$ e $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}]$, temos que

$$\begin{aligned} w(X-Y) &= w([\underline{X}-\overline{Y},\ \overline{X}-\underline{Y}]) \\ &= \overline{X}-\underline{Y}-(\underline{X}-\overline{Y}) \\ &= \overline{X}-\underline{X}+\overline{Y}-\underline{Y} \\ &= w(X)+w(Y). \end{aligned}$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} w(X_{k+1}) &= w\left(X_k - \frac{F(X_k)}{F'(X_k)}\right) \\ &= w(X_k) + w\left(\frac{F(X_k)}{F'(X_k)}\right) \\ &> w(X_k). \end{aligned}$$

Portanto, a sequência de intervalos definida por $X_{k+1} = X_k - \dfrac{F(X_k)}{F'(X_k)}$ não converge.

Para obter um método convergente, devemos construir a sequência de forma que o comprimento (ou diâmetro) do intervalo X_{k+1} diminua em relação ao comprimento de X_k, mas que ainda contenha o zero $\overline{x}$ de f.

Além disso, é necessário avaliar que o intervalo resultante da extensão intervalar de f' não contenha o zero. Veremos que, para isto, basta considerar que o intervalo inicial X_0 não tenha pontos críticos (máximos e mínimos locais).

Conforme Oliveira [21], existem diferentes formas de definir uma sequência intervalar satisfazendo as condições mencionadas acima. Sendo assim, o Método de Newton Intervalar possui uma série de variações, podendo ser definido de formas ligeiramentes diferentes, sem prejuízos no que tange à convergência. Apresentaremos posteriormente três variações do método.

Consideremos $X \in \mathcal{I}$ intervalo e F' extensão intervalar de f' monotônica em relação à inclusão. Seja o procedimento iterativo a seguir visto anteriormente no Capítulo 3

$$X_{k+1} = N(X_k) \cap X_k, \text{ com } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Este procedimento produz uma sequência de intervalos encaixados que convergem para $X^* \in \mathcal{I}$ tal que $X^* = N(X^*)$. Uma possível definição para a função intervalar N que representa a relação recursiva do Método de Newton (Operador Newtoniano Intervalar), pode ser dada por

$$N(X) = m(X) - \frac{f(m(X))}{F'(X)}. \tag{4.4.5}$$

Caso a raiz real x^* de f está contida no intervalo X_0, então $x^* \in X_k$ $\forall k$ (vide Exercício 4).

A interpretação geométrica para este método é semelhante ao método clássico. Contudo, não iremos considerar a reta tangente ao gráfico da função f e o ponto de intersecção desta reta com o eixo das abscissas. O novo intervalo X_{k+1} será definido pela intersecção do eixo x com duas retas tangentes que passam pelo ponto $(x_k,\ f(x_k))$, com inclinações correspondentes às retas tangentes ao gráfico de f, no pontos $(\underline{x}_k,\ f(\underline{x}_k))$ e $(\overline{x}_k,\ f(\overline{x}_k))$ aos limites inferior e superior (Figura 4.10).

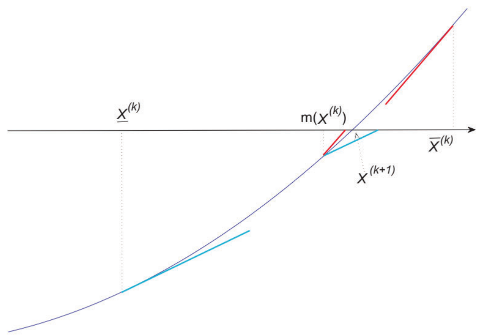

Figura 4.10: Representação Geométrica do Método de Newton Intervalar.

Conforme foi dito anteriormente, o Método de Newton Intervalar admite variações, essas variações se dão, principalmente sobre a definição dos operadores Newtonianos intervalares. A seguir, apresentaremos três dessas variações bem como os resultados que garantem a convergência, no entanto, somente apresentaremos a demonstração destes resultados para a primeira variação, que é baseada na Equação (4.4.5) (Teorema 4.2). Todas as variações aqui apresentadas, bem como os resultados teóricos que as acompanham são baseadas no trabalho de Oliveira [21, p. 63].

Na Variação 2 para o Método de Newton Intervalar, ao invés de utilizar o intervalo $F'(x)$ no denominador da Equação (4.4.5), este intervalo será substituído por um intervalo fixo M, que representa os valores possíveis de serem assumidos pelo o quociente de diferenças $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ no intervalo.

Por fim, a principal diferença que encontramos na Variação 3 com relação à Variação 1, é que o valor $m(X)$ é substituído por uma atualização para x_k, utilizando o Método de Newton Clássico, combinando assim essas duas estratégias.

4.4.1 Método de Newton Intervalar - Variação 1

Esta variação do Método de Newton Intervalar consiste em utilizar a Equação (4.4.5) para determinar o operador Newtoniano, neste sentido, vamos utilizar uma extensão intervalar da derivada da função f que será atualizada a cada iteração, conforme os intervalos também se atualizem. Isto é, se F' é a extensão intervalar escolhida para a derivada f' então será determinado um intervalo $F'(X_k)$ a cada iteração. O Teorema 4.2 garante a convergência desta variação para o Método de Newton Intervalar.

Teorema 4.2 (**Método de Newton Intervalar - Variação 1**). *Sejam $f : X_0 = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real derivável em X_0 e F' uma extensão intervalar de f' monotônica em relação à inclusão tais que*

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$ *e*
2. $0 \notin F'([a,\ b])$.

Nestas condições f possui uma única raiz $x^* \in X_0$, o ***Operador Newtoniano Intervalar - Variação 1*** *dado por*

$$N_1(X) = m(X) - \frac{f(m(X))}{F'(X)}$$

está bem definido, e a sequência intervalar com termos

$$X_{k+1} = X_k \cap N_1(X_k)$$

é uma sequência encaixada que converge para o intervalo degenerado $[x^*, x^*]$.

Demonstração: Como $0 \notin F'([a,\ b])$ e F' uma é extensão intervalar de f', segue do Teorema Fundamental da Análise Intervalar 2.1 que $0 \notin f'([a,\ b])$. Disto e da hipótese de que $f(a) \cdot f(b) < 0$, temos que a raiz x^* é única neste intervalo.

Por construção, a sequência intervalar $\{X_k\}$ é encaixada, logo segue da Proposição 3.2 que é uma sequência convergente. Desta forma falta provar apenas que $\lim\limits_{k \to \infty} X_k = [x^*,\ x^*]$.

Como $0 \notin F'([a,\ b])$ e $\{X_k\}$ é uma sequência encaixada, temos que $0 \notin F'(X_k)$ para qualquer k. Isto garante que N_1 pode ser aplicada para qualquer termo da sequência $\{X_k\}$.

Caso $f(m(X_{\bar{k}})) = 0$ para algum $\bar{k}$, então $x^* = m(X_{\bar{k}})$. Além disso, para todo $k \geq \bar{k}$ teremos que os termos da sequência serão constantes e iguais a

$$X_{k+1} = X_k \cap m(X_k) - \frac{f(m(X_k))}{F'(X_k)} = m(X_k) = m(X_{\bar{k}}) = x^*.$$

Ou seja, a sequência converge para o zero da função f.

Por outro lado, se $f(m(X_k)) \neq 0$ para todo k, então $0 \notin \dfrac{f(m(X_k))}{F'(X_k)}$ e isto garante que $m(X_k) \notin N_1(X_k)$. Consequentemente,

$$w(X_{k+1}) < \frac{1}{2} w(X_k).$$

Dessa forma, temos que $\lim\limits_{k\to\infty} w(X_k) = 0$, o que garante a convergência da sequência intervalar $\{X_k\}$ para um intervalo degenerado. Mas como $x^* \in X_0$, segue que $x^* \in X_k$ para qualquer k (vide Exercício 4). Disso e da Proposição 3.2 segue que

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = [x^*, x^*].$$

■

Cabe notar que devemos desconsiderar a possibilidade de que exista um índice $k_0 \geq 0$ tal que $X_{k_0} \cap N_1(X_{k_0}) = \emptyset$, pois, neste caso, não existiria raiz da função f no intervalo inicial X_0, o que iria contrariar as hipóteses do Teorema. Este fato garante a autovalidação do algoritmo uma vez que deve-se iniciar o procedimento com um intervalo que contenha a raiz.

Além disso, conforme será apresentado no Proposição 4.1 a seguir, assim como ocorre no método clássico, a taxa de convergência do o Método de Newton Intervalar é quadrática.

Proposição 4.1. *Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real racional derivável com raí $x^* \in [a,b]$, F e F' extensões racionais de f e f', respectivamente, tais que $F[a,b]$ e $F'[a,b]$ estejam bem definidas e não contenham o zero. Nestas condições, existe um intervalo $X_0 \subseteq [a,b]$ contendo x^* e um número real positivo C tal que a sequência intervalar $\{X_k\}$ dada pelo Operador Newtoniano Intervalar - Variação 1 satisfaz*

$$w(X^{(k+1)}) \leq C(w(X^{(k)}))^2.$$

O leitor interessado, pode conferir a demonstração deste resultado em Moore [18].

Apresentamos a seguir a descrição do Algoritmo 3 sobre a Variação 1 do Método de Newton Intervalar. O objetivo deste processo iterativo é determinar um subintervalo de um dado intervalo inicial, com o comprimento em conformidade com a precisão estabelecida e que contenha uma raiz de f. Isto é, dada uma função f e um intervalo inicial $X_0 = [a,\ b]$, este algoritmo iterativo irá retornar um subintervalo de $[a,\ b]$ que contenha uma raiz de f, ou então, se for o caso, retornará um aviso de que tal intervalo não contém zero de f.

Algoritmo 3: Método de Newton Intervalar - Variação 1

Dados: F, F', X_0, ϵ
início
- Calcule: $N_1X = m(X_0) - \dfrac{F(m(X_0))}{F'(X_0)}$;
- Calcule: $X_0 = N_1X \cap X_0$;
- **se** $X_0 \neq \emptyset$ **então**
  - **enquanto** $w(X_0) > \epsilon$ **faça**
    - Atualize: $N_1X = m(X_0) - \dfrac{F(m(X_0))}{F'(X_0)}$;
    - Atualize: $X_0 = N_1X \cap X_0$;
  - **fim**
  - Mostre na tela: Existe ao menos uma raiz no intervalo;
  - Mostre: X_0;
- **senão**
  - Mostre na tela: O intervalo fornecido nao possui raiz;
- **fim**

fim

O algoritmo termina quando o termo da sequência encaixada atende à precisão desejada. Isto é, quando $w(X_{k+1}) \leq \epsilon$.

Agora, vejamos um exemplo de aplicação da Variação 1 do Método de Newton Intervalar. Utilizaremos a mesma função do Exemplo 4.10.

Exemplo 4.12. *Seja $f(x) = x^2 - 2$ e sua derivada $f'(x) = 2x$. Considere o intervalo $X_0 = [1,\ 2]$ como aproximação inicial e 10^{-4} a precisão desejada. Uma possível extensão intervalar de f' é $F'(X) = 2X$.*

Como f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, então é contínua no intervalo inicial $X_0 = [1,\ 2]$. Também temos que $f(1)f(2) = (1^2 - 2)(2^2 - 2) = (-1)2 = -2 < 0$, o que implica que a função f tem pelo menos uma raiz no intervalo $[1,\ 2]$. Além disso, $f'(x) = 2x \neq 0$ para todo $x \in X_0$, então $0 \notin F'([1,\ 2])$, o que garante que a raiz é única. O Operador Newtoniano é dado por

$$N_1(X) = m(X) - \frac{(m(X))^2 - 2}{2X}.$$

Dessa forma, podemos aplicar a Variação 1 do Método de Newton Intervalar para aproximar a raiz positiva $x^* = \sqrt{2}$ de f. Logo, construímos a sequência intervalar recursiva com termos $X_{k+1} = X_k \cap N_1(X_k)$, *com* $X_0 = [1,\ 2]$*, convergente para* x^*.

Vamos calcular $N_1(X_0)$.

$$\begin{aligned} N_1(X_0) &= m([1,\ 2]) - \frac{(m([1,\ 2]))^2 - 2}{2 \cdot [1,\ 2]} \\ &= 1.5 - \frac{0.25}{[2,\ 4]} \\ &= 1.5 - 0.25 \cdot \left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right] \\ &= 1.5 - [0.0625,\ 0.125] \\ &= [1.375,\ 1.4375]. \end{aligned}$$

Logo, X_1 *é dado por*

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 \cap N_1(X_0) \\ &= [1,\ 2] \cap [1.375,\ 1.4375] \\ &= [1.375,\ 1.4375]. \end{aligned}$$

Como ainda não obtivemos a precisão desejada, devemos continuar o processo iterativo. Calculando $N_1(X_1)$*, obtemos*

$$\begin{aligned} N_1(X_1) &= m([1.375,\ 1.4375]) - \frac{(m([1.375,\ 1.4375]))^2 - 2}{2 \cdot [1.375,\ 1.4375]} \\ &= 1.40625 + \frac{0.0224609375}{[2.75,\ 2.875]} \\ &= 1.40625 + [0.0078125,\ 0.00816761363636363636] \\ &= [1.4140625,\ 1.414417613636364]. \end{aligned}$$

Logo, X_2 *é dado por*

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 \cap N_1(X_1) \\ &= [1.375,\ 1.4375] \cap [1.4140625,\ 1.414417613636364] \\ &= [1.4140625,\ 1.414417613636364]. \end{aligned}$$

Agora, calculando $N_1(X_2)$ *de forma análoga, obtemos que*

$$N_1(X_2) = [1.414213559294524,\ 1.41421356594718]$$

e

$$X_3 = [1.414213559294524,\ 1.41421356594718].$$

$$\begin{aligned} N_1(X_2) &= m([1.4140625,\ 1.414417613636364]) \\ &\quad - \frac{(m([1.4140625,\ 1.414417613636364]))^2 - 2}{2 \cdot [1.4140625,\ 1.414417613636364]} \\ &= 1.414240056818182 - \frac{0.00007493830909499621}{[2.828125,\ 2.828835227272728]} \\ &= 1.414240056818182 \\ &\quad -[0.00002649087100320227,\ 0.00002649752365789921 2] \\ &= [1.414213559294524,\ 1.41421356594718]. \end{aligned}$$

Logo, X_3 é dado por

$$\begin{aligned} X_3 &= X_2 \cap N_1(X_2) \\ &= [1.4140625,\ 1.414417613636364] \\ &\quad \cap [1.414213559294524,\ 1.41421356594718] \\ &= [1.414213559294524,\ 1.41421356594718]. \end{aligned}$$

Os valores da sequência intervalar obtidos pelo Algoritmo 4 podem ser vistos, de forma sintetizada, na Tabela 4.6.

k	$\mathbf{X_k}$
0	$[1,\ 2]$
1	$[1.375,\ 1.4375]$
2	$[1.4140625,\ 1.414417613636364]$
3	$[1.414213559294524,\ 1.41421356594718]$

Tabela 4.6: Aproximação da maior raiz de f usando a Variação 1 do Método de Newton Intervalar.

Portanto, o resultado deste processo é que

$$x^* \in [1.414213562373094,\ 1.414213562373096],$$

com precisão 10^{-4}.

4.4.2 Método de Newton Intervalar - Variação 2

Apresentaremos agora a variação do Método de Newton Intervalar conhecida como Método de Newton Intervalar Simplificado [11, p. 29]. Neste caso, ao invés de atualizarmos a cada iteração o intervalo determinado pela a extensão intervalar da derivada, fixamos um intervalo M no início do processo. O Teorema 4.3 garante a convergência deste método. A demonstração deste resultado não será apresentada neste livro, o leitor interessado poderá encontrá-la em Oliveira [21, p. 60].

Teorema 4.3 (Método de Newton Intervalar - Variação 2). *Sejam $f : X_0 = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real derivável em X_0 e M uma extensão intervalar de f' monotônica em relação à inclusão tais que*

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$ *e*

2. $M = [m_1,\ m_2]$ *com* $0 < m_1 \leq \left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq m_2 < +\infty$, *para todos* $x, y \in X_0$ *tal que* $x \neq y$.

*Nestas condições f possui uma única raiz $x^* \in X_0$, o **Operador Newtoniano Intervalar - Variação 2** dado por*

$$N_2(X_k) = m(X_k) - \frac{f(m(X_k))}{M}$$

está bem definido, e a sequência intervalar com termos

$$X_{k+1} = X_k \cap N_2(X_k)$$

é uma sequência encaixada que converge para o intervalo degenerado $[x^*, x^*]$.

O Algoritmo 4 a seguir descreve a Variação 2. De maneira análoga ao Algoritmo 3, dada uma função f e um intervalo inicial $X_0 = [a,\ b]$, este algoritmo iterativo irá retornar um intervalo suficientemente pequeno para garantir a precisão ϵ desejada e que contenha uma raiz de f, ou então, se for o caso, retornará um aviso de que o intervalo inicial não contém raiz de f.

Algoritmo 4: Método de Newton Intervalar - Variação 2

Dados: F, X_0, M, ϵ
início
  Calcule: $N_2X = m(X_0) - \dfrac{F(m(X_0))}{M}$;
  Calcule: $X_0 = N_2X \cap X_0$;
  se $X_0 \neq \emptyset$ **então**
    enquanto $w(X_0) > \epsilon$ **faça**
      Atualize: $N_2X = m(X_0) - \dfrac{F(m(X_0))}{M(X_0)}$;
      Atualize: $X_0 = N_2X \cap X_0$;
    fim
    Mostre na tela: Existe ao menos uma raiz no intervalo;
    Mostre: X_0;
  senão
    Mostre na tela: O intervalo fornecido nao possui raiz;
  fim
fim

Vejamos um exemplo de aplicação do método, considerando a mesma função real utilizada nos Exemplos 4.10 e 4.12.

Exemplo 4.13. *Vamos calcular a raiz positiva da função* $f(x) = x^2 - 2$*, com* $X_0 = [1,\ 2]$*, utilizando a precisão* $\epsilon = 10^{-4}$*, através da Variação 2 do Método de Newton Intervalar.*

Pelo Exemplo 4.12, sabemos que $x^* = \sqrt{2}$ *é única no intervalo* X_0*. Além disso, o cálculo da extensão intervalar* M *é dado como se segue*

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{(x^2-2)-(y^2-2)}{x-y}\\ &= \frac{x^2-y^2}{x-y}\\ &= \frac{(x-y)(x+y)}{x-y}\\ &= x+y.\end{aligned}$$

Diante disso, temos que

$$0 < 2 \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = x+y \leq 4,$$

para quaisquer $x, y \in X_0$*, uma vez que* $1 \leq x \leq 2$*,* $1 \leq y \leq 2$ *e* $1+1 \leq x+y \leq 2+2$*. Logo,* $M = [2,\ 4]$ *(note que* $0 \notin M$*). O Operador Intervalar Newtoniano fica, então*

$$N_2(X) = m(X) - \frac{(m(X))^2 - 2}{[2,\ 4]}.$$

Dessa forma, podemos aplicar a Variação 2 do Método de Newton Intervalar, em que a sequência intervalar dada por $X_{k+1} = X_k \cap N_2(X_k)$*, com* $X_0 = [1,\ 2]$*, converge para* x^**. Computando os valores da sequência utilizando o Algoritmo 5, obtemos a seguinte tabela.*

k	$\mathbf{X_k}$
0	[1, 2]
1	[1.375, 1.4375]
2	[1.411865234375, 1.41748046875]
3	[1.414023213088512, 1.414348032325507]
4	[1.414205378839206, 1.414225134971404]

Tabela 4.7: Aproximação da maior raiz de f usando a Variação 2 do Método de Newton Intervalar.

Portanto, o valor da raiz da função f é um valor real x^* tal que

$$x^* \in [1.414205378839206,\ 1.414225134971404].$$

Note que o número de iterações foi maior do que a primeira versão do Método de Newton. Além disso, o intervalo limite da Variação 1 tem comprimento bem inferior ao encontrado pela Variação 1, neste sentido, podemos obter uma aproximação mais precisa para a raiz $x^* = \sqrt{2}$ da função f.

4.4.3 Método de Newton Intervalar - Variação 3

Nesta terceira variação, ao invés de de utilizar o valor $m(X_k)$ para obter o novo intervalo a cada iteração, vamos atualizar o ponto em que a função real é calculada, utilizando o Método de Newton Clássico. Neste sentido, estaremos combinando as duas estratégias newtonianas, a clássica e a intervalar. Ou seja, definimos $F'(X_k)$, em que F' é a extensão da derivada f' da função f e, ao invés do ponto médio de X_k, usamos $x_{k+1} = n(x_k) = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(k_x)}$, com $x_0 = m(X_0)$.

A convergência para o Método de Newton Intervalar, utilizando esta Variação, é apresentada no Teorema 4.4 a seguir, cuja demonstração pode ser vista em Oliveira [21, p. 64].

Teorema 4.4 (Método de Newton Intervalar - Variação 3). *Sejam $f : X_0 = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real derivável em X_0 e M uma extensão intervalar de f' monotônica em relação à inclusão tais que*

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$ *e*
2. $0 \notin F'([a,\ b])$.

*Nestas condições f possui uma única raiz $x^* \in X_0$, o **Operador Newtoniano Intervalar - Variação 3** dado por*

(i) $x_{k+1} = n(x_k) = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \in \mathbb{R},$ *com* $x_0 = m(X_0)$

(ii) $N_3(X_k) = x_{k+1} - \dfrac{f(x_{k+1})}{F'(X_k)}$

está bem definido, e a sequência intervalar com termos

$$X_{k+1} = X_k \cap N_3(X_k)$$

é uma sequência encaixada que converge para o intervalo degenerado $[x^*, x^*]$.

Note que o item (a) da Hipótese (iii) do Teorema 4.4 corresponde a tomar uma nova aproximação para a raiz, usando o Método de Newton Clássico.

O Algoritmo 5 apresenta a Variação 3 do Método de Newton Intervalar analogamente aos aos dois últimos algoritmos. Dada uma função f e um intervalo inicial $X_0 = [a,\ b]$, este algoritmo iterativo irá retornar um subintervalo de $[a,\ b]$ com o tamanho menor do que a precisão desejada e que contenha a raiz x^* de f, ou então, se for o caso, retornará um aviso de que tal intervalo não contém raiz de f.

Algoritmo 5: Método de Newton Intervalar - Variação 3

Dados: F, F', X_0, ϵ
início
- Calcule: $nx = m(X_0) - \dfrac{F(m(X_0))}{F'(m(X_0))}$;
- Calcule: $N_3X = nx - \dfrac{F(nx)}{F'(X_0)}$;
- Calcule: $X_0 = N_3X \cap X_0$;
- **se** $X_0 \neq \emptyset$ **então**
  - **enquanto** $w(X_0) > \epsilon$ **faça**
    - Atualize: $nx = nx - \dfrac{F(nx)}{F'(nx)}$;
    - Atualize: $N_3X = nx - \dfrac{F(nx)}{F'(X_0)}$;
    - Atualize: $X_0 = N_3X \cap X_0$;
  - **fim**
  - Mostre na tela: Existe ao menos uma raiz no intervalo;
  - Mostre: $N_3XintersecaoX$;
- **senão**
  - Mostre na tela: O intervalo fornecido nao possui raiz;
- **fim**

fim

Vejamos um exemplo de aplicação da Variação 3 do Método de Newton Intervalar. Utilizaremos a mesma função dos exemplos anteriores.

Exemplo 4.14. *Consideremos $f(x) = x^2 - 2$ e sua derivada $f'(x) = 2x$, então $F'(X) = 2X$. Se considerarmos o intervalo $X_0 = [1,\ 2]$, em que a raiz $x^* = \sqrt{2}$ está isolada, e 10^{-4} a precisão desejada, temos que o Operador Newtoniano fica*

a. $n(x) = x - \dfrac{x^2 - 2}{2x} \in \mathbb{R}$;

b. $N_3 = n(x) - \dfrac{n(x)^2 - 2}{2X}$.

Dessa forma, podemos aplicar a Variação 3 do Método de Newton Intervalar. Logo, a sequência intervalar de termos $X_{k+1} = X_k \cap N_3(X_k)$*, com* $X_0 = [1,\ 2]$*, converge para* x^**. Os valores da sequência intervalar encaixada, obtidos pelo Algoritmo 6, são dados na Tabela 4.8.*

k	$\mathbf{X_k}$
0	$[1,\ 2]$
1	$[1.375,\ 1.4375]$
2	$[1.414141414141414, 1.414251207729469]$
3	$[1.41421356226314, 1.414213562428036]$

Tabela 4.8: Aproximação da maior raiz de f usando a Variação 3 do Método de Newton Intervalar.

Portanto, o valor da raiz da função $f(x) = x^2 - 2$ *é um valor real*

$$x^* \in [1.41421356226314, 1.414213562428036].$$

Note que o intervalo limite obtido se aproximou um pouco melhor, na oitava casa decimal, do que quando usamos a Variação 1 do Método de Newton Intervalar.

4.4.4 Comparação dos Métodos Intervalares de Newton

A fim de ilustrarmos as diferenças de desempenho desses algoritmos, vamos comparar os tempos de execução dos mesmos. Com o intuito de evitar distorções no tempo de execução ocasionadas pela máquina utilizada (isto é, tempos diferentes para executar o mesmo programa com os mesmos dados de entrada), optamos por executar cada um dos algoritmos 1000 vezes e considerar a média do tempo de execução.

Para melhor visualizar os resultados, foram geradas imagens ilustrativas. No eixo x estão as diferentes precisões utilizadas nos três métodos, enquanto o eixo y representa o tempo de execução dos mesmos. Note que quanto mais baixa a curva do método, mais rápido é finalizado o processo iterativo.

Primeiramente, vejamos os desempenhos dos Algoritmos 3, 4 e 5 em relação à função real $f(x) = x^2 - 2$, com $X_0 = [1,\ 2]$, apresentada nos Exemplos 4.12, 4.13 e 4.14. A Figura 4.11 a seguir pode ser gerada a partir do programa descrito em linguagem GNU Octave no Apêndice de Cassimiro [4].

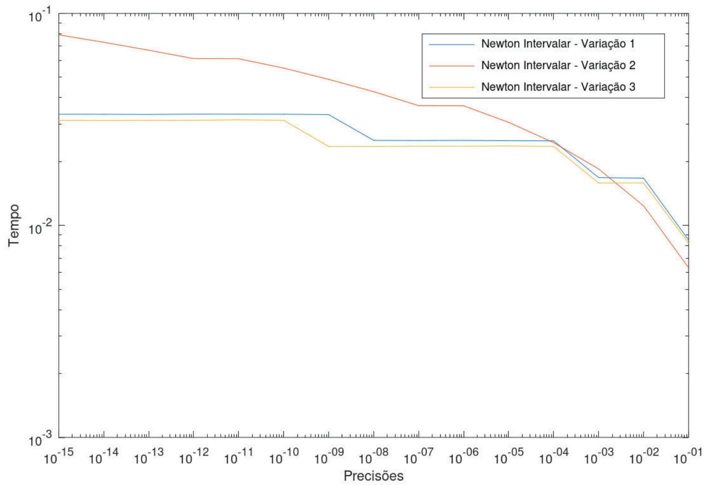

Figura 4.11: Comparação do tempo de execução dos Métodos de Newton Intervalares para a função $f(x) = x^2 - 2$ em relação à precisão desejada.

Observe que a escolha do método, para esta função, pode variar dependendo do quão refinado precisamos do intervalo limite em relação ao retorno mais rápido. Por exemplo, note que a partir da precisão $\epsilon = 10^{-3}$, a Variação 3 do Método de Newton Intervalar é o método que converge mais rapidamente. Em contra partida, se a precisão $\epsilon = 10^{-2}$ for suficiente, é vantajoso usar a Variação 2 do Método de Newton Intervalar.

Vejamos agora a comparação dos métodos em relação à função real $f(x) = 5x - e^x$ com $X_0 = [2,\ 3]$, apresentada no Exemplo 4.9. Temos que $f'(x) = 5 - e^x$ é monótona decrescente em X_0. Então, temos que $M = [5 - e^3,\ 5 - e^2]$. Uma possível extensão intervalar de f' seria $F'(X) = 5 - e^X$. Logo, substituindo essas informações nos respectivos Operadores Newtonianos Intervalares para cada variação do Método de Newton Intervalar, temos que geraremos uma sequência intervalar encaixada convergente para a raiz x^* tal que $5x^* = e^{x^*}$.

A Figura 4.12 apresenta a comparação das diferentes variações do Método de Newton Intervalar para esta função (onde o tempo de execução também foi calculado pela média de 1000 execuções de cada um dos algoritmos).

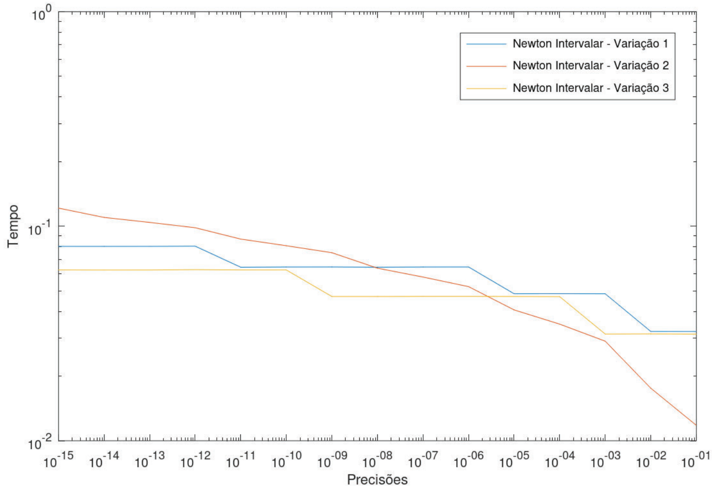

Figura 4.12: Comparação do tempo de execução dos Métodos de Newton Intervalares para a função $f(x) = 5x - e^x$ em relação à precisão desejada.

Da mesma maneira que a função anterior, a partir da precisão $\epsilon = 10^{-6}$, a Variação 3 do Método de Newton Intervalar é o método que converge mais rapidamente.

Porém, isso não ocorre necessariamente com todas as funções. Consideraremos a seguinte função real $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x^3$, com $X_0 = [1,\ 2]$. Temos que f é contínua em $\mathbb{R}$, ou seja, contínua em X_0 e $f(1)f(2) = (e^{\frac{1}{2}} - 1^3)(e^{\frac{2}{2}} - 2^3) < 0$, o que implica que f tem pelo menos uma raiz no intervalo $[1,\ 2]$.

Além disso, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - 6x^2\right)$ é monótona decrescente em X_0. Então, segue que $M = \left[\dfrac{1}{2}(e - 24),\ \dfrac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}} - 6)\right]$. Uma possível extensão intervalar para f' seria $F'(X) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{X}{2}} - 6X^2\right)$. Dessa forma, substituindo essas informações nos respectivos Operadores Newtonianos Intervalares, iremos gerar sequências de intervalos encaixados que convergem para a raiz x^* tal que $e^{\frac{x^*}{2}} = x^{*3}$.

A Figura 4.13 apresenta a comparação dos Métodos de Newton Intervalares para esta função f para diferentes precisões ϵ.

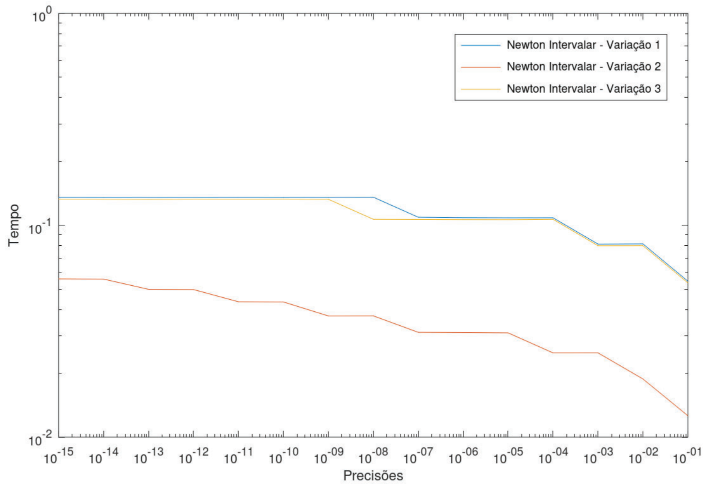

Figura 4.13: Comparação do tempo de execução dos Métodos de Newton Intervalares para a função $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x^3$ em relação à precisão desejada.

Portanto, para a função $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x^3$, com $X_0 = [1,\ 2]$, o Método de Newton Intervalar Simplificado, isto é, a Variação 2, é o método que converge mais rapidamente para todas as precisões apresentadas na Figura 4.13.

Note que a discussão anterior foi feita em termos da comparação do tempo computacional gasto pelos algoritmos. Entretanto, uma discussão análoga pode ser feita considerando outros pontos como o número de iterações e/ou seu custo computacional ou qualquer outra medida de desempenho do conjunto de algoritmos, a depender da necessidade em questão a ser comparada.

4.5 Exercícios

1. Utilizando o Método de Newton Intervalar, encontre a raiz das funções a seguir, com os respectivos intervalos iniciais:

   a. $f(x) = x^2 - 5$, $X_0 = [2,\ 3]$;
   b. $f(x) = e^x - 3x$, $X_0 = [0,\ 1]$;
   c. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 12$, $X_0 = [-2,\ 0]$;
   d. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x + 1$, $X_0 = [3,\ 4]$;
   e. $f(x) = x^5 + x^4 + 1$, $X_0 = [-2,\ 0]$.

2. Calcule a raiz da função $f(x) = x^3 - 3$, usando o Método de Newton Intervalar, com suas respectivas variações, no intervalo inicial $X_0 = [1,\ 2]$. Compare os resultados.

3. Mostre que $X^{(k)} = X^{(3)}$, para todo $k > 3$ no Exercício 2. Isto é, demonstre que há convergência finita em três iterações, considerando uma precisão de oito casas decimais.

4. Considere o intervalo X_0, a função real f, a extensão intervalar F', o Operador Newtoniano Intervalar N e a sequência intervalar $\{X_k\}$ sob as mesmas condições do Teorema 4.2. Prove que, se $x^* \in X_0$ é a única raiz de f em X_0, então $x^* \in X_k$ para todo k. (Dica: utilize o Teorema do Valor Médio).

Capítulo 5

Considerações Finais

Este livro oferece uma breve introdução à Análise Intervalar, um tema de grande importância e aplicabilidade. Buscamos apresentar o assunto de maneira didática, incorporando exemplos, figuras e discussões ao longo do texto. No entanto, mantivemos um compromisso com o formalismo matemático, fundamental para apreciar a beleza intrínseca desse conteúdo.

A introdução à Análise Intervalar apresentada aqui abrange os fundamentos da aritmética intervalar, explorando suas propriedades e comparando com a estrutura algébrica da aritmética em números reais. Esperamos que tenha ficado claro ao leitor as adequações necessárias para transitar de elementos reais para elementos intervalares, bem como as propriedades que não foram possíveis preservar. Abordamos também funções e sequências intervalares, buscando estabelecer um paralelo com funções e sequências reais. Concluímos o conteúdo matemático deste material com a aplicação em zeros de funções, a fim de apresentar ao leitor ao menos uma aplicação da Análise Intervalar dentre as diversas possíveis.

Esperamos que, ao final da leitura deste material, o leitor sinta-se instigado a continuar estudando sobre o tema e a utilizar esta ferramenta nas mais diversas áreas da matemática aplicada.

Um dos textos clássicos sobre o tema, cuja leitura recomendamos, é o livro "Interval Analysis" [18], escrito por R. E. Moore (e outros), um dos pioneiros na área de Análise Intervalar. Apesar de possuir uma abordagem mais computacional, com menos formalismo matemático em comparação ao presente texto, consideramos esta obra uma referência excelente para os leitores interessados em prosseguir seus estudos, especialmente agora que já adquiriram um sólido embasamento básico sobre Análise Intervalar com o devido rigor matemático. Vale destacar que esse livro abrange uma variedade mais extensa de tópicos, incluindo Matrizes Intervalares, Integração de Funções Intervalares, e diversas aplicações. Infelizmente, até o momento presente, este livro não está disponível em língua portuguesa.

Salientamos que este material não tem como objetivo apresentar o estado da arte sobre este tema, mas sim fornecer um texto introdutório com embasamento matemático adequado, permitindo ao leitor familiarizar-se com o assunto e, assim, prosseguir seus estudos conforme sua área de interesse. Por exemplo, no que diz respeito à aritmética intervalar, há diversas abordagens possíveis. Neste material, assim como no livro de Moore, abordamos apenas a Aritmética Intervalar Padrão, conhecida como *Standard Interval Arithmetic* (SIA) em inglês. Essa abordagem também é chamada de Aritmética Intervalar Usual, ou simplesmente Aritmética Intervalar, quando não há risco de ambiguidade, conforme adotado ao longo deste livro.

A SIA apresenta diversas propriedades que facilitam a realização de operações intervalares, conforme explorado ao longo deste material. No entanto, algumas propriedades importantes da estrutura algébrica da aritmética real não são preservadas, como a distributividade. Na SIA, obtemos apenas a subdistributividade, devido às superestimativas dos intervalos resultantes que podem ocorrer na Aritmética Intervalar Padrão. Embora existam métodos para mitigar essa superestimação, esse processo pode tornar-se bastante lento ao lidar com intervalos extensos ou funções mais complexas, como as exponenciais ou trigonométricas [22].

Tendo isto em vista, recentemente outras abordagens tem sido propostas e estudadas com o intuito de contornar estes problemas. Entre elas a Aritmética Intervalar proposta por Oliver Aberth, a Aritmética Intervalar Generalizada (Generalized Interval Arithmetic - GIA) proposta por E.R. Hansen, a Aritmética Afim (Affine arithmetic - AA) proposta por J. Stolfi e L. Figueiredo, ou ainda a Aritmética Intervalar Restrita (Constrained Interval Arithmetic - CIA) proposta por W. Lodwick. Um interessante resumo sobre cada uma destas abordagens pode ser encontrado no artigo "On the Normalization of Interval"[22].

As diversas abordagens da aritmética intervalar possuem propriedades distintas em termos de precisão, complexidade computacional e capacidade de modelar diferentes tipos de incerteza. Portanto, a escolha da abordagem mais adequada pode variar em diferentes situações. A CIA, por exemplo, irá possuir tanto inverso aditivo quanto multiplicativo, e possuirá a propriedade de distributividade, e não apenas subdistriutividade como A SIA. Desta forma, a estrutura aritmética da CIA será ainda mais próxima da estrutura algébrica da aritmética real. O leitor que tiver interesse poderá encontrar mais informações em português sobre a CIA em [20, 14].

Com relação às aplicações da análise intervalar, estas podem ocorrer em diversos contextos e nas mais variadas áreas de conhecimento.

Seria restritivo indicar aqui materiais específicos para tal. No entanto, o leitor interessado não terá dificuldade em encontrar inúmeros artigos científicos sobre aplicações da Análise Intervalar em diferentes contextos.

Desejamos que esta breve introdução sirva de estímulo para aqueles interessados na área, sendo o ponto de partida rumo a muitos outros estudos neste tema tão rico em aplicações práticas bem como em fundamentos matemáticos.

Bibliografia

[1] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. Fourth. Boston: PWS-Kent Publishing Company, 1989. (The Prindle, Weber and Schmidt Series in Mathematics).

[2] BURKILL, J. C. Functions of Intervals. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-22, n. 1, p. 275–310, 01 1924. ISSN 0024-6115. Disponível em: <https://doi.org/10.1112/plms/s2-22.1.275>.

[3] BUSTINCE, H. et al. Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 220, p. 69–77, 2013.

[4] CASSIMIRO, N. C. *Análise Intervalar*. Monografia (TCC) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Dezembro 2020.

[5] CORLISS, G. Which root does the bisection algorithm find? *SIAM Review*, v. 19, n. 2, p. 325–327, 1977. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/1019044>.

[6] CUSATIS, A. D.; FIGUEIREDO, L. H. D.; GATTASS, M. Interval methods for ray casting implicit surfaces with affine arithmetic. In: *XII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (Cat. No.PR00481)*. Campinas, Brazil: IEEE, 2002. p. 65–72.

[7] DOMINGUES, H.; IEZZI, G. Álgebra moderna. *Sao Paulo*, p. 40, 2003.

[8] DWYER, P. S. *Linear computations.* New York: Wiley, 1951. xi, 344 p. p. (Wiley publications in statistics).

[9] FREIWALD, R. C. *An introduction to set theory and topology.* [S.l.]: Washington University in St. Louis, 2014.

[10] GRELL, H.; MARUHN, K.; RINOW, W. *Enzyklop adie der Elementarmathematik, Band I Arithmetik, Dritte Au age*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.

[11] HÖLBIG, C. A. *Métodos Intervalares para a Resolução de Sistemas de Equações Lineares*. 94 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1996.

[12] HUMES, A. F. P. d. C. et al. *Noções de cálculo numérico*. São Paulo: Mcgraw-Hill do Brasil, 1984.

[13] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. *Computer arithmetic in theory and practice*. [S.l.]: Academic press, 2014.

[14] LEAL, U. S.; SILVA, G.; LODWICK, W. *Análise Intervalar e Aplicações: Otimização e Controle*. [S.l.]: Editora Appris, 2021.

[15] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977. (Projeto Euclides).

[16] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989. (Projeto Euclides).

[17] MITCHELL, D. P. Robust ray intersection with interval arithmetic. In: *Proceedings of Graphics Interface '90*. Toronto, Ontario, Canada: Canadian Man-Computer Communications Society, 1990. (GI '90), p. 68–74. ISSN 0713-5424. Disponível em: <http://graphicsinterface.org/wp-content/uploads/gi1990-8.pdf>.

[18] MOORE, R. E. *Interval Analysis*. New Jersey, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966.

[19] MOORE, R. E.; KEARFOTT, R. B.; CLOUD, M. J. *Introduction to Interval Analysis*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[20] NETO, L. L. d. S.; LODWICK, W. *Otimização sob incerteza: aspectos teóricos, computacionais e aplicações*. São Carlos - SP: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - Notas em Matemática Aplicada, 2003.

[21] OLIVEIRA, P. W.; DIVERIO, T. A.; CLAUDIO, D. M. *Fundamentos da Matemática Intervalar*. 2. ed. Porto Alegre: Instituto de Informática da UFRGS : Sagra Luzzatto, 2005.

[22] SANTIAGO, R. et al. On the normalization of interval data. *Mathematics*, MDPI, v. 8, n. 11, p. 2092, 2020.

[23] SUNAGA, T. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis [Reprint of Res. Assoc. Appl. Geom. Mem. 2 (1958), 29–46]. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*,

Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 26, n. 2-3, p. 125 – 143, 2009.

[24] VARGAS, R. R. d. *Uma nova forma de calcular os centros dos Clusters em algoritmos de agrupamento tipo fuzzy c-means*. 98 f. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2012.

[25] WIENER, N. *A Contribution to the Theory of Relative Position*. Massachusetts: Cambr. Phil. Soc. Proc., 1914. 441-449 p.

[26] WIENER, N. A New Theory of Measurement: A Study in the Logic of Mathematics. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-19, n. 1, p. 181–205, 01 1920. ISSN 0024-6115. Disponível em: <https://doi.org/10.1112/plms/s2-19.1.181>.

[27] YOUNG, R. C. The algebra of many-valued quantities. *Mathematische Annalen*, v. 104, n. 1, p. 260–290, 1931. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01457934>.

Índice